УДК 519.8
ББК 650
Е 87

Рецензенты: О. А. Кравченко, канд. техн. наук, доцент кафедры информационных технологий Гомельского государственного технического университета им. П. О. Сухого;
В. В. Бондарева, канд. техн. наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендован к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 3 от 14 февраля 2006 г.

Еськова, О. И.
Е 87 Экономико-математические методы и модели : курс лекций для студентов дневной формы обучения экономических специальностей / О. И. Еськова. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2006. – 168 с.
ISBN 985-461-183-3

УДК 519.8
ББК 650

ISBN 985-461-183-3

ВВЕДЕНИЕ

Экономико-математическое моделирование является в настоящее время основным способом исследования сложных экономических систем. Данный курс лекций содержит ознакомительные сведения о ключевых понятиях моделирования, основных приемах и подходах к созданию и использованию математических моделей в экономике.

Круг вопросов, рассматриваемый в данном курсе лекций, соответствует учебной программе дисциплины «Экономико-математические методы и модели».

Первая тема курса посвящена общим вопросам и понятиям моделирования. В ней определяются предмет, метод и цель данного курса, раскрываются понятия модели и моделирования, адекватности модели и другие основные определения. Рассматриваются типовые этапы разработки и использования экономико-математических моделей, обсуждаются вопросы погрешности моделирования. Приводится классификация экономико-математических моделей и методов.

Остальные темы курса лекций знакомят студентов с рядом прикладных моделей, использующих различный математический аппарат. Для каждого типа моделей обсуждаются ее теоретические основы, область и особенности практического применения. Приводятся примеры постановки и решения задач с использованием рассматриваемых типов моделей. При решении задач используется компьютерно ориентированный подход, т. е. раскрываются основные приемы реализации моделей в популярных приложениях MS Excel и MathCad. Более подробно компьютерная реализация моделей описана в пособиях для лабораторных работ.

Большое внимание в данном курсе лекций уделяется моделям математического программирования, различным их видам и методам решения. На примере задач линейного программирования студентам предлагается научиться использовать такое мощное и достаточно универсальное средство решения задач, как надстройка *Поиск решения* пакета MS Excel. Для решения задач по другим темам эта надстройка уже подробно не обсуждается, а рекомендуется к использованию. Поскольку при использовании данной надстройки процесс решения скрыт от пользователя, важно, чтобы студенты понимали суть этого процесса и могли адекватно реагировать на возможные неудачи при решении. С этой целью изучение темы начинается с разбора решения задачи графическим методом. Хотя этот вопрос является повторением материала курса высшей математики, такой подход позволяет студентам на простом примере понять смысл различных ситуаций при решении задач линейного программирования и научиться их связывать с сообщениями надстройки *Поиск решения*. Кроме того, графический метод дает наглядную иллюстрацию проблемы исследования устойчивости модели.

Надстройка *Поиск решения* для задач линейного программирования позволяет получать отчеты различных типов, поэтому большое внимание уделяется анализу этих отчетов с целью более глубокого понимания решения задачи на основе теории двойственности. Излагается основной теоретический материал по теории двойственности и связывается с отчетами надстройки *Поиск решения*, причем наибольшее внимание уделяется экономической интерпретации двойственной задачи и теорем двойственности. Таким образом, данная тема занимает значительное место в общем курсе лекций, поскольку она дает основу для компьютерной реализации моделей остальных тем.

В данном курсе лекций также рассматриваются задачи теории игр, модели прогнозирования, сетевого планирования и управления, балансовые модели, модели систем массового обслуживания и анализа инвестиционных проектов. Список видов моделей, рассматриваемых в данном курсе лекций, безусловно, неполный. Были отобраны модели, имеющие достаточно широкое практическое применение, простую и разнообразную компьютерную реализацию. Этих моделей достаточно, чтобы продемонстрировать студентам основные принципы разработки и использования математических моделей в экономике.

Курс лекций рассчитан на студентов дневной формы обучения экономических специальностей. Объем изучения каждой темы определяется рабочей программой конкретной специальности. Данный курс лекций может быть также рекомендован студентам заочной формы обучения для самостоятельной подготовки.

Тема 1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

1.1. Экономико-математические методы и их классификация

Математика – одна из самых древних наук и она развивается вместе с человечеством. Ни одна из сфер жизнедеятельности человека не обходится без чисел, подсчетов, а значит, и математики. Экономика не составляет исключения. Она опирается на большое число математических дисциплин. Комплекс экономических и математических научных дисциплин, предназначенных для изучения экономических систем и процессов, объединяют в общее понятие – *экономико-математические методы*.

Бурное развитие экономико-математических методов в последние 100–200 лет объясняется значительным укрупнением производства и интеграционными процессами в экономике. В этих условиях возрастает цена ошибки при принятии управленческих решений. Именно математические исследования способны дать всесторонний анализ экономических проблем, найти для них оптимальное решение. Поэтому изучение дисциплины «Экономико-математические методы» включено в учебный план для всех экономических специальностей.

В комплексе экономико-математических методов можно выделить следующие основные направления [12]:

- *Экономическая кибернетика* рассматривает вопросы, связанные с организацией управления в экономике. Она включает такие разделы, как теория экономической информации, теория управляющих систем и другие.
- *Математическая экономика* характеризуется системным подходом, т. е. экономика рассматривается как совокупность ее функциональных подсистем (производственной, финансово-кредитной, потребительской). Основные разделы математической экономики – теория производственных функций, анализ спроса и потребления, межотраслевые балансы и другие.
- *Эконометрика* – это наука, которая на базе реальных статистических данных производит анализ различных экономических явлений. Эконометрика позволяет найти количественное подтверждение либо опровержение того или иного экономического закона или гипотезы. Например, экономическая теория утверждает, что спрос на товар с ростом его цены убывает. Но при этом остается вопрос, как быстро и по какому закону происходит это убывание. Эконометрика

отвечает на него для каждого конкретного случая. Основным инструментом эконометрики является аппарат математической статистики. Однако, кроме методов математической статистики, в эконометрике используются собственные наработки и специальные приемы анализа. Одно из важнейших направлений эконометрики – это анализ временных рядов и построение прогнозов.

- *Исследование операций в экономике* объединяет методы, дающие обоснование выбора оптимальной стратегии с учетом конкретной ситуации. Это крупное и хорошо разработанное направление, включающее следующие разделы: математическое программирование, теорию игр, сетевое планирование и управление, теорию массового обслуживания и другие.
- Разработано множество *других методов и моделей анализа экономики*, применимых к отдельным экономическим объектам или системам. Например, теории оптимального планирования и ценообразования применимы для централизованной планируемой экономики, а теории фирмы, модели капиталистического цикла – для рыночной (конкурентной) экономики. Можно выделить также методы имитационного моделирования, которые позволяют построить на ЭВМ алгоритмическую модель некоторого экономического процесса и исследовать эту модель путем проведения на ней статистических экспериментов.

1.2. Основные понятия моделирования

Общим для всех экономико-математических дисциплин является то, что они в качестве основного метода исследования используют метод моделирования.

Моделированием называется способ изучения реального объекта через рассмотрение подобного ему, но более простого объекта, т. е. его модели. Таким образом, моделирование предполагает разработку модели, ее анализ и перенос результатов исследования на реальный объект.

Родоначальником экономико-математического моделирования считается лейб-медик короля Людовика XIV Ф. Кене. В 1758 г. он опубликовал свой труд «Экономические таблицы». В нем Ф. Кене сделал попытку описать процесс общественного воспроизводства с применением математических методов исследования. Затем простейшие модели были предложены в работах Адама Смита (классическая макроэкономическая модель), Давида Риккардо (модель международной торговли) и другими. Начиная с XIX в., развитие экономико-математического моделирования шло ускоренными темпами. Свой вклад в этот процесс внесли такие известные ученые, как О. Курно, В. Парето, Л. Вальрас, В. Леонтьев, Д. Хикс, Р. Солоу, Е. Е. Слуцкий, Л. В. Канторович и другие. Многие из них стали Нобелевскими лауреатами. Под впечатлением кризиса 1929–1933 гг. была построена модель Кейнса, отражающая возможности рыночной экономики адаптироваться к возмущающим воздействиям. Применение этой модели для выхода из послевоенного кризиса в Германии и Японии было весьма успешным и получило название «экономического чуда».

Почему же экономико-математическое моделирование является основным способом анализа экономики? Ответ на этот вопрос лежит в особенностях экономики как объекта исследования. Коротко перечислим эти особенности:

- в экономике невозможны натурные эксперименты, так как за них всегда расплачиваются люди;
- все экономические процессы являются динамическими, т. е. развиваются во времени. При любых изменениях в экономике видны только краткосрочные результаты, а долгосрочные неизвестны;
- в экономике невозможны «чистые» (или локальные) исследования, поскольку всегда существует взаимосвязь ее различных компонентов. Требуется учитывать влияние внешних факторов, будь то погода или состояние валютного рынка;
- процессы в экономических системах носят случайный характер. Влияние случайных факторов требует проведения не одного, а достаточно большого количества экспериментов для выявления закономерностей.

Таким образом, экономические объекты относятся к классу сложных систем. Использование моделирования позволяет не только проводить исследование простым и дешевым способом, но и анализировать поведение объекта в пограничных, экстремальных ситуациях.

Модель – это образ реального объекта, отражающий существенные свойства этого объекта и замещающий его в ходе исследования.

Модель может быть материальной (образец, макет) или идеальной (описание, схема, график и т. д.).

Математической моделью называется формализованное на языке математики описание объекта или процессов, протекающих в нем. Математические модели имеют вид функций, уравнений, неравенств, а также систем уравнений и неравенств.

Сложность экономических систем делает невозможным создание полной модели, учитывающей все без исключения факторы. Поэтому модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта и замещает оригинал в строго ограниченном смысле. В зависимости от целей моделирования один и тот же объект может иметь различные модели.

Под *адекватностью модели* понимается ее соответствие моделируемому объекту. Адекватность модели означает, что существенные свойства объекта верно учтены в модели. Доказать адекватность можно с помощью эксперимента на реальном объекте. Если результаты этого эксперимента совпадают с результатами моделирования, то модель считается адекватной.

1.3. Классификация экономико-математических моделей

Экономико-математические модели классифицируются по ряду признаков. Рассмотрим некоторые из них:

- *по общему целевому назначению* различают *теоретико-аналитические модели,* используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов, и *прикладные модели,* применяемые в решении конкретных экономических задач;
- *по степени агрегирования объектов моделирования* модели подразделяются на макроэкономические и микроэкономические. *Макроэкономические модели* отражают функционирование экономики как единого целого. *Микроэкономические модели* связаны, как правило, с такими звеньями экономики, как предприятия и фирмы;
- *по учету фактора времени* выделяют *статические модели*, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени, и *динамические модели*, описывающие экономические системы в развитии;
- *по учету фактора неопределенности* модели подразделяются на детерминированные и стохастические. *Детерминированными* называются модели объектов, состояние которых не зависит от случайных величин. Если же требуется учитывать влияние некоторых случайных величин, то модель является *стохастической*;
- *по типу математического аппарата,* используемого в модели, различают следующие виды моделей: математического программирования, сетевого планирования и управления, массового обслуживания, теории игр, корреляционно-регрессионные модели и т. д.

1.4. Этапы построения моделей

При создании математических моделей сложных систем часто используют путь перехода от простых моделей к более сложным. Сначала выделяют основные свойства системы, учитывают наиболее значимые факторы, действующие в системе, и получают простую, но достаточно «грубую» модель. Результаты исследования этой модели сравниваются с реальным объектом. Это позволяет скорректировать, уточнить модель, учесть новые факторы. Полученная новая, более сложная, модель исследуется и снова сравнивается с оригиналом. Этот процесс в общем случае бесконечен и в нем заложены большие возможности совершенствования. При создании каждой новой математической модели, как правило, выполняются следующие *этапы моделирования* [12]:

1. *Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ* требуют формулировки сущности проблемы, принимаемых допущений и предпосылок. Необходимо выделить важнейшие свойства моделируемого объекта, изучить его структуру и взаимосвязь его элементов, выдвинуть предварительные гипотезы, объясняющие поведение объекта.

2. *Построение математической модели* – это этап формализации экономической проблемы, т. е. выражения ее в виде конкретных математических зависимостей. Обычно подбирается модель, относящаяся к хорошо изученному классу математических задач, что может потребовать некоторого упрощения исходных предпосылок модели. Важно, чтобы эти упрощения не искажали основных черт моделируемого объекта.

3. *Анализ модели*. На этом этапе математическими приемами исследования доказывается существование решения, анализируется вопрос его единственности, устойчивости. Если возможно, разрабатываются аналитические явные зависимости для искомых величин. В противном случае осуществляется переход к численному решению задачи, т. е. поиску числовых результатов при конкретных начальных данных.

На этапе анализа модели могут возникнуть следующие ситуации:

- когда существует аналитическая зависимость между переменными и откликами;
- когда нет аналитического решения в общем виде, но при конкретных исходных данных можно получить численный результат. В этом случае важно правильно выбрать метод численного решения задачи на компьютере с учетом накопления погрешности в процессе решения (или разработать новый метод решения);

- когда нет ни аналитического, ни численного решения и можно только исследовать свойства этого решения.

4. *Подготовка исходной информации* – это один из наиболее трудоемких этапов, так как он не сводится к пассивному сбору данных. В процессе подготовки информации используют методы теории вероятности и математической статистики для организации выборочных обследований, оценки достоверности данных и т. д.

5. *Численное решение задачи* включает непосредственное выполнение расчетов на компьютере. Для расчетов могут использоваться как программные продукты общего назначения (MS Excel, MathCad), так и специально разработанные программы. При этом значительные трудности вызываются большой размерностью экономических задач.

6. *Анализ результатов моделирования и их применение*. На этом этапе прежде всего решается вопрос об адекватности модели и применимости результатов моделирования в практической деятельности. При необходимости совершенствуется форма модели, уточняется состав ее переменных, т. е. происходит возврат на предыдущие этапы моделирования. Если же модель является адекватной, то результаты моделирования переносятся на реальный объект и вырабатываются конкретные рекомендации по решению практических задач.

Погрешность математического моделирования как меру отклонения модели от реального объекта можно упрощенно представить в виде следующей суммы:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_s + \sigma_i ,$$

где σ_m – погрешность самой модели, которая обусловлена упрощениями, положенными в основу модели;

σ_s – погрешность вычислительной схемы, которая накапливается за счет конечного представления чисел в разрядной сетке компьютера и связана с особенностями применяемого алгоритма численного решения задачи;

σ_i – погрешность исходной информации, которая связана с неопределенностью некоторых исходных данных или их случайным характером, с трудностями сбора и обработки информации.

Очевидно, что при большой погрешности исходной информации или погрешности вычислений нет смысла создавать точную модель, которая обычно бывает очень сложной. Все равно погрешность моделирования окажется значительной. Лучше создать простую модель, применение которой требует минимум ресурсов и затрат времени, т. е. следует соотносить сложность и детальность модели с уровнем достоверности исходных данных [7].

Тема 2. МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Общая постановка задачи математического программирования

Одной из основных целей применения экономико-математических методов является выработка наилучших (оптимальных) управленческих решений. Такие решения должны, с одной стороны, максимально соответствовать основной цели управления (например, получения максимальной прибыли), а с другой, – учитывать возможности реализации этой цели (имеющиеся запасы ресурсов и применяемые технологии производства, спрос на готовую продукцию, плановые задания и т. д.). Другими словами, задача оптимального управления – это задача на экстремум некоторой функции при наличии ограничений. Изучением такого класса задач и методов их решения занимается математическое программирование [5], [8], [13].

В самом общем виде задача математического программирования имеет следующий вид:

Найти неизвестные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, доставляющие экстремум функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно по формуле

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max(min) \qquad (2.1)$$

при условии выполнения следующих ограничений:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, \{\le, =, \ge\} \, b_i \qquad (i = \overline{1, m}), \qquad (2.2)$$

где n – количество переменных;
m – количество ограничений.

Запись $\{\le, =, \ge\}$ в ограничениях означает, что возможен один из указанных знаков.

Величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *переменными задачи*. Их экономический смысл может быть различным. Например, если предприятие выпускает три вида продукции и нужно найти оптимальный план производства, то x_1, x_2, x_3 – количество продукции каждого вида, которое необходимо производить. Если в задаче необходимо найти наилучший состав рациона, в который могут входить несколько компонентов (например, сено и силос в рационе коров), то x_1 и x_2 – количество каждого компонента, которое нужно включить в рацион (в данном случае, количество сена и силоса).

Система ограничений (2.2) вытекает из ограниченности доступных материальных и трудовых ресурсов, технологических требований или же из здравого смысла. Для задачи составления рациона ограничения заключаются в необходимости того, чтобы рацион был полноценным (содержал питательные вещества, витамины и микроэлементы, необходимые для жизнедеятельности животных).

Очень часто в систему ограничений экономических задач включаются условия неотрицательности переменных: $x_j \geq 0, (j = \overline{1, n})$. Например, совершенно очевидно, что объем производимой продукции не может быть отрицательной величиной.

Набор значений переменных $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий всем ограничениям, называется *допустимым решением,* или *планом.* Совокупность всех планов задачи образует *область допустимых решений* (*ОДР*).

Для того, чтобы выбрать оптимальный (т. е. наилучший) план, нужно определить, что будет лежать в основе этого выбора, т. е. определить критерий оптимальности. *Критерий оптимальности* – это экономический показатель, на основании которого сравниваются управленческие решения и осуществляется выбор лучшего из них. Критерии оптимальности бывают натуральные и стоимостные, максимизируемые и минимизируемые. Например, максимизируемые критерии – это прибыль, рентабельность, валовой объем продукции, минимизируемые критерии – это себестоимость, затраты производства, издержки обращения.

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *целевой функцией* (*ЦФ*) и представляет собой математический вид критерия оптимальности.

План (допустимое решение), при котором целевая функция принимает экстремальное значение, называется *оптимальным*. Оптимальные значения переменных обычно обозначаются надстрочным знаком «*».

Оптимальных планов в задаче может быть несколько, возможно также бесконечное множество оптимальных планов.

В зависимости от вида целевой функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и функций системы ограничений $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ среди задач математического программирования можно выделить следующие:

- *Задачи линейного программирования*, в которых целевая функция и ограничения линейны относительно переменных x_j (нет степеней, произведений переменных и других нелинейных функций). К этому типу обычно приводятся задачи планирования выпуска продукции, составления смесей, раскроя материалов, планирования грузопотоков, распределения финансирования.
- *Задачи нелинейного программирования*, в которых целевая и (или) хотя бы одна из функций системы ограничений нелинейны. К задачам такого типа относятся задача определения экономически выгодной партии поставки товара, многие задачи проектирования. Не существует единого метода решения задач нелинейного программирования, решение каждой конкретной задачи ориентируется на ее особенности. Среди задач нелинейного программирования выделяют задачи выпуклого программирования (целевая функция является выпуклой, а *ОДР* есть выпуклое замкнутое множество), квадратичного программирования (*ЦФ* есть квадратичная функция, а система ограничений линейна), дробно-линейного программирования (*ЦФ* есть отношение двух линейных функций, а ограничения линейны) и т. п.
- *Задачи дискретного*, в частности *целочисленного программирования*, в которых на все или некоторые переменные наложено условие дискретности или целочисленности. Дискретность означает, что переменная может принимать не все возможные значения на числовой прямой, а только некоторые. Например, пусть переменная есть масса некоторой вещи, которую можно положить в рюкзак. Всего имеются 4 вещи, масса которых – 1,5 кг, 2, 2,7 и 3,1 кг. При таких условиях переменная может принимать только одно из этих значений. А если, например, переменная есть количество людей, которое можно назначить на работу, то эта переменная – целочисленная и принимает значения 0, 1, 2, 3 и т. д. К этому типу относятся задачи о назначениях, контейнерных перевозках, задача коммивояжера и другие.
- *Задачи динамического программирования*, процесс решения которых носит многошаговый характер. На каждом шаге выбирается какое-либо решение, от которого зависит выигрыш не только на данном шаге, но и всей операции в целом. Как правило, в таких задачах целевая функция имеет один из двух видов:

1. Аддитивный: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$.
2. Мультипликативный: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$.

Если параметры целевой функции или ограничений изменяются во времени, то в таких задачах заложена многошаговость и они являются задачами динамического программирования. Например, задачи распределения капиталовложений, замены оборудования, о контейнерных перевозках и другие.

- *Задачи стохастического программирования*, в которых параметры целевой функции или ограничений являются случайными величинами. Эти задачи также возникают и в условиях неполной, недостоверной информации.

2.2. Задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования (*ЗЛП*) называется такая задача математического программирования, целевая функция которой имеет линейный вид, а ограничения заданы в виде линейных уравнений или неравенств. Методы решения таких задач являются наиболее разработанными. Начало линейной оптимизации было положено в 1939 г., когда вышла в свет работа профессора Ленинградского университета Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». Академик Л. В. Канторович за разработку методов решения оптимизационных задач был удостоен звания лауреата Ленинской (1965 г.) и Нобелевской (1975 г.) премий.

Математическая постановка задачи линейного программирования имеет следующий вид:

Переменные $x_j, (j = \overline{1, n})$, доставляющие экстремум целевой функции вычисляются по формуле

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max(min) \qquad (2.3)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (2.4)$$

$$d_j \le x_j \le D_j, \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (2.5)$$

Часто граничные условия сводятся к требованиям неотрицательности переменных $x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$.

Здесь параметры задачи $C_j, a_{ij}, b_i, d_j, D_j$ – это некоторые константы, известные для каждой конкретной задачи.

Ограничения (2.4) также называют функциональными, а ограничения (2.5) – прямыми.

При разработке математической модели задачи линейного программирования следует придерживаться приведенной ниже схемы, состоящей из 3-х шагов:

- *1 шаг* – выбор переменных, заданием числовых значений которых однозначно определяется состояние исследуемого объекта;
- *2 шаг* – количественное выражение выбранного критерия оптимальности в виде целевой функции, формулировка требования достижения экстремума целевой функцией;
- *3 шаг* – выражение ограничений на рост или уменьшение целевой функции в виде уравнений или неравенств, которые образуют систему ограничений.

Приведем примеры задач на формирование линейной модели.

Пример 2.1. Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5 м^2 стандартных ДСП, 1 м^2 листового стекла и 1 человеко-день трудозатрат. На тумбу – 1м^2 ДСП, 2 м^2 листового стекла и 1 человеко-день трудозатрат.

Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200 усл. ед., от 1 тумбы – 100 усл. ед. Материальные и трудовые ресурсы ограничены. В цехе работают 150 рабочих, в день нельзя израсходовать больше 350 м^2 ДСП и более 240 м^2 стекла.

Требуется определить, какое количество шкафов и тумб должен выпускать цех за день, чтобы прибыль была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение

Представим условие задачи в виде табл. 2.1.

Решаем задачу с применением пошаговой схемы формирования линейной модели.

1 шаг. Введем следующие переменные: x_1 – количество шкафов, x_2 – количество тумб, которые нужно производить за день.

Таблица 2.1. **Данные о нормах затрат, запасах ресурсов и прибыли от производства шкафов и тумб**

Ресурсы	Шкаф	Тумба	Запасы
ДСП, м^2	3,5	1	350
Стекло, м^2	1	2	240
Трудовые, человеко-дни	1	1	150
Прибыль, усл. ед.	200	100	

2 шаг. Запишем целевую функцию. В задаче ее экономический смысл – ежедневная прибыль цеха. Поскольку прибыль от всех производимых шкафов составит $200x_1$, а прибыль от всех производимых тумб равна $100x_2$, то общая ежедневная прибыль цеха выражается в виде следующей функции:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to max.$$

3 шаг. Если бы ресурсы не были ограничены, прибыль росла бы беспредельно. Однако существуют ограничения на объем доступных ресурсов. Так, в цехе работают 150 рабочих. Каждый рабочий за день может произвести либо 1 шкаф, либо 1 тумбу. Поэтому общее число выпущенных изделий не должно превышать числа рабочих в цехе. Данные ограничения можно выразить следующим неравенством:

$$x_1 + x_2 \le 150.$$

Количество ДСП, затрачиваемых на все шкафы, составляет $3,5x_1$, а количество ДСП, затрачиваемых на все тумбы, – x_2. Общий расход ДСП за день может быть представлен выражением $3,5x_1 + x_2$. Этот расход не должен превышать имеющегося запаса ДСП. Следовательно получаем нижеприведенное ограничение:

$$3,5x_1 + x_2 \le 350.$$

Аналогично рассматривается ограниченность запасов стекла и выражается следующим неравенством:

$$x_1 + 2x_2 \le 240.$$

По смыслу переменных $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ (т. е. количество шкафов и тумб не может быть отрицательным). Кроме того, количество шкафов и тумб должно быть целым.

Таким образом, получаем следующую модель:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \\ x_1,\ x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

Пример 2.2. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее 30 кормовых единиц, 1000 г белка, 100 г кальция и 80 г фосфора.

В табл. 2.2 приведены данные о содержании указанных питательных веществ в 1 кг каждого корма и себестоимости этих кормов. Необходимо определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости. Составить математическую модель.

Таблица 2.2. **Данные о содержании питательных веществ в кормах и об их себестоимости**

Корм	Содержание в 1 кг				Себестоимость, усл. ед./кг
	кормовых единиц	белка, г	кальция, г	фосфора, г	
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Решение

Решаем задачу с применением пошаговой схемы формирования линейной модели.

1 шаг. Введем следующие переменные: x_1 – количество сена в рационе, x_2 – количество силоса.

2 шаг. Наилучшим считается тот рацион, себестоимость которого будет наименьшей, т. е. критерием оптимальности в данной задаче является себестоимость выбираемого рациона. Сено в количестве x_1 (кг) будет стоить $1{,}2x_1$ (усл. ед.), а силос в количестве x_2 (кг) – $0{,}8x_2$ (усл. ед.). Общая стоимость рациона, которая должна быть минимальна, может быть представлена в виде функции

$$F = 1{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \to min.$$

3 шаг. Чтобы рацион был полноценным, он должен содержать не менее 30 кормовых единиц. Во всем сене, включаемом в рацион, содержится $0{,}5x_1$ кормовых единиц, а во всем силосе – $0{,}5x_2$ кормовых единиц. Общее количество кормовых единиц в рационе выражается суммой этих величин, поэтому получаем ограничение следующего вида:

$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \geq 30.$$

Белка в одном килограмме сена содержится 40 (г), а в x_1 килограмме сена – $40x_1$ (г). Во всем силосе, включаемом в рацион, содержится $10x_2$ (г) белка. Общее содержание белка в рационе составляет $40x_1 + 10x_2$, и оно должно быть не менее 1000 (г). Таким образом, получаем следующее ограничение:

$$40x_1 + 10x_2 \geq 1000.$$

Аналогично можно записать ограничения по кальцию и фосфору.

Учитывая, что количество сена и силоса не может быть отрицательным, а также наличие предельных величин, больше которых нельзя взять этих компонентов, получаем следующие прямые ограничения (граничные условия):

$$x_1 \geq 0; \quad x_1 \leq 50;$$
$$x_2 \geq 0; \quad x_2 \leq 85.$$

Итак, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:

$$F = 1{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \to min;$$
$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \geq 30; \\ 40x_1 + 10x_2 \geq 1000; \\ 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 \geq 100; \\ 2x_1 + x_2 \geq 80; \\ x_1 \geq 0; \quad x_1 \leq 50; \\ x_2 \geq 0; \quad x_2 \leq 85. \end{cases}$$

Задача линейного программирования может быть решена симплекс-методом, а в случае двух переменных – графическим методом. Решение задачи может быть автоматизировано с помощью различных прикладных программных пакетов, например, с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel.

2.3. Графический метод решения задачи линейного программирования

При наличии двух переменных задача линейного программирования может быть решена графическим методом [8], [1]. В этом случае математическая модель задачи линейного программирования будет иметь следующий вид:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max(min);$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\}\, b_1; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\}\, b_m. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Любой набор переменных $\overline{X} = (x_1, x_2)$ такой задачи может быть представлен точкой на плоскости (X_1; 0; X_2).

Рассмотрим область допустимых решений задачи, т. е. множество всех точек, удовлетворяющих системе ограничений. Каждое ограничение вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ задает на плоскости прямую, а аналогичное ограничение-неравенство – полуплоскость, границей которой является эта прямая.

Чтобы легко было определить, какую выбрать полуплоскость, достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется во всей полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае берется полуплоскость, не содержащая пробной точки. Обычно в качестве пробной точки берут точку с координата-
ми (0; 0).

Пересечение всех полуплоскостей и прямых, соответствующих ограничениям, является выпуклым множеством. Это может быть многоугольник, неограниченная выпуклая область, пустое множество, а также точка, отрезок или луч.

Пример 2.3. Построим ОДР для задачи планирования производства шкафов и тумб[1]. Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Первому ограничению соответствует полуплоскость, границей которой является прямая $3{,}5x_1 + x_2 = 350$, обозначим ее (I). Построим эту прямую по двум точкам: $X_1^{\mathrm{I}} = (100; 0)$ и $X_2^{\mathrm{I}} = (60; 140)$ (рис. 2.1).

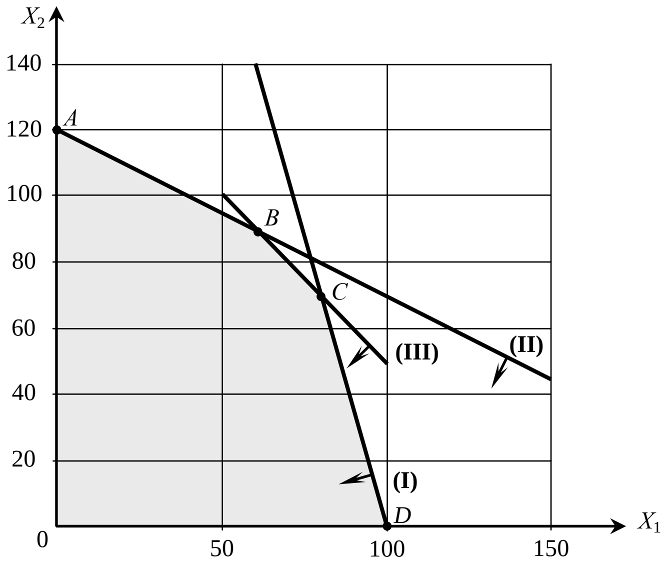


Рис. 2.1. **Область допустимых решений задачи планирования**

[1] Графический метод решения ЗЛП нельзя применять к целочисленным задачам в том виде, в котором он изложен далее. Поэтому для наглядности примера опустим ограничения целочисленности в условии этой задачи. Это возможно, поскольку и без данного условия оптимальные значения переменных в задаче получаются целыми.

производства шкафов и тумб

Чтобы определить, какая полуплоскость соответствует неравенству, проверим точку (0; 0): $3{,}5 \cdot 0 + 0 \le 350$ – истинное неравенство. Этому неравенству соответствует левая полуплоскость, которая содержит точку (0; 0).

Аналогично построим границу полуплоскости второго ограничения (II) и границу полуплоскости третьего ограничения (III), которые будут иметь следующий вид:

$$\text{(II)}\ x_1 + 2x_2 = 240\quad X_1^{\text{II}} = (0;\ 120);\ X_2^{\text{II}} = (150;\ 45);$$

$$\text{(III)}\ x_1 + x_2 = 150\quad X_1^{\text{III}} = (100;\ 50);\ X_2^{\text{III}} = (50;\ 100).$$

Второму ограничению соответствует нижняя полуплоскость, поскольку она содержит точку (0; 0), и координаты этой точки дают истинное неравенство: $0 + 2 \cdot 0 \le 240$. По той же причине третьему ограничению соответствует полуплоскость левее и ниже прямой (III).

Ограничениям неотрицательности соответствуют полуплоскости вверх от прямой ($0X_1$) и вправо от прямой ($0X_2$).

Пересечение всех полуплоскостей, соответствующих ограничениям, есть область допустимых решений. Таким образом, в данной задаче областью допустимых решений является выпуклый многоугольник $0ABCD$ (на рис. 2.1 он закрашен серым цветом).

Линией уровня целевой функции $F = c_1x_1 + c_2x_2$ называется прямая на плоскости (X_10X_2), в каждой точке которой значение целевой функции одинаково, т. е. $c_1x_1 + c_2x_2 = F_0$, где $F_0 = const$.

Линии уровня целевой функции образуют семейство параллельных прямых.

Вектором-градиентом некоторой функции называется вектор, составленный из частных производных этой функции.

Вектор-градиент целевой функции $\nabla = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}; \dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right) = (c_1;\ c_2)$ перпендикулярен к линии уровня и показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции.

Если перемещать линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора-градиента, то значение целевой функции в каждой точке на этой прямой будет возрастать. Последняя точка ОДР, которой коснется линия уровня, будет оптимальным решением задачи, так как в этой точке значение целевой функции наибольшее из всех допустимых. Таким образом, в задаче линейного программирования оптимальный план лежит на границе ОДР, чаще всего – в угловой точке.

Пример 2.4. Построим линию уровня для задачи про шкафы и тумбы. Для этого зададим произвольное значение целевой функции (прибыли от производства шкафов и тумб), например, равное 10 000. Такому значению прибыли соответствует прямая (IV), уравнение которой приведенно ниже:

$$200x_1 + 100x_2 = 10\,000.$$

Если взять любую точку на этой прямой и ее координаты подставить в целевую функцию, то значение целевой функции будет равно 10 000. Упростим уравнение прямой, разделив обе его части на 100 ($2x_1 + x_2 = 100$), и построим линию уровня по двум точкам (0; 100) и (50; 0) (рис. 2.2).

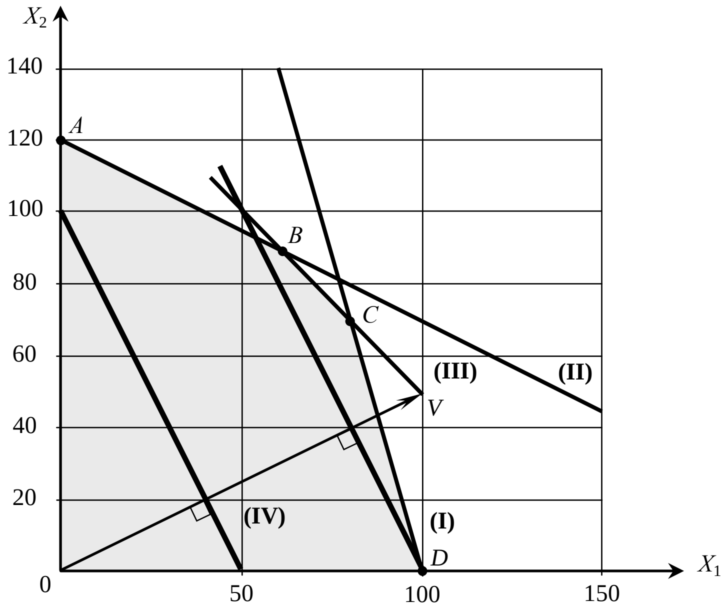


Рис. 2.2. **Определение оптимального плана графическим методом**

Если задать другое значение прибыли, то получим линию уровня, которая параллельна построенной. Например, задав значение 20000, получим прямую $2x_1 + x_2 = 200$. Эти прямые параллельны, так как имеют одинаковые коэффициенты при переменных x_1 и x_2.

Вектор-градиент целевой функции данной задачи имеет координаты $\nabla = (200; 100)$. Можно для удобства рассмотреть другой вектор, имеющий такое же направление, если разделить координаты вектора-градиента на одно и то же число (например, на 2). Получим вектор $V = (100; 50)$. Построим этот вектор на графике.

Если перемещать линию уровня (IV) в направлении вектора-градиента, то значение целевой функции (прибыль от продажи шкафов и тумб) будет возрастать. Последней точкой ОДР, которой коснется линия уровня, является точка *C*. Из всех планов задачи именно в ней достигается максимальное значение целевой функции, т. е. точка *C* является оптимальным планом.

Найдем координаты точки *C*, которая образована пересечением прямых (I) и (III). Для этого решим систему, составленную из соответствующих уравнений прямых:

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 = 350; & \text{(I)} \\ x_1 + x_2 = 150. & \text{(III)} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1^* = 80; \\ x_2^* = 70. \end{cases}$$

Примечание. Оптимальное значение переменных обозначается надстрочным знаком «*».

Оптимальное значение целевой функции в точке (80; 70) равно

$$F^* = 200 \cdot 80 + 100 \cdot 70 = 23\,000.$$

Таким образом, графическим методом был найден оптимальный план производства шкафов и тумб: 80 шкафов и 70 тумб. Прибыль при этом будет максимально возможной и составит 23 000 усл. ед.

Порядок решения ЗЛП графическим методом следующий:

1. Построить область допустимых решений.
2. Построить линию уровня целевой функции. Осуществить параллельное перемещение линии уровня в направлении вектора-градиента (в случае решения задачи на минимум линию следует пе-

ремещать в направлении, противоположном вектору-градиенту). Определить оптимальную точку как последнюю точку ОДР, которой коснется линия уровня.

3. Вычислить координаты оптимальной точки (решить систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными).

При решении задачи линейного программирования графическим методом возможны следующие случаи:

1. ОДР задачи – пустое множество. Такая задача не имеет допустимых решений, так как ее система ограничений противоречива.

Например, на рис 2.3 показана попытка построить ОДР следующей задачи:

$$x_1 + x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 20; \\ 2x_1 + x_2 \ge 20; \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

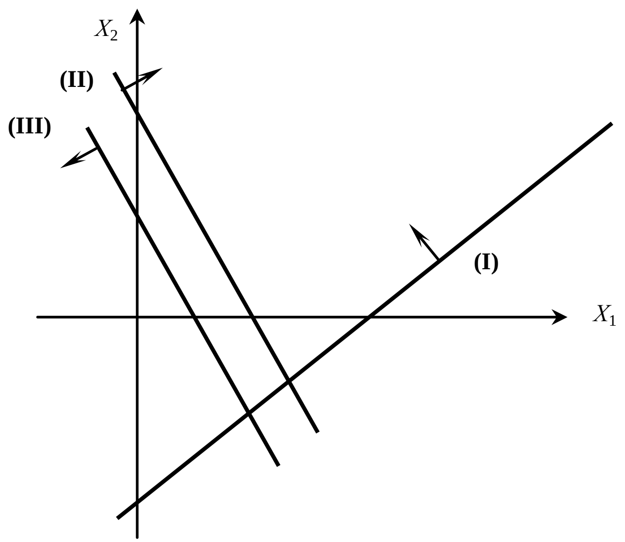


Рис. 2.3. **Область допустимых решений является пустым множеством**

2. ОДР задачи неограничена в направлении возрастания или убывания целевой функции. Задача имеет допустимые, но не имеет опти-

мального решения.

Приведем пример решения для следующей задачи с неограниченной ОДР (рис. 2.4):

$$F = x_1 + x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 20; & \text{(I)} \\ 2x_1 + x_2 \ge 20; & \text{(II)} \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

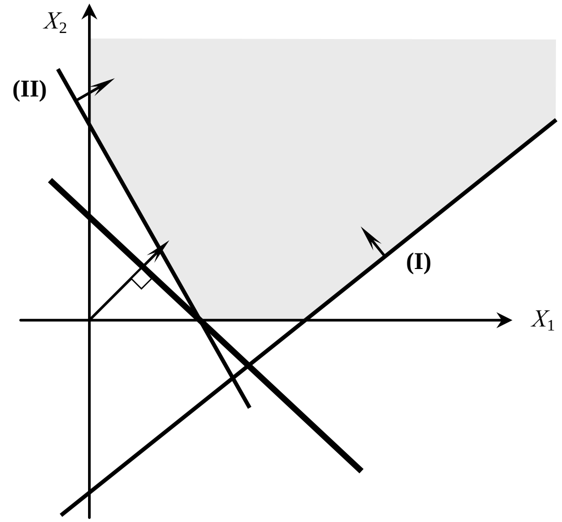


Рис. 2.4. **Область допустимых решений неограничена в направлении возрастания целевой функции**

3. Линия уровня при перемещении совпадает с ребром ОДР. Множество решений задачи бесконечно. Решением является любая точка указанного ребра.

Например, на рис. 2.5 приведено решение следующей задачи:

$$F = x_1 + x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 20; & \text{(I)} \\ 2x_1 + x_2 \ge 20; & \text{(II)} \\ x_1 + x_2 \le 30; & \text{(III)} \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оптимальным решением является любая точка отрезка [AB].

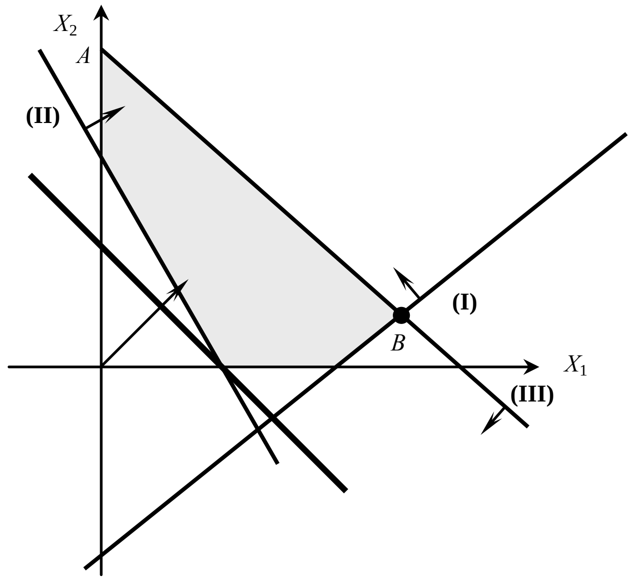


Рис. 2.5. **Бесконечное множество оптимальных планов**

2.4. Решение задач линейного программирования с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel

Надстройка *Поиск решения* пакета MS Excel предназначена для решения задачи оптимизации целевой функции при наличии ограничений [2], [13], [1]. Это средство позволяет решать как линейные, так и нелинейные задачи с количеством переменных до 200 и дает возможность представить результаты решения в виде отчетов разных типов, которые содержат дополнительную информацию о решении задачи.

Исходные данные для надстройки *Поиск решения* должны быть представлены в виде таблицы, которая содержит формулы вычисления целевой функции, левых и правых частей ограничений. Ячейки, которые отведены под значения переменных, называются *изменяемыми*. В них должны быть введены начальные приближения для переменных (например, нулевые). Когда надстройка *Поиск решения* закончит вычисления, в эти ячейки будут записаны найденные оптимальные значения переменных.

Ячейка, которая содержит формулу вычисления значения целевой функции, называется *целевой*.

Рассмотрим процесс решения на примере задачи планирования производства шкафов и тумб (см. п. 2.2, пример 2.1), математическая модель которой имеет следующий вид:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \\ x_1,\ x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

Решение данной задачи с помощью надстройки *Поиск решения* включает следующие шаги:

1 шаг. Подготовка исходных данных задачи на листе Excel. Пример оформления листа Excel с исходными данными показан на рис. 2.6.

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	0	0		
4	Ограничения			
5	Коэффициенты		Левая часть (Расход)	Правая часть (Запасы)
6	3,5	1	=$A$3*A6+$B$3*B6	350
7	1	2	=$A$3*A7+$B$3*B7	240
8	1	1	=$A$3*A8+$B$3*B8	150
9	Целевая функция			
10	Коэффициенты			
11	200	100		
12	Значение			
13	=A3*A11+B3*B11			

Рис. 2.6. **Лист Excel с исходными данными и формулами для решения задачи с помощью надстройки *Поиск решения***

Изменяемыми ячейками будут ячейки A3 и B3, которые отведены под значения переменных. В них введены начальные значения переменных (нулевые).

В ячейки C6:C8 введены формулы вычисления левых частей ограничений (расход ресурса каждого вида). При большом числе переменных эти формулы удобно задавать с помощью стандартной функции Excel СУММПРОИЗВ(). Для облегчения ее ввода применяется мастер функций, вызываемый кнопкой f_x. Данная функция относится к категории *Математические*. Например, формула в ячейке C6 может быть записана в виде СУММПРОИЗВ($A$3:$B$3;A6:B6). Затем формулу ячейки C6 можно скопировать методом автозаполнения в ячейки C7 и C8.

Целевой ячейкой будет являться ячейка A13, которая содержит формулу вычисления значения целевой функции (т. е. прибыли от продажи шкафов и тумб).

2 шаг. Вызов надстройки *Поиск решения* выполняется командой *Сервис/Поиск решения.* Если этого пункта нет в меню, то следует загрузить надстройку командой *Сервис/Надстройки* и в окне диалога установить флажок в строке *Поиск решения*.

3 шаг. Задание условий поиска. В окне *Поиск решения* следует указать, какая ячейка является целевой, в каких ячейках *Поиск решения* должен подобрать значения (изменяемые ячейки), а также задать ограничения задачи. Пример заполнения полей окна *Поиск решения* показан на рис. 2.7.

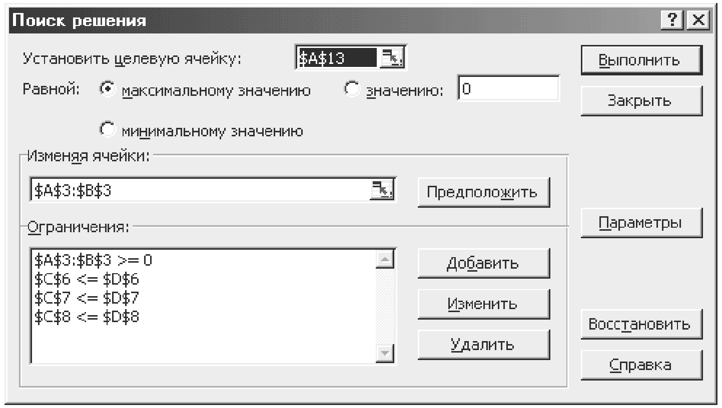


Рис. 2.7. **Окно *Поиск решения* для задачи планирования производства шкафов и тумб**

Для ввода ограничений нужно нажать кнопку *Добавить*. Появится окно *Добавление ограничения* (рис. 2.8).

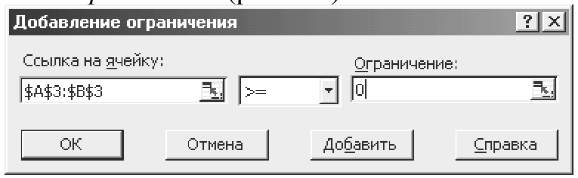


Рис. 2.8. **Окно *Добавление ограничения***

В поле *Ссылка на ячейку* указывается ячейка, содержащая левую часть ограничения. Затем из раскрывающегося списка можно выбрать знак ограничения. В поле *Ограничение* указывается ячейка, содержащая правую часть ограничения или его числовое значение. Для ввода ограничения целочисленности нужно выбрать из раскрывающегося списка знака слово *цел* (нельзя с клавиатуры вводить слово *целое* в поле *Ограничение*, оно появляется там автоматически). После ввода первого ограничения следует нажать кнопку *Добавить*, так как ввод еще не закончен. После ввода последнего ограничения нужно нажать кнопку *ОК* и вернуться в окно *Поиск решения*.

Поскольку все ограничения по ресурсам имеют одинаковый знак, то их можно задать одновременно: C6:C8<=D6:D8. Ограничения неотрицательности также можно задать для обеих переменных сразу: A3:B3>=0.

С помощью кнопок *Добавить, Изменить, Удалить* в окне *Поиск решения* можно редактировать введенное ограничение.

4 шаг. Установка параметров поиска. Нажав кнопку *Параметры*, нужно установить параметры алгоритма поиска в окне *Параметры поиска решения* (рис. 2.9).

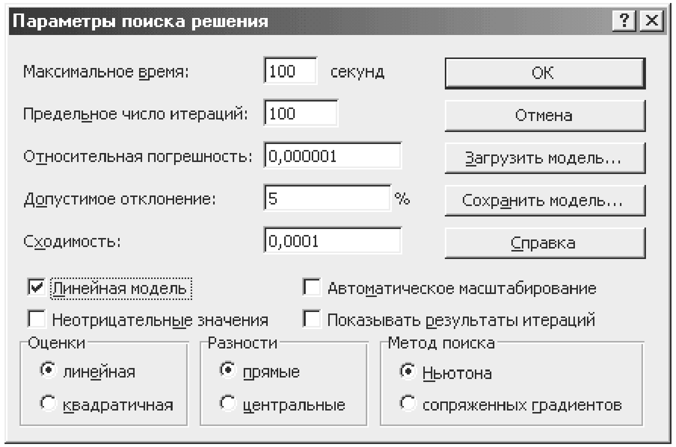


Рис. 2.9. **Окно *Параметры поиска решения***

Назовем следующие элементы этого окна:

- поле *Максимальное время* служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи;
- поле *Предельное число итераций* ограничивает число промежуточных вычислений;
- поля *Относительная погрешность* и *Допустимое отклонение* служат для задания точности, с которой ищется решение. Рекомендуется найти решение с величинами данных параметров, заданными по умолчанию, а затем повторить вычисления с меньшей погрешностью и допустимым отклонением;
- флажок *Линейная модель* должен быть установлен в случае линейной задачи, а в случае нелинейной – снят;
- флажок *Показывать результаты итераций* служит для приостановки поиска решения и просмотра результатов промежуточных вычислений;
- флажок *Автоматическое масштабирование* служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине. Например, при максимизации прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей.

Кроме того, имеются несколько переключателей, конкретизирующих метод решения задачи.

В данном примере следует установить только флажок *Линейная модель*, а все остальные параметры оставить по умолчанию.

5 шаг. Запуск процесса решения осуществляется нажатием кнопки *Выполнить*. В процессе поиска его отдельные шаги будут отображаться в строке состояния. По окончании поиска на экране появится окно *Результаты поиска решения* (рис. 2.10). В этом окне возможны следующие сообщения:

- «*Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены*». Это означает, что задача успешно решена.
- «*Значения целевой ячейки не сходятся*». Это означает, что ОДР неограничена в направлении возрастания или убывания целевой функции. Эта ситуация соответствует случаю 2 решения задачи графическим методом (см. п. 2.3, с. 24). Следует пересмотреть математическую модель задачи и добавить ограничения.
- «*Поиск не может найти подходящего решения*». Это означает, что ОДР задачи представляет собой пустое множество, система ограничений противоречива. Эта ситуация соответствует случаю 1 решения задачи графическим методом (см. п. 2.3, с. 24). Следует проверить систему ограничений.
- «*Условия линейной модели не выполняются*». Надстройка *Поиск решения* требует, чтобы для линейной задачи все переменные были в левой части, а константы – в правой. Данное сообщение возникает при нарушении этого условия.

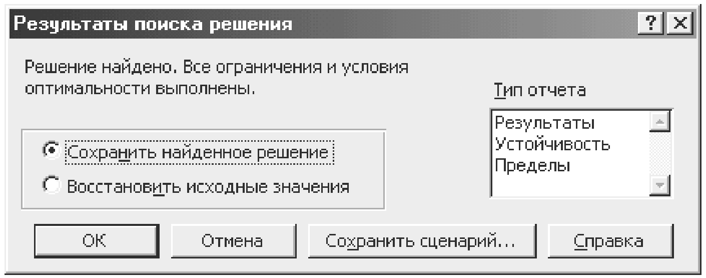


Рис. 2.10. **Окно *Результаты поиска решения***

Если безымянный переключатель в окне *Результаты поиска решения* стоит в положении *Сохранить найденное решение*, то после нажатия кнопки *ОК* в ячейки таблицы будут записаны результаты решения. В случае имеющихся ошибок нужно установить этот переключатель в положение *Восстановить исходные значения* и исправить ошибки.

6 шаг. Интерпретация результатов решения. Лист Excel с результатами решения показан на рис. 2.11.

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	80	70		
4		Ограничения		
5	Коэффициенты		Левая часть (Расход)	Правая часть (Запасы)
6	3,5	1	350	350
7	1	2	220	240
8	1	1	150	150
9	Целевая функция			
10	Коэффициенты			
11	200	100		
12	Значение			
13	23000			

Рис. 2.11. **Результаты решения задачи планирования производства шкафов и тумб**

На рис. 2.11 видно, что оптимальные значения переменных x_1 и x_2 равны 80 и 70, а соответствующее значение целевой функции – 23 000, т. е. следует производить 80 шкафов и 70 тумб, при этом общая прибыль составит 23 000 р. Левые части ограничений представляют собой расход ресурса каждого вида при оптимальном плане производства. Анализ этих данных показывает, что ДСП и трудовые ресурсы будут израсходованы полностью, а стекла останется 20 м^2 (240 – 220).

2.5. Анализ устойчивости оптимального решения

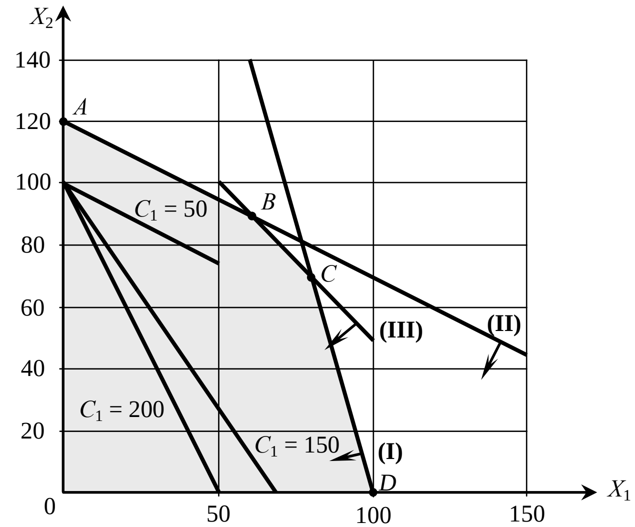
Исследовать устойчивость оптимального решения означает определить диапазон изменения параметров задачи, при котором либо сам оптимальный план, либо структура решения остается неизменной. Рассмотрим устойчивость задачи линейного программирования при изменении таких параметров, как коэффициенты в целевой функции $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и правые части ограничений $b_1, b_2, \ldots, b_m$ [2], [4]. Данные об устойчивости можно найти в отчете по устойчивости, который генерирует надстройка *Поиск решения*. Для этого нужно в окне *Результаты поиска решения* выбрать тип отчета *Устойчивость*. После нажатия кнопки *OK* будет сформирован отчет по устойчивости на отдельном листе.

Исследование устойчивости рассмотрим на примере задачи планирования производства шкафов и тумб, математическая модель которой построена в примере 2.1[2] (см. п. 2.2, с. 15):

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим *устойчивость решения при изменении коэффициентов целевой функции* (C_1, C_2, …, C_n). Будем изменять прибыль от продажи одного шкафа, задавая ее равной 200, 150 и 50 усл. ед. При этом ОДР остается постоянной, а изменяется наклон линии уровня целевой функции. Построим линии уровня, соответствующие этим трем случаям, как показано на рис. 2.12.



[2] Для задач с целочисленными ограничениями невозможно получить отчет по устойчивости, поэтому опустим ограничения целочисленности, как и в примере решения этой задачи графическим методом.

Рис. 2.12. **Графическая интерпретация изменения коэффициента целевой функции**

При C_1 = 200 линия уровня $200x_1 + 100x_2 = 10000$ проходит через точки (0; 100) и (50; 0).

При C_1 = 150 линия уровня $150x_1 + 100x_2 = 10000$ проходит через точки (0; 100) и (67; 0).

При C_1 = 50 линия уровня $50x_1 + 100x_2 = 10000$ проходит через точки (0; 100) и (50; 75).

Как при C_1 = 200, так и при C_1 = 150, оптимальным решением является точка *C*. При C_1 = 50 оптимальным решением будет точка *B*.

Таким образом, существует определенный интервал изменения целевых коэффициентов, в котором оптимальный план не изменяется. При выходе за границы этого интервала (как в случае C_1 = 50) оптимальный план переходит в другую угловую точку ОДР. Точные границы этого интервала даны в таблице «Изменяемые ячейки» отчета по устойчивости (рис. 2.13).

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 22.06.2006 20:39:47

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результат. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
\$A\$3	x1	80	0	200	150	100
\$B\$3	x2	70	0	100	100	42,85714286

Ограничения

Ячейка	Имя	Результат. значение	Теневая цена	Ограничение правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
\$C\$6	Левая часть	350	40	350	175	50
\$C\$7	Левая часть	220	0	240	1E+30	20
\$C\$8	Левая часть	150	60	150	8,333333333	50

Рис. 2.13. **Отчет по устойчивости для задачи планирования производства шкафов и тумб**

Из отчета видно, что оптимальный план задачи не изменится, если коэффициент C_1 будет находиться в следующих пределах:

$$200 - 100 \le C_1 \le 200 + 150 \quad \leftrightarrow \quad 100 \le C_1 \le 350.$$

Также оптимальный план не изменится, если прибыль от одной тумбы (коэффициент C_2) будет удовлетворять нижеприведенным условиям:

$$100 - 42{,}86 \le C_2 \le 100 + 100 \quad \leftrightarrow \quad 57{,}14 \le C_2 \le 200.$$

Изменение плана производства продукции требует материальных затрат (перенастройка оборудования, переделка документации, изменение договоров на сбыт продукции и т. д.). Поэтому важно быть уверенными, что колебания цены на продукцию, а, следовательно, и прибыли от единицы продукции, не приведут к изменению оптимального плана производства. В данной задаче такая уверенность имеется, так как интервал устойчивости при изменении коэффициентов в целевой функции является достаточно широким.

Рассмотрим *устойчивость решения при изменении правых частей ограничений* (b_1, b_2, …, b_m). Будем изменять правую часть первого ограничения (запас ДСП), задавая его равным 350, 400, 180 м^2. Граница полуплоскости, соответствующей этому ограничению, будет сдвигаться в ту или другую сторону, как это показано на рис. 2.14.

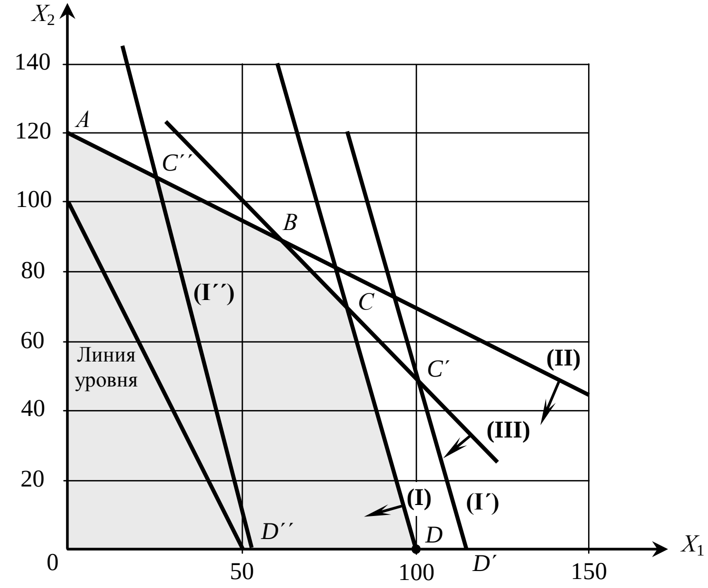


Рис. 2.14. **Графическая иллюстрация изменения правой части первого ограничения**

При $b_1 = 350$ уравнение прямой (I), ограничивающей первую полуплоскость, имеет вид: $3{,}5x_1 + x_2 = 350$ и проходит через точки (100; 0) и (60; 140).

При $b_1 = 400$ уравнение прямой (I′), ограничивающей первую полуплоскость, имеет вид: $3{,}5x_1 + x_2 = 400$ и проходит через точки (100; 50) и (114; 0).

При $b_1 = 180$ уравнение прямой (I′′), ограничивающей первую полуплоскость, имеет вид: $3{,}5x_1 + x_2 = 180$ и проходит через точки (30; 75) и (51; 0).

Прямые (I), (I′) и (I′′) параллельны друг другу.

Область допустимых решений в первом случае – это многоугольник $0ABCD$. Оптимальной точкой является точка C. Она образована пересечением прямых, соответствующих (I) и (III) ограничениям.

В случае запаса ДСП, равного 400 м^2, областью допустимых решений будет являться многоугольник $0ABC'D'$. Поскольку здесь не рассматривается одновременное изменение всех параметров, можно считать, что линия уровня остается неизменной. Последней точкой ОДР, которой она коснется при параллельном перемещении в направлении вектора-градиента, будет точка C', т. е. оптимальный план при запасе ДСП, равном 400 м^2, находится в точке C'. Эта точка также образована пересечением прямых, соответствующих (I) и (III) ограничениям.

В третьем случае (запас ДСП, равный 180 м^2) областью допустимых решений является многоугольник $0AC''D''$. Оптимальная точка – это точка C'', образованная пересечением прямых, соответствующих (I) и (II) ограничениям.

Очевидно, что оптимальный план во всех трех случаях отличается, поскольку точки C, C' и C'' имеют различные координаты. Однако при изменении запаса ДСП до 400 м^2 структура решения не нарушается: точка C', как и точка C, образована пересечением прямых, соответствующих (I) и (III) ограничениям. С точки зрения экономического смысла задачи про шкафы и тумбы это означает, что для оптимального решения в обоих случаях ДСП и трудовые ресурсы израсходованы полностью, а стекло имеется в остатке. В случае запаса ДСП, равного 180 м^2, оптимальная точка C'' образована пересечением (I) и (II) прямых, т. е. структура решения изменилась. Теперь уже полностью израсходованы ДСП и стекло, а трудовые ресурсы имеются в остатке.

Таким образом, при изменении правых частей ограничений задачи линейного программирования оптимальное решение всегда изменяется. Однако при этом существуют пределы их изменения, при которых структура решения остается прежней. Под *структурой решения* понимается результат удовлетворения условий ограничений, а именно: какие ограничения в оптимальном решении выполняются в виде равенства, а какие – в виде строгого неравенства. Пределы устойчивости при изменении правых частей ограничений приведены в таблице «Ограничения» отчета по устойчивости (рис. 2.13).

Из отчета видно, что структура решения не изменится, если запас ДСП находится в следующих пределах:

$$350 - 50 \le b_1 \le 350 + 175 \quad \leftrightarrow \quad 300 \le b_1 \le 525.$$

Также останется постоянной структура решения при изменении запасов стекла в следующих пределах (величина 1E+30 означает очень большое число, т. е. фактически заменяет собой бесконечность):

$$240 - 20 \le b_2 \le 240 + \infty \quad \leftrightarrow \quad 220 \le b_2 .$$

В интервале устойчивости для b_2 нет ограничения сверху, поскольку стекло в оптимальном решении имеется в остатке. Дополнительное увеличение количества стекла не может привести к изменению оптимального плана, а только к увеличению остатка этого ресурса.

Для трудовых ресурсов интервал устойчивости имеет следующий вид:

$$150 - 50 \le b_3 \le 150 + 8{,}33 \quad \leftrightarrow \quad 100 \le b_3 \le 158{,}33 .$$

2.6. Анализ отчетов Excel на примере задачи планирования производства продукции

2.6.1. Постановка задачи

Для производства продукции n типов требуются ресурсы m видов. Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции каждого типа заданы матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$, где a_{ij} – количество ресурса i-го вида, необходимое для производства единицы продукции j-го типа. Известно количество ресурсов b_i (где $i = \overline{1, m}$) каждого вида, которое имеется в наличии у предприятия. Известны также величины прибыли C_j (где $j = \overline{1, n}$), которую получит предприятие при реализации единицы продукции j-го типа. Требуется найти оптимальный план производства продукции, т. е. количество продукции каждого типа, которое нужно произвести, чтобы получить наибольшую прибыль. Условие задачи можно представить в виде табл. 2.3.

Таблица 2.3. **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	Продукция				Наличие ресурсов
	тип 1	тип 2	…	тип n	
Ресурс 1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
Ресурс 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	...
Ресурс m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибыль	C_1	C_2	…	C_n	

Обозначим через x_j – количество продукции j-го типа, которое планируется выпустить ($j = \overline{1, n}$). Тогда математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2.8}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{2.9}$$

Целевая функция (2.7) этой задачи представляет собой общую прибыль от производства всей продукции. Ограничения (2.8) выражают условие того, что потребление ресурса i-го вида не должно превышать запаса этого ресурса. Условия неотрицательности переменных (2.9) вытекают из смысла переменной x_j: количество продукции не может быть отрицательным.

2.6.2. Каноническая форма записи задачи линейного программирования

Канонической называется форма записи ЗЛП, в которой целевая функция стремится к максимуму, все ограничении имеют вид равенства и на все переменные наложено условие неотрицательности.

Чтобы привести к каноническому виду задачу с ограничениями-неравенствами, вводят дополнительные переменные. Причем если неравенство имеет вид «меньше или равно» (≤), то дополнительную переменную прибавляют к левой части ограничения, а если вид «больше или равно» (≥), то дополнительную переменную вычитают из его левой части. В целевую функцию дополнительные переменные вводят с коэффициентами, равными 0.

Таким образом, модель задачи (2.7) – (2.9) может быть записана в следующей канонической форме:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \rightarrow max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{2.10}$$

$$y_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}).$$

Дополнительные переменные y_i представляют собой *остатки ресурсов каждого вида.* Если в оптимальном решении какой-либо ресурс будет использован полностью, то ограничение исходной задачи (2.8) будет выполнено в виде равенства $y_i = 0$. Такое ограничение в отчетах Excel называется *связанным*. Ресурс, который использован полностью, считается *дефицитным*.

2.6.3. Двойственность в линейном программировании

Согласно теории двойственности [4], [8], [13], каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие двойственную задачу. В табл. 2.4 приведена двойственная задача к рассматриваемой задаче планирования производства продукции.

Таблица 2.4. **Исходная и двойственная задачи**

Исходная задача	Двойственная задача

$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max$	$F_Д = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$	(2.11)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m})$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge C_j \ \ (j = \overline{1, n})$	(2.12)
$x_j \ge 0 \ \ \ (j = \overline{1, n})$	$z_i \ge 0 \ \ \ (i = \overline{1, m})$	(2.13)

Рассмотрим *экономический смысл двойственной задачи*. Допустим, что у предприятия есть возможность реализации всех ресурсов некоторой организации вместо того, чтобы организовывать свое производство. Необходимо установить прикидочные цены на ресурсы. Пусть z_i – это цена единицы ресурса i-го вида (где $i = \overline{1, m}$). Эти цены должны быть установлены исходя из несовпадающих интересов предприятия и покупающей организации.

Общую стоимость ресурсов ($F_Д$) покупающая организация стремится уменьшить. Это можно выразить следующей формулой:

$$F_Д = b_1z_1 + b_2z_2 + \ldots + b_mz_m \to min,$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – соответственно, количество ресурсов 1, 2, …, m;
$z_1, z_2, \ldots, z_m$ – соответственно, цена ресурсов 1, 2, …, m;
$b_1z_1, b_2z_2, \ldots, b_mz_m$ – соответственно, стоимость ресурсов 1, 2, …, m.

Предприятие согласно продать ресурсы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той суммы, которую могло бы получить, организовав собственное производство. Таким образом, предприятие откажется от выпуска изделий j-го типа, если стоимость всех ресурсов, которые идут на производство одного изделия j-го типа, будет больше или равна прибыли за одну единицу изделия j-го типа. Это можно представить в виде следующего неравенства:

$$a_{1j}z_1 + a_{2j}z_2 + \ldots + a_{mj}z_m \ge C_j, \ (j = \overline{1, n}),$$

где $a_{1j}z_1, a_{2j}z_2, \ldots, a_{mj}z_m$ – стоимость ресурсов, которые необходимы для производства единицы изделия j-го типа;
C_j – прибыль на одно издение j-го типа.

По смыслу цена неотрицательна, поэтому в двойственную задачу включаются ограничения неотрицательности.

В отчетах Excel, получаемых с помощью надстройки *Поиск решения*, оптимальное значение двойственной переменной z_i^* называется *теневой ценой*. Теневая цена есть оценка значимости ресурса, вытекающая из конкретных условий задачи, а не реальная цена на рынке.

2.6.4. Первая теорема двойственности

Если существует единственное решение исходной задачи, то существует и единственное решение двойственной задачи, причем значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$$max\ F = min\ F_Д.$$

Это означает, что предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану X^* и получить максимальную прибыль, либо продать ресурсы по оптимальным ценам Z^* и получить такую же сумму. Для всех других (неоптимальных) планов X и Z прибыль от выпуска продукции всегда меньше внутренней стоимости затраченных ресурсов: $F < F_Д$, а величина $F_Д - F$ характеризует производственные потери.

Следствие (теорема об оценках). Двойственная оценка z_i^* (теневая цена) показывает, как изменится целевая функция исходной задачи при изменении ресурса b_i на единицу:

$$\Delta F = \Delta b_i z_i^*.$$

Доказательство

Пусть имеются в наличии ресурсы b_1, b_2, …, b_m. Обозначим величиной F_1 оптимальное значение целевой функции исходной задачи при таком наличии ресурсов. Тогда согласно первой теореме двойственности

$$F_1 = maxF = minF_Д = b_1 z_1^* + b_2 z_2^* + \ldots + b_m z_m^*.$$

Пусть количество второго ресурса получило приращение $b_2 = b_2 + \Delta b_2$. Если при этом оптимальное решение двойственной задачи не изменится, то значение целевой функции исходной задачи (F_2) будет выражено следующим образом:

$$F_2 = maxF = minF_Д = b_1 z_1^* + (b_2 + \Delta b_2) z_2^* + \ldots + b_m z_m^* =$$

$$= b_1 z_1^* + b_2 z_2^* + \ldots + b_m z_m^* + \Delta b_2 z_2^* = F_1 + \Delta b_2 z_2^*.$$

Следовательно, целевая функция получила приращение

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \Delta b_2 z_2^*.$$

Таким образом, по теневым ценам можно судить о том, насколько целесообразно изыскивать резервы для увеличения количества i-го ресурса. Если соответствующая теневая цена равна нулю, то увеличение количества этого ресурса никак не повлияет на рост прибыли. С другой стороны, чем больше теневая цена ресурса, тем больше возрастет прибыль при увеличении количества этого ресурса на одну единицу. Поэтому тот ресурс, который имеет большую теневую цену, считается *более дефицитным*.

Однако эта теорема справедлива только в том случае, если при изменении количества ресурса b_i значения переменных z_i^* в оптимальном плане двойственной задачи остаются неизменными. Это выполняется в пределах устойчивости оптимального решения, т. е., когда структура решения не изменяется. Пределы устойчивости при изменении правых частей ограничений указаны в таблице «Ограничения» отчета по устойчивости (рис. 2.13).

2.6.5. Понятие нормированной стоимости

Ограничения двойственной задачи можно также привести к виду равенства путем вычитания из левой части дополнительной переменной:

$$F_Д = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i - v_j = C_j \quad (j = \overline{1, n}), \tag{2.14}$$

$$z_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$v_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Экономический смысл дополнительной двойственной переменной

v_j – это потери при производстве единицы изделия j-го типа. В самом деле, дополнительная двойственная переменная v_j может быть представлена в виде следующего равенства:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i - C_j,$$

где $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i$ – стоимость всех ресурсов, которые идут на производство единицы продукции j-го типа;

C_j – прибыль от единицы продукции j-го типа.

Таким образом, v_j – это разница между той суммой, что могло бы получить предприятие, продавая ресурсы, и прибылью, которая будет получена, если из этих ресурсов произвести продукцию.

При $v_j = 0$, когда оценка затрат ресурсов равна прибыли, потерь при производстве нет и продукция является выгодной.

При $v_j > 0$, когда оценка затрат ресурсов больше прибыли от единицы продукции, производить этот вид продукции невыгодно.

В отчетах Excel оптимальное значение дополнительной двойственной переменной v_j^* называется *нормированной стоимостью*.

Нормированная стоимость также показывает, насколько уменьшится целевая функция при принудительном выпуске единицы продукции соответствующего типа.

Пусть, например, продукция j-го вида не вошла в оптимальный план производства ($x_j^* = 0$). Однако существует некоторое плановое задание, предписывающее выпуск этого вида продукции в количестве T_j единиц. Тогда при выпуске этого невыгодного вида продукции будут задействованы ресурсы, и выгодной продукции будет выпущено меньше. Целевая функция (общая прибыль) уменьшится, причем это уменьшение можно количественно измерить, применив следующее равенство:

$$\Delta F = T_j v_j^*.$$

Следует отметить, что это равенство справедливо только в том случае, когда плановое задание (T_j) не нарушает номенклатуру остальных выпускаемых изделий, т. е. кроме «принудительного» j-го изделия, ассортимент остальных выпускаемых выгодных изделий не изменится, а изменится только их количество. Определить предельную величину T_j, при которой равенство справедливо, можно путем экспериментов на модели.

2.6.6. Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости)

Оптимальные решения исходной и двойственной задач связаны следующими соотношениями:

$$z_i^* y_i^* = 0 \quad (i = \overline{1, m});$$

$$v_j^* x_j^* = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Между переменными исходной и двойственной задач существует взаимосвязь, которая заключается в том, что одна переменная из пары должна быть нулевой.

Рассмотрим связь y_i^* (остаток ресурса i-го вида) и z_i^* (теневая цена ресурса i-го вида).

Если $y_i^* = 0$, то i-й ресурс использован полностью. При его увеличении мы сможем произвести больше продукции и получить большую прибыль. Поскольку теневая цена показывает, насколько возрастает прибыль, она должна быть положительной ($z_i^* > 0$).

Если же $y_i^* > 0$, то имеется остаток ресурса i-го вида, т. е. ресурс недефицитен. Увеличение количества этого ресурса не вызовет увеличения прибыли, увеличится только его остаток. Поэтому соответствующая теневая цена должна быть равна нулю ($z_i^* = 0$).

Рассмотрим связь x_j^* (оптимальный объем производства продукции j-го типа) и v_j^* (потери при производстве единицы продукции j-го типа).

Если $x_j^* = 0$, т. е. продукция j-го типа не вошла в оптимальный план производства, то это произошло потому, что этот вид продукции убыточен ($v_j^* > 0$).

Если же $x_j^* > 0$, т. е. согласно оптимальному плану этот вид продукции должен быть произведен в каком-то количестве, он является выгодным. Поэтому соответствующие потери равны нулю ($v_j^* = 0$).

2.6.7. Пример анализа отчетов для задачи планирования производства продукции

Постановка задачи. Для производства продукции четырех типов (Прод1, Прод2, Прод3 и Прод4) требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Нормы расхода ресурсов и другие исходные данные приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5. **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Наличие ресурса
Трудовые, чел.-ч	1	1	1	1	16
Сырье, кг	6	5	4	3	110
Финансы, тыс. р.	4	6	10	13	100
Прибыль, усл. ед.	60	70	120	130	

Необходимо найти оптимальный план производства продукции, а также дать ответы на следующие вопросы:

1. Какие типы продукции вошли в оптимальный план производства? Какова максимальная прибыль?
2. Какие ресурсы при этом израсходованы полностью, а какие нет?
3. Какая продукция является выгодной, а какая нет? Какая продукция является наиболее невыгодной? Как изменится общая прибыль, если придется выпускать 1 или 3 единицы этой продукции?
4. Какой ресурс является наиболее дефицитным? Насколько увеличится общая прибыль, если количество наиболее дефицитного ресурса увеличить на 1 или 3 и 5 единиц?
5. Проверьте выполнение второй теоремы двойственности.
6. Каковы пределы устойчивости оптимального решения?

Решение

Составим математическую модель задачи. Пусть x_j – количество выпускаемой продукции j-го типа ($j = \overline{1, 4}$). Тогда, согласно формулам (2.7) – (2.9), получаем следующее:

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, 4}). \end{cases} \qquad (2.15)$$

Целевая функция представляет собой общую прибыль от производства продукции. Ограничения отражают конечность запасов ресурсов на предприятии. Неотрицательность переменных следует из их смысла.

Приведем исходную задачу к *канонической форме*:

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \quad y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

Дополнительные переменные y_i есть остатки ресурсов каждого вида, т. е. y_1 – это остаток трудовых ресурсов, y_2 – остаток сырья, а y_3 – остаток финансов.

Составим *двойственную задачу* к (2.15), используя формулы (2.11) – (2.13):

$$F_Д = 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \to min;$$

$$\begin{cases} z_1 + 6z_2 + 4z_3 \geq 60; \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 \geq 70; \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 \geq 120; \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 \geq 130; \\ z_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \end{cases}$$

Двойственная переменная z_i – это цена единицы ресурса i-го вида (оценка важности ресурса).

В двойственной задаче приведем ограничения к виду равенства, вычитая из левых частей ограничений дополнительные переменные:

$$F_Д = 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} z_1 + 6z_2 + 4z_3 - v_1 = 60; \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 - v_2 = 70; \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 - v_3 = 120; \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 - v_4 = 130; \\ z_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,\ 3}), \quad v_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,\ 4}). \end{cases}$$

Дополнительные двойственные переменные v_j есть потери при производстве единицы продукции j-го типа.

Решим задачу с помощью надстройки *Поиск решения.* В окне *Результаты поиска решения* выделим 3 вида отчетов, используя клавишу *Ctrl* на клавиатуре. Нажатие кнопки *ОК* приведет к созданию новых листов рабочей книги: «Отчет по результатам», «Отчет по устойчивости» и «Отчет по пределам». Содержимое отчетов показано на рисунках (2.15) – (2.17).

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис. 2.15).

В таблице «Целевая ячейка» приводятся сведения о значении целевой функции. Для данного примера $F^* = 1320$ – это максимальное значение прибыли, которое может быть достигнуто.

Microsoft Excel 8.0а Отчет по результатам
Рабочий лист: [Пример2.xls]Лист1
Отчет создан: 05.06.02 17:17:25

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$F$5	Цель	0	1320

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$A$3	Прод1	0,00	10,00
$B$3	Прод2	0,00	0,00
$C$3	Прод3	0,00	6,00
$D$3	Прод4	0,00	0,00

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$8	Левая часть	16	$F$8<=$G$8	связанное	0
$F$9	Левая часть	84	$F$9<=$G$9	не связанное	26
$F$10	Левая часть	100	$F$10<=$G$10	связанное	0
$A$3	Прод1	10,00	$A$3>=0	не связанное	10,00
$B$3	Прод2	0,00	$B$3>=0	связанное	0,00
$C$3	Прод3	6,00	$C$3>=0	не связанное	6,00
$D$3	Прод4	0,00	$D$3>=0	связанное	0,00

Рис. 2.15. **Отчет по результатам**

В таблице «Изменяемые ячейки» представлены исходные и оптимальные значения переменных. Таким образом, для данного примера оптимальные значения переменных следующие: $x_1^* = 10$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 6$, $x_4^* = 0$. Это означает, что следует производить 10 единиц продукции первого типа и 6 единиц продукции третьего типа. Второй и четвертый типы продукции производить невыгодно.

Таблица «Ограничения» показывает результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий. В графе *Формула* приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно *Поиск решения*. В графе *Значение* находятся величины использованного ресурса, а в графе *Разница* показано количество неиспользованного ресурса (оптимальные значения дополнительных переменных y_i ($i = \overline{1, m}$)). Если ресурс используется полностью, то в графе *Статус* указывается *связанное*, в противном случае указывается *не связанное*. Для граничных условий вместо величины неиспользованного ресурса показана разность между оптимальным значением переменной и заданной для нее границей.

Таким образом, в примере дополнительные переменные имеют следующие оптимальные значения: $y_1^* = 0$, $y_2^* = 26$, $y_3^* = 0$. Это означает, что трудовые ресурсы и финансы использованы полностью, в остатке имеется 26 единиц сырья.

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис. 2.16).

Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Пример2.xls]Лист1
Отчет создан: 05.06.02 17:23:33

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$A$3	Прод1	10,00	0,00	60	40	12
$B$3	Прод2	0,00	–10,00	70	10	1E+30
$C$3	Прод3	6,00	0,00	120	30	13,33333333
$D$3	Прод4	0,00	–20,00	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение, правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$F$8	Левая часть	16	20	16	3,545454545	6
$F$9	Левая часть	84	0	110	1E+30	26
$F$10	Левая часть	100	10	100	60	36

Рис. 2.16. **Отчет по устойчивости**

В таблице «Изменяемые ячейки» приводится информация по следующим переменным:

- оптимальное значение переменных x_j^* ($j = \overline{1, n}$);
- соответствующие значения нормированной стоимости v_j^* ($j = \overline{1, n}$);
- коэффициенты в целевой функции при переменных C_j ($j = \overline{1, n}$);
- допустимые приращения коэффициентов целевой функции (ΔC_j^+ и ΔC_j^-), при которых не изменяется оптимальное решение.

Из рис. 2.16. видно, что оптимальные значения дополнительных двойственных переменных следующие: v_1^* = 0; v_2^* = 10; v_3^* = 0; v_4^* = 20. Таким образом, для продукции первого и третьего типа значение потерь при производстве равно нулю. Поскольку эта продукция вошла в оптимальный план ($x_1^* > 0$ и $x_3^* > 0$), то для нее очевидна справедливость второй теоремы двойственности. Второй и четвертый типы продукции имеют положительные потери при производстве (т. е. для предприятия выгоднее продавать ресурсы, а не готовую продукцию). Поэтому эта продукция не вошла в оптимальный план ($x_2^* = 0$ и $x_4^* = 0$), что также показывает справедливость второй теоремы двойственности.

Наиболее невыгодной в данном примере является продукция четвертого типа, так как ее нормированная стоимость наибольшая. При выпуске 1 единицы этой продукции общая прибыль уменьшается на 20 единиц. При выпуске 3-х единиц этой продукции уменьшение прибыли составит $\Delta F = 3v_4^* = 3 \cdot 20 = 60$ денежных единиц. Однако опытным путем можно установить, что при выпуске уже 4-х единиц этой продукции структура оптимального плана нарушается, и прямая пропорциональная зависимость перестает действовать.

В таблице «Ограничения» показаны аналогичные значения для следующих ограничений:

- величины использованных ресурсов;
- теневые цены для каждого ресурса z_i^* ($i = \overline{1, m}$);
- величины правых частей ограничений (запасы ресурсов) b_i $i = \overline{1, m}$;
- предельные приращения ресурсов Δb_1^+ и Δb_1^-, при которых сохраняется структура решения.

Таким образом, из второй таблицы отчета по устойчивости можно получить оптимальные значения двойственных переменных данного примера: $z_1^* = 20$, $z_2^* = 0$, $z_3^* = 10$. Для сырья, которое имеется в остатке ($y_2^* > 0$), теневая цена равна нулю. А для трудовых ресурсов и финансов, которые использованы полностью ($y_1^* = 0$ и $y_3^* = 0$), теневые цены положительны, т. е. соотношение $z_i^* y_i^* = 0$ второй теоремы двойственности выполняется.

Наиболее дефицитным видом ресурсов в данном примере являются трудовые ресурсы, поскольку их теневая цена наибольшая. Согласно теореме об оценках, если количество трудовых ресурсов увеличить на 1, то общая прибыль возрастет на $z_1^* = 20$ единиц. Увеличение трудовых ресурсов на 3 единицы дает увеличение прибыли на $\Delta F = 3z_1^* = 3 \cdot 20 = 60$ единиц, если структура решения при этом не изменится. Из отчета по устойчивости допустимое увеличение количества трудовых ресурсов – $\Delta b_1^+ = 3{,}55$, допустимое уменьшение – $\Delta b_1^- = 6$. Это означает, что структура решения не изменяется, если $16 - 6 \le b_1 \le 16 + 3{,}55$, т. е. $10 \le b_1 \le 19{,}55$.

Поэтому, если количество трудовых ресурсов возрастет на 5 единиц, теорема об оценках перестает действовать и без дополнительных исследований неизвестно изменение прибыли.

Из отчета по устойчивости можно получить следующие пределы изменения коэффициентов целевой функции (прибылей на единицу продукции), при которых не изменяется оптимальный план решения задачи:

$$60 - 12 \le C_1 \le 60 + 40 \quad \rightarrow \quad 48 \le C_1 \le 100;$$

$$C_2 \le 70 + 10 \quad \rightarrow \quad C_2 \le 80;$$

$$120 - 13{,}3 \le C_3 \le 120 + 30 \quad \rightarrow \quad 106{,}7 \le C_3 \le 150;$$

$$C_4 \le 130 + 20 \quad \rightarrow \quad C_4 \le 150.$$

Также можно получить пределы изменения правых частей ограничений (запасы ресурсов), при которых сохраняется структура решения:

$$16 - 6 \le b_1 \le 16 + 3{,}55 \quad \rightarrow \quad 10 \le b_1 \le 19{,}55;$$

$$110 - 26 \le b_2 \quad \rightarrow \quad 84 \le b_2;$$

$$100 - 36 \le b_3 \le 100 + 60 \quad \rightarrow \quad 64 \le b_3 \le 160.$$

Отчет по пределам (рис. 2.17) показывает, как может изменяться количество выпускаемой продукции в оптимальном плане производства при сохранении структуры решения. В отчете по пределам показаны значения целевой функции на нижнем и верхнем пределах для продукции, которая вошла в оптимальное решение.

Microsoft Excel 8.0a Отчет по пределам
Рабочий лист: [Пример2.xls]Лист1
Отчет создан: 05.06.02 17:24:15

Ячейка	Целевое имя	Значение
$F$5	Цель	1320

Ячейка	Изменяемое имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$A$3	Прод1	10,00	0,00	720,00	10,00	1320,00
$B$3	Прод2	0,00	0,00	1320,00	0,00	1320,00
$C$3	Прод3	6,00	0,00	600,00	6,00	1320,00
$D$3	Прод4	0,00	0,00	1320,00	0,00	1320,00

Рис. 2.17. **Отчет по пределам**

2.7. Задачи транспортного типа

2.7.1. Классическая транспортная задача в матричной постановке

Суть задачи – в определении наиболее выгодного плана перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пунктов отправления (производства или хранения) в пункты потребления. Она является частным случаем задачи линейного программирования [8], [13].

Постановка задачи. В m пунктах отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ сосредоточен однородный продукт в количествах, соответственно, $a_1, a_2, \dots, a_m$ единиц. Его необходимо доставить n потребителям в пункты $B_1, B_2, \dots, B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, b_2, \dots, b_n$ единиц. Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, которые равны C_{ij} ($i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$) и приведены в матрице тарифов перевозок $\left(C_{ij}\right)_{m \times n}$.

Требуется составить план перевозок, при котором весь продукт будет вывезен из пунктов отправления в пункты потребления в соответствии с потребностью, и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Условие транспортной задачи представлено в табл. 2.6.

Таблица 2.6. **Транспортная задача в матричной постановке**

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Составим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} – объем перевозок от поставщика i к потребителю j.

Таким образом, искомой является нижеприведенная матрица объемов перевозок, строки которой соответствуют поставщикам, а столбцы – потребителям:

$$\begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots\ x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22}\ \ldots\ x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}\ x_{m2}\ \ldots\ x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи выражает общие затраты на перевозку и имеет следующий вид:

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to min. \tag{2.16}$$

В этой сумме каждое слагаемое ($C_{ij}x_{ij}$) – это стоимость одной из запланированных перевозок, которое рассчитывается как произведение тарифа на объем перевозки.

Ограничения задачи выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); & (2.17) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}); & (2.18) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Смысл ограничений (2.17) в том, что груз должен быть полностью вывезен от каждого поставщика.

Смысл ограничений (2.18) в том, что потребности каждого потребителя должны быть полностью удовлетворены.

Ограничения неотрицательности вытекают из смысла переменных: объем перевозок не может быть отрицательным.

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является условие баланса [8], [12]:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

т. е. общий запас всех поставщиков должен быть равен сумме потребностей всех потребителей. Если это равенство выполнено, то задача называется *закрытой*, а если нарушено – то *открытой*. Чтобы решить открытую задачу, ее сводят к закрытой одним из следующих способов:

- в случае перепроизводства продукта в модель добавляют фиктивный пункт потребления, потребность которого равна излишкам запасов у поставщиков: $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Тарифы перевозок в этот пункт потребления полагают равными стоимости складирования (если данных о стоимости складирования нет, то можно положить тарифы перевозок в этот пункт равными нулю);
- в случае дефицита продукта вводят фиктивного поставщика, запас которого равен недостающему количеству продукта: $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Тарифы перевозок от этого поставщика полагают равными штрафам за недопоставку продукции (либо равными нулю).

Существуют эффективные методы решения транспортной задачи (например, метод потенциалов). Надстройка *Поиск решения* реализует эти методы, если постановка задачи указывает на то, что это задача транспортного типа (ограничения имеют вид равенства, необходимо найти матрицу значений и т. п.). Транспортная задача часто имеет несколько оптимальных решений с одним и тем же значением целевой функции. *Поиск решения* позволяет найти их все. Для этого, решив задачу один раз и получив один оптимальный план перевозок, оставляют этот план в качестве начального приближения переменных и запускают *Поиск решения* еще раз. На этот раз надстройка выдает в качестве решения другой оптимальный план, если он существует. Аналогичные действия можно выполнить несколько раз и найти все оптимальные планы.

2.7.2. Задача распределения финансирования по объектам и периодам

Постановка задачи. Имеется m объектов финансирования и n периодов времени (например, месяцев). Известны следующие величины:

- b_i $(i = \overline{1, m})$ – величина финансов, выделяемая для i-го объекта финансирования;
- d_j $(j = \overline{1, n})$ – объем финансирования всех объектов в j-м периоде;
- C_{ij} – мера оценки эффективности финансирования объекта i в период времени j.

Условия задачи представлены в виде табл. 2.7.

Таблица 2.7. **Исходные данные задачи распределения финансирования**

Объекты	Периоды				Выделенные средства
	1	2	…	n	
1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	b_1
2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	b_2
…	…	….	…	…	…
m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	b_m
Потребность	d_1	d_2	…	d_n	

Возможны следующие варианты оценки эффективности финансирования C_{ij}:

- C_{ij} – это важность финансирования объекта i в период времени j (в баллах от 0 до 10);
- C_{ij} – это прибыль на единицу вложенных финансов, получаемая от объекта i в период времени j;
- C_{ij} – это затраты на освоение единицы финансовых вложений объектом i в период времени j.

Кроме того, для каждого объекта и периода может быть задана нижняя (k_{ij}) и верхняя (K_{ij}) границы выделяемых финансов. Если нет дополнительных соображений, то в качестве нижней границы должен быть принят ноль, так как количество выделенных финансов не может быть отрицательным. Верхняя граница может быть опущена.

Требуется распределить имеющиеся финансы по объектам и периодам таким образом, чтобы использовать их наиболее эффективно [2].

Решение

Составим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} – искомый объем финансирования объекта i в период времени j, т. е. получаем следующую матрицу неизвестных, в которой строки соответствуют объектам, а столбцы – периодам:

$$\begin{pmatrix} x_{11} \ x_{12} \ \ldots \ x_{1n} \\ x_{21} \ x_{22} \ \ldots \ x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} \ x_{m2} \ \ldots \ x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ – общий объем финансирования i-го объекта по всем периодам ($i = \overline{1, m}$); $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ – суммарное финансирование всех объектов в j-м периоде ($j = \overline{1, n}$).

В общем случае условие финансирования объекта может быть задано как в виде неравенства, так и в виде равенства, т. е. могут быть заданы следующие условия:

- не превышать выделенную сумму финансирования;
- финансировать объект в строго заданном объеме;
- финансирование объекта должно быть не менее заданной ве-

личины.

Согласно вышеперечисленным условиям ограничения по объектам в общем виде записываются следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \{\le, =, \ge\} b_i \quad (i = \overline{1, m}). \tag{2.19}$$

Аналогично записываются и ограничения по периодам:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \{\le, =, \ge\} d_j \quad (j = \overline{1, n}). \tag{2.20}$$

Граничные условия для величин x_{ij} задаются следующими неравенствами:

$$k_{ij} \le x_{ij} \le K_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; \;\; j = \overline{1, n}). \tag{2.21}$$

Целевая функция задачи представляет собой суммарную эффективность финансирования объектов по периодам и имеет следующий вид:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to max(min). \tag{2.22}$$

При этом, если коэффициенты C_{ij} имеют смысл важности или прибыли, то целевая функция должна быть максимальной, а если затрат на освоение финансирования – то минимальной.

Задача (2.19) – (2.22) является задачей линейного программирования транспортного вида и может быть решена с помощью надстройки *Поиск решения*.

Возможна несколько иная постановка задачи распределения финансирования. Допустим, что задан только общий объем имеющихся финансов R и не заданы величины b_i и d_j по каждому объекту и периоду. Тогда модель задачи имеет только одно функциональное ограничение:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to max(min);$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le R; \\ k_{ij} \le x_{ij} \le K_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

2.7.3. Задача о назначениях

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Кроме того, она относится к классу целочисленных задач линейного программирования.

Постановка задачи. Имеются n различных работ и такое же количество исполнителей. Известны затраты C_{ij}, связанные с выполнением работы j исполнителем i ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$). Требуется найти такой вариант назначения исполнителей на работы, чтобы общие затраты были наименьшими. При этом каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, а каждая работа поручена только одному исполнителю.

Составим математическую модель задачи. Введем следующие переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если исполнитель } i \text{ назначен на работу } j; \\ 0, \text{ если исполнитель } i \text{ не назначен на работу } j. \end{cases}$$

Таким образом, получаем матрицу переменных, в которой строки соответствуют исполнителям, а столбцы – работам ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$). Например, матрица значений переменных может иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица означает, что 1-й исполнитель должен быть назначен на 2-ю работу; 2-й исполнитель – на 1-ю работу; 3-й исполнитель – на 4-ю работу, а 4-й – на 3-ю.

Поскольку в задаче требуется, чтобы общие затраты были наименьшими, целевая функция будет представлять собой общие затраты на выполнение работ. Ее следует минимизировать:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to min. \qquad (2.23)$$

При этом накладываются следующие ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}); & (2.24) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n}); & (2.25) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Ограничения (2.24) (сумма по строке) означают, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу.

Ограничения (2.25) (сумма по столбцу) означают, что каждая работа может быть поручена только одному исполнителю.

Условие баланса означает в данном случае, что число работ должно быть равно числу исполнителей. Если это не так, то в модель нужно ввести недостающее число фиктивных работ или исполнителей.

Возможна другая постановка задачи о назначениях, когда заданы не затраты C_{ij}, а прибыли, связанные с назначением исполнителя i на работу j. В этом случае целевая функция представляет собой общую прибыль и стремится к максимуму.

Ограничение целочисленности $x_{ij} \in \{0, 1\}$ для надстройки *Поиск решения* может быть задано с помощью следующих ограничений:

$$x_{ij} \ge 0;$$

$$x_{ij} \le 1;$$

$$x_{ij} \text{ – целое.}$$

В остальном решение данной задачи аналогично решению транспортной задачи.

Тема 3. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

3.1. Основные понятия теории игр

Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации, которая реализуется в условиях неопределенности.

Например, при определении объема выпуска продукции на одном предприятии нельзя не учитывать размеров выпуска аналогичной продукции на других предприятиях. Однако невозможно полностью контролировать деятельность конкурентов, можно только предполагать возможные варианты их действий, т. е. решение приходится принимать в условиях неопределенности. Каждое из конкурирующих предприятий преследует свои цели, поэтому имеет место конфликтная ситуация.

Исследованием конфликтных ситуаций занимается *теория игр* [6], [8]. В игре могут сталкиваться интересы двух (*игра парная*) или нескольких (*игра множественная*) противников. Существуют игры с бесконечным множеством игроков.

По характеру выигрышей выделяют игры с *нулевой суммой* и с *ненулевой суммой*. В играх с нулевой суммой общий капитал игроков не изменяется, а лишь перераспределяется в ходе игры, поэтому сумма выигрышей равна нулю (проигрыш рассматривается как отрицательный выигрыш). В случае парной игры это означает, что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В играх с ненулевой суммой сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при организации лотереи часть общего взноса участников не участвует в формировании призового фонда, а идет организатору лотереи.

Игры, в которых оба участника сознательно стремятся добиться для себя наилучшего результата, называются *стратегическими*. Часто игровой схемой формализуют такие ситуации, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют *статистическими* или *играми с природой*.

Рассмотрим стратегическую парную игру с нулевой суммой. Пусть в игре участвуют два игрока: A и B. Как уже отмечалось, в такой игре выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Игра ведется по определенным правилам. Каждый участник игры имеет несколько вариантов возможных действий (*чистых стратегий*). Например, игрок A имеет m чистых стратегий (A_1, A_2, …, A_m), а игрок B – n чистых стратегий (B_1, B_2, …, B_n). Из своих чистых стратегий каждый игрок выбирает такой вариант, который, как он полагает, может обеспечить ему наилучший результат (исход игры). *Исход игры* – это значение некоторой функции, называемой *функцией выигрыша* или *платежной функцией*. Эта функция задается либо аналитическим выражением, либо таблично, т. е. с помощью платежной матицы. В последнем случае игра называется *матричной*. По строкам в *платежной матрице* (табл. 3.1) располагаются стратегии игрока A, а по столбцам – стратегии игрока B. Элемент платежной матрицы a_{ij}, который находится на пересечении строки i и столбца j, есть выигрыш игрока A (и в то же время проигрыш игрока B) в ситуации, когда игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B независимо от него выбрал стратегию B_j. Таким образом, именно независимый выбор двух игроков определяет исход игры (величину выигрыша A).

Таблица 3.1. **Платежная матрица игры**

Стратегии	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Например, величина a_{21} показывает выигрыш игрока A и, в то же время, проигрыш игрока B, если игрок A выбирает свою чистую стратегию A_2, а игрок B выбирает чистую стратегию B_1.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.1. В игре принимают участие два игрока. Каждый из игроков может записать независимо от другого число 4, 5 или 6. Если разность между числами, записанными игроками A и B, положительна, то игрок A выигрывает количество очков, равное этой разности. Если разность отрицательна, то выигрывает игрок B. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Необходимо составить платежную матрицу игры.

Решение

У игрока A имеется три стратегии:

- A_1 – записать число 4;
- A_2 – записать число 5;
- A_3 – записать число 6.

Поэтому платежная матрица будет иметь три строки (табл. 3.2).

Таблица 3.2. **Платежная матрица для примера 3.1**

Стратегии	B_1 (4)	B_2 (5)	B_3 (6)
A_1 (4)	0	–1	–2
A_2 (5)	1	0	–1
A_3 (6)	2	1	0

Игрок B также имеет три стратегии: B_1, B_2, B_3 (записать число 4, 5 или 6). Платежная матрица имеет три столбца (табл. 3.2).

В случае, если игрок A запишет число 4 (стратегия A_1) и игрок B также запишет 4 (стратегия B_1), то выигрыш игрока A составит 4 – 4 = 0, т. е. элемент платежной матрицы $a_{11} = 0$. Аналогично рассчитываются все остальные элементы платежной матрицы.

Например, если игрок A выберет стратегию A_3 (запишет число 6), а игрок B выберет стратегию B_1 (запишет число 4), то выигрыш игрока A составит $a_{31} = 6 - 4 = 2$. Столько же проиграет игрок B.

Отрицательный выигрыш означает на самом деле проигрыш. Так, $a_{23} = -1$ означает, что если игрок A выберет стратегию A_2 (запишет 5), а игрок B выберет стратегию B_3 (запишет 6), то A выиграет –1 очко (т. е. проиграет 1 очко), а B проиграет –1 очко (т. е. выиграет 1 очко).

Пример 3.2. Конструкторские бюро КБ-1 и КБ-2 участвуют в конкурсе проектов двух бытовых приборов. В КБ-1 этим заняты четыре, а в КБ-2 – три отдела. Комиссия, оценивающая эти проекты, лучшим признает тот, которым в конструкторском бюро занималось большее количество отделов. При равенстве задействованных отделов баллы не начисляются. Кроме одного балла, получаемого за лучший проект, конструкторскому бюро дополнительно начисляется столько баллов, сколько отделов было занято аналогичным проектом в конкурирующем КБ. Общее количество баллов каждого бюро равняется сумме баллов, набранных по обоим проектам.

Необходимо придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу (матрицу баллов, начисляемых КБ-1).

Решение

Под игроком A будем понимать КБ-1, а под игроком B – КБ-2. Запишем стратегии игроков в следующем виде: (k_1, k_2), где k_1 – количество отделов, которые занимались первым проектом, а k_2 – количество отделов, которые занимались вторым проектом.

Поскольку у игрока A имеется четыре отдела, их можно распределить по проектам следующими способами: $A_1 = (4, 0)$; $A_2 = (3, 1)$;

$A_3 = (2, 2)$; $A_4 = (1, 3)$; $A_5 = (0, 4)$, т. е. игрок A имеет пять различных стратегий. Стратегия A_1 состоит в том, чтобы все четыре отдела занять первым проектом, стратегия A_2 – в том, чтобы три отдела занять первым проектом, а один отдел – вторым, и т. д.

Аналогично игрок B имеет три отдела и четыре стратегии: $B_1 = (3, 0)$; $B_2 = (2, 1)$; $B_3 = (1, 2)$; $B_4 = (0, 3)$.

Платежная матрица этой игры показана в табл. 3.3.

Таблица 3.3. **Платежная матрица для примера 3.2**

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$
$A_1 = (4, 0)$	4	2	1	0
$A_2 = (3, 1)$	1	3	0	–1
$A_3 = (2, 2)$	–2	2	2	–2
$A_4 = (1, 3)$	–1	0	3	1
$A_5 = (0, 4)$	0	1	2	4

Приведем рассуждения при расчете элементов этой платежной матрицы.

Элемент a_{11} есть выигрыш игрока A, который он получит, если выберет стратегию A_1 (все четыре отдела займет первым проектом), а игрок B при этом выберет свою стратегию B_1 (три отдела займет первым проектом). Тогда по первому проекту выиграет игрок A (так как количество отделов, занятых первым проектом, у него больше). Ему будет начислен 1 балл за выигрыш и еще дополнительно 3 балла за то, что у конкурента этим занималось три отдела. Итого по первому проекту игрок A выиграет 4 балла. По второму проекту – ничья (им не занимались ни первый, ни второй игрок). Поэтому $a_{11} = 4$.

Элемент a_{12} есть выигрыш игрока A в ситуации, когда он выбирает стратегию A_1 (четыре отдела на первый проект), а игрок B выбирает стратегию B_2 (два отдела на первый проект и один на второй). По первому проекту выигрывает игрок A – 3 балла (один за выигрыш и два дополнительно за то, что у конкурента этим занималось два отдела). По второму проекту 1 балл выигрывает игрок B (дополнительные баллы не начисляются, так как его конкурент (игрок A) вторым проектом вообще не занимался). Таким образом, выигрыш игрока A по второму проекту равен –1 (отрицательный выигрыш есть на самом деле проигрыш), а общий выигрыш игрока A равен $a_{12} = 3 - 1 = 2$.

Элемент a_{42} представляет собой выигрыш игрока A при условии, что он выберет стратегию A_4 (один отдел на первый проект и три на второй), а игрок B выберет стратегию B_2 (два отдела на первый проект и один на второй). Тогда по первому проекту выигрывает игрок *B* (так как у него этим проектом занято больше отделов). Он получает 1 балл за выигрыш и 1 дополнительный балл за то, что у игрока *A* первым проектом был занят один отдел, т. е. по первому проекту игрок *A* проигрывает 1 + 1 = 2 балла (выигрывает –2 балла). По второму проекту выигрывает игрок *A* и получает 1 дополнительный балл за то, что у игрока *B* этим проектом занимался один отдел, т. е. по второму проекту выигрыш игрока *A* составит 1 + 1 = 2 балла. Общий выигрыш игрока *A* в этой ситуации составит $a_{42} = -2 + 2 = 0$.

Остальные элементы платежной матрицы рассчитываются аналогично.

3.2. Решение матричных игр. Принцип минимакса

Пусть дана парная игра с нулевой суммой, заданная платежной матрицей размерности $m \times n$. *Решить* матричную игру означает определить наилучшую стратегию игрока *A*, а также наилучшую стратегию игрока *B*. Если рассматривается стратегическая игра, то предполагается, что противники одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели. Поэтому каждый игрок должен рассчитывать на самое неблагоприятное для себя поведение противника.

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока *A*. Выбирая стратегию A_i, мы должны рассчитывать, что игрок *B* ответит на нее той из своих стратегий B_j, для которой выигрыш игрока *A* будет минимальным. Поэтому для каждой стратегии A_i найдем α_i – минимальный гарантированный выигрыш игрока *A* при применении стратегии A_i – по следующей формуле:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \ (i = \overline{1, m}). \qquad (3.1)$$

Очевидно, что желающий перестраховаться игрок *A* должен предпочесть ту стратегию, для которой гарантированный выигрыш α_i максимален, т. е. лучшая, с его точки зрения, стратегия имеет следующий вид:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (3.2)$$

Величина α называется *нижней ценой игры* или *максимином*.

Стратегия, обеспечивающая игроку A получение нижней цены игры, называется *максиминной стратегией*. Если игрок A будет придерживаться своей максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры при любом поведении игрока B.

Аналогичным способом определим наилучшую стратегию игрока B. С его точки зрения, в платежной матрице записаны проигрыши. Он заинтересован уменьшить свой проигрыш. Поэтому в каждом из столбцов (соответствующем определенной стратегии) он должен найти максимальное значение проигрыша при выборе стратегии B_j по следующей формуле:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{3.3}$$

Выбирать стратегию игроку B следует так, чтобы минимизировать величину проигрыша при любых действиях соперника, т. е. обеспечить $\beta = \min_j \beta_j$. Величина

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \tag{3.4}$$

называется *верхней ценой игры* (*минимаксом*), а соответствующая ей чистая стратегия B_j – *минимаксной*. Если игрок B будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то ему гарантировано, что в любом случае он проиграет не больше верхней цены игры.

Можно показать, что всегда максимин не превосходит минимакс, т. е. $\alpha \le \beta$.

Если нижняя цена игры равна верхней ($\alpha = \beta$), то говорят, что игра имеет седловую точку и чистую цену игры $\gamma = \alpha = \beta$. Стратегии A_i^* и B_j^*, позволяющие достичь этого значения, называются оптимальными, а пара оптимальных стратегий (A_i^*, B_j^*) называется седловой точкой матричной игры.

Игра, которая имеет седловую точку, решается в *чистых стратегиях*, т. е. рекомендуется каждому игроку применять одну свою стратегию A_i^* и B_j^*. Тогда игроку A гарантировано, что он получит выигрыш, не меньший чистой цены игры (γ). А игроку B гарантировано, что он получит проигрыш, не больший чистой цены игры (γ).

Рассмотрим несколшько примеров.

Пример 3.3. Найдем решение игры для примера 3.1 (с. 59). Будем записывать величины α_i в дополнительном столбце справа, а величины β_j – в дополнительной строке внизу платежной матрицы (табл. 3.4).

Таблица 3.4. **Решение игры для примера 3.1**

Стратегии	B_1 (4)	B_2 (5)	B_3 (6)	α_i
A_1 (4)	0	–1	–2	–2
A_2 (5)	1	0	–1	–1
A_3 (6)	2	1	0^*	0
β_j	2	1	0	

Если игрок A выбирает чистую стратегию A_1 (записывает число 4), то его минимальный выигрыш составит

$$\alpha_1 = min\ (0; -1; -2) = -2.$$

Аналогично находятся значения α_i для каждой строки (см. последний столбец в табл. 3.4). Наибольший из минимальных выигрышей стратегий (нижняя цена игры) имеет следующий вид:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 0.$$

Нижней цене игры соответствует стратегия A_3. Таким образом, если игрок A выбирает стратегию A_3 (записывает число 6), то ему гарантирован выигрыш, не меньший $\alpha = 0$.

Если игрок B выбирает чистую стратегию B_1 (записывает 4), то его максимальный проигрыш будет выглядеть следующим образом:

$$\beta_1 = max\ (0; 1; 2) = 2.$$

Аналогично находим максимальный проигрыш для каждого столбца (см. последнюю строку в табл. 3.4). Наименьший из максимальных проигрышей (верхняя цена игры) имеет следующий вид:

$$\beta = \min_j \beta_j = 0.$$

Верхней цене игры соответствует стратегия B_3. Таким образом, если игрок B выбирает стратегию B_3 (записывает число 6), то ему гарантирован проигрыш, не больший $\beta = 0$.

Поскольку $\alpha = \beta$, то игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях. Чистая цена игры $\gamma = 0$. Оптимальная стратегия игрока $A - A_3$. Оптимальная стратегия игрока $B - B_3$. Игрокам рекомендуется выбирать свои оптимальные стратегии.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т. е. $\alpha < \beta$, то решением игры для каждого игрока будет смешанная стратегия, состоящая в применении им двух и более чистых стратегий с определенными частотами. Однако, применение игроками смешанных стратегий имеет смысл только тогда, когда данная игра проводится ими многократно. В случае однократно проводимой игры, не имеющей седловой точки, дать какие-либо содержательные рекомендации игрокам не представляется возможным.

Смешанной стратегией игрока A называется вектор $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, где p_i – вероятность, с которой игрок A выбирает свою чистую стратегию A_i. Компоненты вектора p удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 .$$

Смешанной стратегией игрока B называют вектор $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, где q_j – вероятность (частота) применения игроком B его чистой стратегии B_j. При этом

$$q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Решить задачу в смешанных стратегиях означает найти такие оптимальные смешанные стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$, которые доставляют игроку A максимальный средний выигрыш, а игроку B – минимальный средний проигрыш. *Ценой игры* (γ) при этом называется величина среднего выигрыша игрока A (среднего проигрыша B), приходящегося на одну партию.

Можно показать, что цена игры всегда удовлетворяет условию $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

Следовательно, если каждый игрок придерживается своих смешанных стратегий при многократном повторении игры, то он получает более выгодный для себя результат, чем применяя «перестраховочные» стратегии, соответствующие α и β. Каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как ему это невыгодно.

Чистые стратегии игроков, имеющие ненулевые вероятности в его смешанной стратегии, называются *активными*.

Пример 3.4. Применим принцип минимакса к платежной матрице из примера 3.2 (с. 61), рассчитав нижнюю и верхнюю цены игры (табл. 3.5).

Таблица 3.5. **Расчет нижней и верхней цены игры для примера 3.2**

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$	α_i
$A_1 = (4, 0)$	4	2	1	0	0
$A_2 = (3, 1)$	1	3	0	–1	–1
$A_3 = (2, 2)$	–2	2	2	–2	–2
$A_4 = (1, 3)$	–1	0	3	1	–1
$A_5 = (0, 4)$	0	1	2	4	0
β_j	4	3	3	4	

Минимальный выигрыш игрока A при применении им стратегии A_1 составит $\alpha_1 = min\ (4; 2; 1; 0) = 0$ (минимум в первой строке). Аналогично находятся величины α_i для остальных строк.

Нижняя цена игры будет равна: $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = max\ (0; –1; –2; –1; 0) = 0$. Таким образом, игроку A гарантирован выигрыш не меньший нуля, если он будет придерживаться стратегии A_1 (все отделы на первый проект) или стратегии A_5 (все отделы на второй проект).

Максимальный проигрыш игрока B при применении им стратегии B_1 будет равен: $\beta_1 = max\ (4; 1; –2; –1; 0) = 4$ (максимум в первом столбце). Аналогично находятся значения β_j для остальных столбцов.

Верхняя цена игры будет равна: $\beta = \min\limits_j \beta_j = min\ (4; 3; 3; 4) = 3$. Игроку B гарантировано, что он проиграет не больше 3 баллов, если будет придерживаться стратегии B_2 (два отдела на первый проект и один на второй) или B_3 (один отдел на первый проект и два на второй).

Поскольку в данном примере нижняя цена игры не равна верхней: ($\alpha = 0 < \beta = 3$), то игра в чистых стратегиях решения не имеет. Ее следует искать в смешанных стратегиях, если известно, что она реализуется не один раз, а многократно. Тогда для игрока A следует найти вектор $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$. Каждая компонента такого вектора p_i есть вероятность (частота), с которой нужно выбирать стратегию A_i.

Для игрока B нужно найти вектор $\overline{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ вероятностей применения его чистых стратегий.

3.3. Решение игры в смешанных стратегиях путем сведения к задаче линейного программирования

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях.

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны. Если это не так, то можно ко всем элементам матрицы добавить некоторое достаточно большое число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений. При этом цена игры увеличится на L, а смешанные стратегии игроков не изменятся. Если все выигрыши игрока A неотрицательны, то можно принять, что средний выигрыш $\gamma > 0$.

Применение игроком A оптимальной смешанной стратегии $\overline{p^*} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока B, средний выигрыш, не меньший цены игры (γ).

Допустим, что игрок A применяет свою оптимальную стратегию $\overline{p^*}$, а игрок B – свою чистую стратегию B_j. Тогда средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) игрока A можно рассчитать по формуле

$$\gamma_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \ldots + a_{ij} p_i + a_{mj} p_m, \quad j = \overline{1, n}.$$

Учитывая, что γ_j не может быть меньше цены игры γ, можем записать нижеприведенные условия:

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \ldots + a_{ij} p_i + a_{mj} p_m \geq \gamma, \quad j = \overline{1, n}.$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на $\gamma > 0$, получим следующее:

$$a_{1j} \frac{p_1}{\gamma} + a_{2j} \frac{p_2}{\gamma} + \ldots + a_{ij} \frac{p_i}{\gamma} + a_{mj} \frac{p_m}{\gamma} \geq 1, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.5}$$

Введем новые обозначения:

$$x_i = \frac{p_i}{\gamma}, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (3.6)$$

Тогда неравенства (3.5) можно записать в следующем виде:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + a_{mj}x_m \geq 1, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (3.7)$$

где все $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), так как $p_i \geq 0$, $\gamma > 0$.

Компоненты вектора p являются вероятностями событий, образующих полную группу. Поэтому они удовлетворяют следующему условию:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Учитывая соотношение (3.6), получим следующее равенство:

$$x_1\gamma + x_2\gamma + \ldots + x_m\gamma = 1,$$

т. е. переменные x_i удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Поскольку игрок A стремится максимизировать свой средний выигрыш γ, обратная ему сумма переменных x_i должна быть наименьшей. Получаем целевую функцию задачи:

$$F(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \rightarrow min. \qquad (3.8)$$

Таким образом, задача решения матричной игры сводится к задаче линейного программирования, в которой требуется найти неотрицательные значения переменных x_i ($i = \overline{1, m}$), минимизирующие линейную функцию (3.8) и удовлетворяющие ограничениям (3.7):

$$F = \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = \overline{1, n}); \\ x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Решив данную задачу, найдем цену игры по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}. \tag{3.9}$$

Вероятности применения игроком A его чистых стратегий рассчитаем по следующей формуле:

$$p_i = x_i \gamma = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \quad (i = \overline{1, m}). \tag{3.10}$$

Для определения смешанной стратегии игрока B нужно решить двойственную задачу:

$$F_Д = \sum_{j=1}^{n} z_j \to max;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}); \\ z_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Решив двойственную задачу, найдем оптимальные значения переменных z_j. Поскольку рассматривается игра с нулевой суммой, средний проигрыш игрока B, приходящийся на одну партию, равен выигрышу игрока A, т. е. удовлетворяет следующему равенству:

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Вероятности применения игроком B его чистых стратегий рассматриваются по формуле

$$q_j = z_j \gamma = \frac{z_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \quad j = \overline{1, n} \cdot \qquad (3.11)$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.5. Решим в смешанных стратегиях игру о двух КБ, платежная матрица которой была составлена в примере 3.2 (табл. 3.3). Прежде всего, прибавим ко всем элементам платежной матрицы число 2, чтобы перевести их в область неотрицательных значений. Цена игры при этом увеличится на 2. Получим платежную матрицу, как показано в табл. 3.6.

Таблица 3.6. **Преобразованная платежная матрица**

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$
$A_1 = (4, 0)$	6	4	3	2
$A_2 = (3, 1)$	3	5	2	1
$A_3 = (2, 2)$	0	4	4	0
$A_4 = (1, 3)$	1	2	5	3
$A_5 = (0, 4)$	2	3	4	6

Составим задачу линейного программирования, чтобы решить игру для игрока A:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to min;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + \phantom{4x_3 +{}} x_4 + 2x_5 \geq 1; \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 \geq 1; \\ 2x_1 + x_2 + \phantom{4x_3 +{}} 3x_4 + 6x_5 \geq 1; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Двойственная к ней задача даст решение для игрока B:

$$F_Д = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \to max;$$

$$\begin{cases} 6z_1 + 4z_2 + 3z_3 + 2z_4 \le 1; \\ 3z_1 + 5z_2 + 2z_3 + z_4 \le 1; \\ 4z_2 + 4z_3 \le 1; \\ z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 3z_4 \le 1; \\ 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 + 6z_4 \le 1; \\ z_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решим исходную задачу с помощью надстройки *Поиск решения* и получим отчет по устойчивости. Значения в графе *Теневая цена* отчета по устойчивости есть оптимальные значения двойственных переменных. Оптимальные значения переменных: x_1^* = 0,125; x_2^* = 0; x_3^* = 0,03125; x_4^* = 0; x_5^* = 0,125. Из отчета по устойчивости – z_1^* = 0,009375; z_2^* = 0,15; z_3^* = 0,1; z_4^* = 0,021875. Значение целевой функции будет равно

$$F^* = \sum_{i=1}^{5} x_i^* = 0{,}28125.$$

Найдем вероятности применения игроком *A* своих чистых стратегий, используя формулу (3.10):

$$p_1 = \frac{x_1^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}125}{0{,}28125} \approx 0{,}445;$$

$$p_2 = \frac{x_2^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0}{0{,}28125} = 0;$$

$$p_3 = \frac{x_3^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}03125}{0{,}28125} \approx 0{,}11;$$

$$p_4 = 0;$$

$$p_5 \approx 0{,}445.$$

Таким образом, у игрока *A* активными являются первая, третья и пятая стратегии. Причем первую стратегию нужно выбирать в 44,5% случаев, третью стратегию – в 11% случаев, а пятую стратегию – также в 44,5% случаев.

Рассчитаем теперь вероятности применения стратегий для игрока *B*, используя формулу (3.11):

$$q_1 = \frac{z_1^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}009375}{0{,}28125} = 0{,}033;$$

$$q_2 = \frac{z_2^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}15}{0{,}28125} = 0{,}533;$$

$$q_3 = \frac{0{,}1}{0{,}28125} = 0{,}356;$$

$$q_4 = \frac{0{,}021875}{0{,}28125} = 0{,}078.$$

У игрока *B* все стратегии являются активными, т. е. все их нужно применять с соответствующими частотами.

Цена игры: $\gamma = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{4} z_j^*} = \dfrac{1}{0{,}28125} = 3{,}556$. Но эта цена игры – для преобразованной платежной матрицы. Чтобы вернуться к исходной игре, следует отнять число 2, которое было прибавлено ко всем элементам платежной матрицы. Итак, цена игры $\gamma = 1{,}556$. Таким образом, если игрок *A* будет придерживаться своей смешанной стратегии, ему гарантирован средний выигрыш не меньше, чем 1,556. Очевидно, что это лучший результат, чем при применении перестраховочной стратегии, которая дает гарантированный выигрыш $\alpha = 0$

(см. пример 3.4). Если игрок *B* будет придерживаться своей смешанной стратегии, то ему гарантирован средний проигрыш не больше 1,556. Это также лучше, чем применять перестраховочную стратегию, которая гарантирует проигрыш не более $\beta = 3$ (см. пример 3.4). Соотношение $\alpha < \gamma < \beta$ выполняется.

3.4. Игры с природой

Игра с природой – это такая игровая модель, в которой один из участников безразличен к результату игры. Свои чистые стратегии такой участник игры реализует не целенаправленно, а случайным образом. Под термином «природа» понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решение. Так, под «природой» могут пониматься погодные условия, спрос на рынке, состояние валютной биржи и т. д.

В играх с природой степень неопределенности при принятии решения сознательным игроком возрастает. «Природа», будучи безразличной в отношении выигрыша, может реализовать такие стратегии, которые выгодны сознательному игроку. Поэтому в таких играх решение принять сложнее, а выиграть можно больше.

Игра с природой задается платежной матрицей, в которой строки соответствуют стратегиям сознательного игрока, а столбцы – состояниям природы.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.6. Туристическая фирма «Топ Тур» реализует туристические путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 6 до 9 единиц. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то фирма может заказать недостающее количество. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 5 усл. ед. за каждую новую путевку. А если количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованную путевку составят 6 усл. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 усл. ед.

Требуется определить, какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

Решение

Построим платежную матрицу игры. Сознательный игрок *A* имеет

4 возможные стратегии:

- A_1 – заказать 6 путевок;
- A_2 – заказать 7 путевок;
- A_3 – заказать 8 путевок;
- A_4 – заказать 9 путевок.

Потребительский спрос выступает в качестве второго игрока (природы). Возможны следующие состояния природы:

- $П_1$ – купят 6 путевок;
- $П_2$ – купят 7 путевок;
- $П_3$ – купят 8 путевок;
- $П_4$ – купят 9 путевок.

Результаты расчета платежной матрицы игры показаны в табл. 3.7.

Таблица 3.7. **Платежная матрица игры с природой**

Стратегии	$П_1$ (купят 6)	$П_2$ (купят 7)	$П_3$ (купят 8)	$П_4$ (купят 9)
A_1 (заказать 6)	60	65	70	75
A_2 (заказать 7)	54	70	75	80
A_3 (заказать 8)	48	64	80	85
A_4 (заказать 9)	42	58	74	90

Поясним расчеты некоторых элементов платежной матрицы.

Элемент a_{11} означает прибыль сознательного игрока A (фирмы) в ситуации, когда закажут 6 путевок (стратегия A_1) и спрос на них составит 6 шт. (состояние $П_1$). Поскольку при этом все путевки будут проданы, а прибыль от одной путевки равна 10 усл. ед., то общая прибыль составит $a_{11} = 6 \cdot 10 = 60$ усл. ед.

Элемент a_{12} есть выигрыш игрока A (прибыль фирмы), если будет заказано 6 путевок, а спрос составит 7 шт. Тогда 6 заранее заказанных путевок будут проданы и принесут прибыль $6 \cdot 10 = 60$ усл. ед., а 7-я путевка будет экстренно заказана. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 5 усл. ед., так что прибыль от этой путевки окажется уже не 10, а $10 - 5 = 5$ усл. ед. Общая прибыль фирмы составит $a_{12} = 60 + 5 = 65$ усл. ед.

Элемент a_{21} платежной матрицы есть выигрыш игрока A, если будет заказано 7 путевок, а купят только 6. В этом случае прибыль от этих проданных путевок будет равна $6 \cdot 10 = 60$ усл. ед., а 7-я путевка принесет убыток 6 усл. ед. Поэтому общая прибыль фирмы составит $a_{21} = 60 - 6 = 54$ усл. ед.

Аналогично рассчитываются все остальные элементы платежной матрицы.

Особенность игр с природой заключается в том, что решение достаточно найти только для сознательного игрока, поскольку природа наши рекомендации воспринять не может.

Анализ платежной матрицы игры с природой начинается с выявления и отбрасывания заведомо невыгодных стратегий игрока *A*. Стратегия является заведомо невыгодной, если в соответствующей строке платежной матрицы все значения меньше, чем значения в какой-либо другой строке. Что касается природы, то ни одну из ее стратегий отбросить нельзя.

Как правило, игры с природой решаются на основании различных критериев. Эти критерии основываются на здравом смысле, интуиции и практической целесообразности. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают, то принимается рекомендуемое решение. Если рекомендации критериев противоречат друг другу, то нужно выбрать ту стратегию, на которую указывает большее количество критериев, либо привлечь дополнительную информацию.

3.4.1. Критерии, основанные на известных вероятностях состояний природы

Критерий Байеса

Иногда на основе данных статистических наблюдений можно определить вероятности состояний природы, например:

$$q_1 = P(П_1); \quad q_2 = P(П_2); \quad \ldots; \quad q_n = P(П_n).$$

Причем $q_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n})$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, так как все состояния природы составляют полную группу событий.

Среднее значение (математическое ожидание) выигрыша $\overline{\alpha_i}$, которое получит игрок *A* при применении им стратегии A_i, можно рассчитать по формуле

$$\overline{\alpha_i} = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n \qquad (i = \overline{1, m}).$$

Согласно критерию Байеса, в качестве оптимальной выбирается та из стратегий A_i, которая соответствует максимальному математическому ожиданию выигрыша. Это можно выразить следующей формулой:

$$\bar{\alpha} = \max_i \bar{\alpha}_i = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}. \tag{3.12}$$

Критерий Байеса-Лапласа

Если можно считать, что все состояния природы равновероятны, т. е. удовлетворяют следующему условию:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n},$$

то в качестве оптимальной выбирается та стратегия, которая обеспечивает максимальное среднее арифметическое значение выигрыша. Это можно выразить нижеприведенной формулой:

$$\bar{\alpha} = \max_i \bar{a}_i = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{3.13}$$

3.4.2. Критерии, используемые в условиях полной неопределенности, т. е. когда вероятности состояний природы неизвестны

Максиминный критерий Вальда

Согласно этому критерию выбирается та стратегия, которая гарантирует максимальный выигрыш в наихудших условиях, т. е. обеспечивается равенство

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \tag{3.14}$$

Критерий Вальда выражает позицию «крайнего пессимизма», и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска)

На основе платежной матрицы можно рассчитать соответствующую матрицу рисков игры. *Риском* называется разность между максимально возможным при данном состоянии природы выигрышем и тем выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i. Максимальный выигрыш при состоянии природы Π_j (максимум в j-м столбце) обозначим β_j:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \tag{3.15}$$

Риск игрока A при применении им стратегии A_i в условиях $П_j$ определяется по следующей формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}). \tag{3.16}$$

При этом всегда $r_{ij} \geq 0$.

Согласно критерию Сэвиджа выбирается та стратегия, которая в наихудших условиях дает наименьший риск, т. е. обеспечивается следующим равенством:

$$r = \min_i \max_j r_{ij}. \tag{3.17}$$

Этот критерий также соответствует позиции крайнего пессимизма, но здесь пессимизм понимается в ином свете: рекомендуется всячески избегать большого риска при принятии решений.

Критерий Гурвица

Оптимальной считается чистая стратегия A_i, найденная из следующего условия:

$$S = \max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}), \tag{3.18}$$

где λ – коэффициент пессимизма, принимающий значения $0 \leq \lambda \leq 1$.

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (критерий «крайнего пессимизма»), а при $\lambda = 0$ – в критерий «крайнего оптимизма», когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш. При $0 < \lambda < 1$ получается нечто среднее между тем и другим. В связи с этим критерий Гурвица называют также критерием «пессимизма–оптимизма».

Величина λ выбирается исходя из опыта и здравого смысла. Чем ответственнее ситуация, тем ближе к 1 выбирается λ.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.7. Применим различные критерии для решения игры с природой из примера 3.6.

1. Допустим, для предыдущего примера известны вероятности состояний природы, т. е. спроса на путевки: $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}3$; $q_4 = 0{,}2$. Тогда средний выигрыш (математическое ожидание) для каждой стратегии игрока A следующий:

$$\bar{\alpha}_1 = 60 \cdot 0{,}2 + 65 \cdot 0{,}3 + 70 \cdot 0{,}3 + 75 \cdot 0{,}2 = 67{,}5;$$

$$\bar{\alpha}_2 = 54 \cdot 0{,}2 + 70 \cdot 0{,}3 + 75 \cdot 0{,}3 + 80 \cdot 0{,}2 = 70{,}3;$$

$$\bar{\alpha}_3 = 48 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}3 + 80 \cdot 0{,}3 + 85 \cdot 0{,}2 = 69{,}8;$$

$$\bar{\alpha}_4 = 42 \cdot 0{,}2 + 58 \cdot 0{,}3 + 74 \cdot 0{,}3 + 90 \cdot 0{,}2 = 66.$$

Наибольший средний выигрыш дает стратегия A_2 ($\bar{\alpha}_2 = 70{,}3$). Таким образом, по критерию Байеса, следует выбрать вторую стратегию (заказать 7 путевок).

2. Рассмотрим другую ситуацию. Если известно, что все состояния спроса на путевки равновероятны, то можно применить критерий Лапласа. Рассчитаем для каждой стратегии игрока A среднее арифметическое значение выигрыша путем следующих вычислений:

$$\bar{\alpha}_1 = (60 + 65 + 70 + 75) : 4 = 67{,}5;$$

$$\bar{\alpha}_2 = (54 + 70 + 75 + 80) : 4 = 69{,}75;$$

$$\bar{\alpha}_3 = (48 + 64 + 80 + 85) : 4 = 69{,}25;$$

$$\bar{\alpha}_4 = (42 + 58 + 74 + 90) : 4 = 66.$$

Наибольший средний выигрыш соответствует стратегии A_2. Таким образом, сознательному игроку (фирме) рекомендуется применять вторую стратегию.

3. Если о вероятностях состояния спроса вообще ничего не известно, следует применить критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

К платежной матрице игры добавим два столбца, в которых рассчитаем минимальное и максимальное значения выигрыша для каждой стратегии (табл. 3.8).

Таблица 3.8. **Расчеты для критериев Вальда и Гурвица**

Стратегии	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$

A_1	60	65	70	75	60	75
A_2	54	70	75	80	54	80
A_3	48	64	80	85	48	85
A_4	42	58	74	90	42	90

По критерию Вальда оптимальной является стратегия A_1 (заказать 6 путевок), так как ей соответствует наибольшее значение в столбце минимальных выигрышей:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = max\ (60; 54; 48; 42) = 60.$$

Вычислим значения показателя S_i для критерия Гурвица, задав параметр $\lambda = 0{,}7$:

$$S_1 = 0{,}7 \cdot 60 + 0{,}3 \cdot 75 = 64{,}5;$$

$$S_2 = 0{,}7 \cdot 54 + 0{,}3 \cdot 80 = 61{,}8;$$

$$S_3 = 0{,}7 \cdot 48 + 0{,}3 \cdot 85 = 59{,}1;$$

$$S_4 = 0{,}7 \cdot 42 + 0{,}3 \cdot 90 = 56{,}4.$$

Так как наибольшим значением показателя S_i является $S_1 = 64{,}5$, по критерию Гурвица оптимальной считается стратегия A_1 (заказать 6 путевок).

Чтобы применить критерий Сэвиджа, рассчитаем матрицу рисков. Для этого найдем максимально возможный выигрыш для каждого состояния природы по формуле (3.15). Получим следующие результаты:

$$\beta_1 = max(60;\ 54;\ 48;\ 42) = 60 \text{ (максимум в первом столбце)};$$

$$\beta_2 = max(65;\ 70;\ 64;\ 58) = 70;$$

$$\beta_3 = max(70;\ 75;\ 80;\ 74) = 80;$$

$$\beta_4 = max(75;\ 80;\ 85;\ 90) = 90.$$

Из максимального выигрыша в каждом столбце последовательно вычтем все другие элементы этого столбца (формула 3.16) и получим матрицу рисков (табл. 3.9).

Таблица 3.9. **Матрица рисков игры с природой**

Стратегии	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$max\ r_{ij}$
A_1	0	5	10	15	15
A_2	6	0	5	10	10
A_3	12	6	0	5	12
A_4	18	12	6	0	18

Для каждой стратегии A_i рассчитаем максимальный риск и запишем в правый дополнительный столбец матрицы (см. табл. 3.9). Минимальное значение в этом дополнительном столбце равно 10. Ему соответствует стратегия A_2 (заказать 7 путевок), которая и будет оптимальной по критерию Сэвиджа.

Таким образом, если в данной задаче о вероятностях состояния природы ничего не известно, то следует применить стратегию A_1, на которую указали два критерия из трех.

Тема 4. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Постановка задачи прогнозирования

Модели прогнозирования рассматривают экономические процессы, протекающие во времени. Поведение такого процесса характеризуется значениями некоторого экономического показателя. Предполагается, что этот показатель формируется под воздействием большого количества как случайных, так и неслучайных факторов, выделить которые либо невозможно, либо по ним отсутствует информация. Поэтому ход изменения данного показателя связывают не с факторами, а с течением времени. Например, потребительский спрос определяется многими факторами, такими как качество товара, благосостояние населения, действие рекламы, организация торговли и др. Если рассматривать зависимость спроса от одного или нескольких этих факторов, то это задача факторного регрессионного анализа. Но, как правило, выделить влияние отдельного фактора достаточно сложно, а для планирования производства важно исследовать изменение спроса во времени. При этом важно помнить, что причиной изменения этого показателя является все же не время, а указанные выше факторы.

В основе моделей прогнозирования лежит анализ временных рядов. *Временным рядом* называется набор значений некоторого экономического показателя y_1, y_2, …, y_i, …, y_n, которые наблюдались в моменты времени, соответственно, t_1, t_2, …, t_i, …, t_n в прошлом (табл. 4.1). Обычно интервал между этими моментами времени фиксирован, n – число наблюдений. Числовые значения показателя y_i при этом называются *уровнями ряда*.

Таблица 4.1. **Временной ряд экономического показателя**

t_1	t_2	…	t_i	…	t_n
y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Уровни временного ряда могут характеризовать значение показателя на определенный момент времени (*моментные ряды*). Например, температура воздуха, измеряемая ежедневно в 12 часов дня. Если каждое значение уровня ряда образуется как сумма или среднее значение показателя за некоторый интервал времени, то такие ряды называются *интервальными*. Например, значения среднемесячной заработной платы рабочих предприятия или объемы продаж некоторого товара по месяцам.

Очевидное требование к временному ряду состоит в возможности сравнения результатов наблюдений между собой. Для этого следует учитывать, например, что месяцы имеют различную продолжительность, количество праздничных дней и т. д.

Основная цель моделей прогнозирования состоит в том, чтобы сделать прогноз о развитии изучаемого процесса, т. е. предсказать значение данного экономического показателя в момент времени, относящийся к будущему. Например, требуется найти y_{n+1} и y_{n+2}. Прогноз является исходной информацией для принятия управленческих решений. Так, в торговле важно оценить потребительский спрос в будущем. На основании этой оценки формируется торговый заказ и планируется товарооборот.

4.2. Структура временного ряда

Типичный временной ряд можно разложить на четыре структурообразующих элемента [10]:

- $\widetilde{y}(t)$ – тренд или систематическое движение;
- S_t – эффект сезонности;
- C_t – регулярные колебания относительно тренда (цикличность);
- ε_t – случайная остаточная компонента.

Любой ряд можно описать в виде одной из таких составляющих или комбинации нескольких из них.

Трендом (*или тенденцией*) называют устойчивое систематическое изменение процесса в течение продолжительного времени. С математической точки зрения, тренд описывается некоторой достаточно гладкой функцией от времени.

Сезонность (S_t) – это систематически повторяющиеся колебания показателя, обусловленные временем года. Например, продажи компании могут возрастать из года в год (проявление тренда), но при этом 25% продаж приходится на декабрь и только 4% – на август (проявление сезонности). Другой пример – цена на картофель всегда самая низкая в августе–сентябре, а затем возрастает с учетом затрат на хранение и достигает пика в июне–июле.

Различают две формы сезонности: аддитивную и мультипликативную. В первом случае величина сезонных колебаний не зависит от общего уровня значений ряда. Например, объем продаж игрушек определенного вида увеличивается каждый год в декабре на 3 млн долл. США. В случае мультипликативной сезонности величина сезонных колебаний рассчитывается умножением общего уровня значений ряда на некоторый множитель. Например, объем продаж игрушек увеличивается на 40% (т. е. умножается на 1,4). Это значит, что если средний объем продаж этой игрушки невелик, то абсолютное (в денежном выражении) увеличение этого объема в декабре также будет небольшим. Если же игрушка продается хорошо, то и абсолютный прирост объема продаж будет значительным.

Цикличность (C_t) – это регулярные колебания относительно тренда, обусловленные некоторыми постоянно действующими факторами. Эти колебания могут быть предсказаны и не связаны с временем года.

Случайная остаточная компонента (ε_t) обусловлена действием случайных факторов, влияющих на экономический показатель.

4.3. Простейшие методы прогнозирования

Простейшими методами прогнозирования являются *методы сглаживания.* Суть этих методов состоит в замене фактических значений показателя расчетными, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Методы сглаживания позволяют уменьшить влияние случайных факторов на экономический показатель и, таким образом, выявить основную тенденцию его развития (тренд) [10].

Рассмотрим два метода сглаживания: метод скользящих средних и метод экспоненциального сглаживания.

Метод скользящих средних. Сглаженное значение ряда в момент времени t рассчитывается по формуле

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-m+1} + y_{t-m+2} + \ldots + y_t}{m}, \qquad (4.1)$$

где m – интервал сглаживания (при этом первые $m - 1$ значений сглаженного ряда не рассчитываются).

Например, при $m = 3$ $\bar{y}_t = \dfrac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t}{3}$ не рассчитываются первое и второе значения сглаженного ряда.

Возможны и другие варианты формулы сглаживания. Например, при $m = 3$ возможна формула

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}.$$

В этом случае не рассчитываются первое и последнее значения ряда. Надстройка *Пакет анализа* MS Excel ориентирована на формулу (4.1).

Чаще всего сглаживание проводят по трем, пяти или семи членам исходного ряда. Чем больше интервал сглаживания, тем сильнее усреднение данных и менее заметны детали в поведении экономического показателя. Интервал сглаживания выбирается в зависимости от того, насколько важны старые значения исследуемого показателя по сравнению с новыми. Чем больше интервал сглаживания m, тем больший вес имеют старые значения.

Пример 4.1. Пусть имеются данные об объеме продаж некоторой фирмы, которые приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. **Исходный временной ряд и результат сглаживания методом скользящих средних**

Месяц	Порядковый номер	Фактические продажи	Расчетные продажи
Январь	1	60	–
Февраль	2	85	–
Март	3	80	75
Апрель	4	92	86
Май	5	88	87
Июнь	6	96	92

Пусть интервал сглаживания равен 3 ($m = 3$). Тогда для января и февраля сглаженные значения не рассчитываются. Для марта сглаженное значение рассчитывается по формуле (4.1):

$$\bar{y}_3 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{60 + 85 + 80}{3} = 75.$$

Для апреля сглаженное значение имеет следующее значение:

$$\bar{y}_4 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3} = \frac{85 + 80 + 92}{3} = 86.$$

Остальные значения сглаженного ряда, приведенные в табл. 4.2, рассчитываются аналогично.

Метод экспоненциального сглаживания. Этот метод позволяет при расчете очередного сглаженного значения учесть всю «предысторию» развития данного показателя. При этом учитывается степень старения данных: чем старее информация, тем с меньшим весом входит она в формулу для расчета сглаженного значения. Сглаженное значение ряда (экспоненциальная средняя) рассчитывается по следующим формулам:

$$Q_1 = y_1;$$

$$Q_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) Q_{t-1}, \text{ если } t > 1, \tag{4.2}$$

где Q_t – экспоненциальная средняя в момент времени t, которая заменяет наблюдавшееся значение y_t;

Q_{t-1} – предыдущее значение экспоненциальной средней;

α – параметр сглаживания, характеризующий вес текущего (самого нового) наблюдения ($0 \le \alpha \le 1$).

Если $\alpha = 1$, то предыдущие наблюдения полностью игнорируются, а если $\alpha = 0$, то игнорируется текущее наблюдение. Обычно используется α в диапазоне от 0,1 до 0,3. При выборе α необходимо учитывать, что для того, чтобы сглаженный ряд прошел ближе к фактическим данным, нужно повысить значение α (тем самым увеличивается вес текущих наблюдений). Однако при этом уменьшаются «фильтрационные» возможности экспоненциальной средней, т. е. ряд становится менее гладким.

Пример 4.2. Для условия примера 4.1 выполним экспоненциальное сглаживание с параметром $\alpha = 0,2$ (табл. 4.3).

Таблица 4.3 **Исходные данные и результат экспоненциального сглаживания**

Месяц	Порядковый номер	Фактические продажи	Расчетные продажи
Январь	1	60	60
Февраль	2	85	65
Март	3	80	68
Апрель	4	92	73
Май	5	88	76
Июнь	6	96	80

Первое значение сглаженного ряда равно фактическому значению $Q_1 = y_1 = 60$. Остальные значения сглаженного ряда рассчитываются по формуле (4.2)

$$Q_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)Q_1 = 0,2 \cdot 85 + 0,8 \cdot 60 = 65;$$

$$Q_3 = \alpha y_3 + (1-\alpha)Q_2 = 0,2 \cdot 80 + 0,8 \cdot 65 = 68 \text{ и т. д.}$$

4.4. Трендовые модели прогнозирования

Прогнозирование с помощью трендовых моделей основывается на методе *экстраполяции*, суть которого состоит в продлении на будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом [12]. Для корректного применения метода экстраполяции требуется соблюдение двух *условий:*

- временной ряд экономического показателя должен действительно иметь тренд, т. е. преобладающую тенденцию;
- общие условия и причины, определявшие развитие показателя в прошлом, останутся без существенных изменений и в будущем.

Как уже отмечалось, математическим выражением тенденции является функция тренда. *Функция тренда* $\tilde{y}(t)$ – это некоторая функция от времени, приближенно описывающая основную закономерность поведения исследуемого показателя. График функции тренда на плоскости называется *кривой роста*. Отклонение кривой роста от графика фактических значений временного ряда объясняется действием случайных факторов и сезонности.

Можно выделить следующие основные *этапы* прогнозирования на основе трендовых моделей:

- предварительный анализ временного ряда;
- численная оценка параметров моделей;
- оценка адекватности и точности каждой трендовой модели;
- выбор наиболее точной модели;
- расчет прогнозов по выбранной модели;
- верификация прогнозов.

Рассмотрим каждый этап более подробно.

Предварительный анализ временного ряда

Целью первого этапа является выбор одной или нескольких функций тренда для конкретного временного ряда. Если фактические значения временного ряда очень разбросаны, то первым шагом предварительного анализа может являться процедура сглаживания. Затем выбор трендовой модели осуществляется двумя основными способами: по виду графика фактических значений ряда; методом конечных разностей.

Наиболее часто в экономике используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные функции тренда. Простейшие *полиномиальные* функции тренда имеют следующий вид:

$\widetilde{y}(t) = a_1 t + a_0$ – линейная (полином 1-й степени);

$\widetilde{y}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ – полином 2-й степени;

$\widetilde{y}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ – полином 3-й степени.

Полиномиальные функции используют для прогнозирования экономических процессов, в которых последующее развитие не зависит от достигнутого уровня. *Экспоненциальные* функции, наоборот, описывают такие процессы, когда имеется эта зависимость. Чаще всего применяются две разновидности экспоненциальных функций тренда:

$\widetilde{y}(t) = ab^t$ $(a > 0, b > 0,\ b \neq 1)$ – простая экспонента;

$\widetilde{y}(t) = k + ab^t$ $(a < 0,\ 0 < b < 1)$ – модифицированная экспонента.

Строгое математическое название функции $\widetilde{y}(t) = ab^t$ – это *пока-*

зательная функция. Но поскольку ее легко привести к виду $\tilde{y}(t) = ae^{\ln b \cdot t}$, в экономике за ней закрепилось название экспоненциальной функции. В приложении MS Excel используются обе эти математические формы простой экспоненты.

S-образные функции описывают такие экономические процессы, которые сначала растут медленно, затем ускоряются и снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу. В качестве примера можно привести процесс изменения спроса на товары, обладающий способностью достигать некоторого уровня насыщения. Среди таких S-образных функций выделяют кривую Гомперца и логистическую кривую:

$$\tilde{y}_t = ka^{b^t} \ (a > 0,\ a \neq 1,\ 0 < b < 1) \text{ – кривая Гомперца;}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}} \ (a > 0,\ b > 0) \text{ – логистическая кривая.}$$

В этих формулах a_0, a_1, a_2, a_3, a, b, k – параметры тренда, т. е. числа, которые подбираются для каждого конкретного временного ряда.

Приведем следующий пример.

Пример 4.3. Имеются данные об объемах продаж некоторой фирмы за восемь недель ее работы (табл. 4.4). Будем считать, что этот ряд не требует сглаживания. Необходимо подобрать несколько функций тренда, которые могут описывать данный экономический процесс.

Таблица 4.4. **Фактические данные о продажах фирмы**

Номер недели	1	2	3	4	5	6	7	8
Объем продаж, млн р.	3,5	4,0	5,5	5,8	6,2	8,0	8,1	9,2

Построим график фактических значений ряда (рис. 4.1).

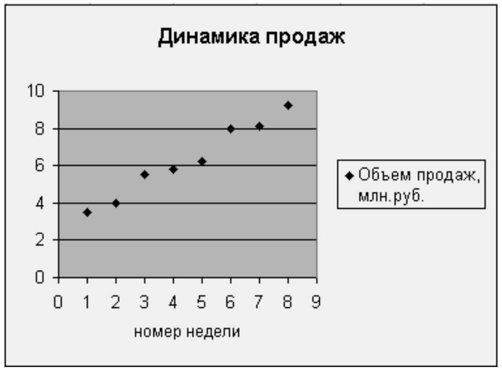


Рис.4.1. **График фактических значений временного ряда**

Точки этого графика группируются вокруг некоторой прямой, что позволяет предположить линейную зависимость объемов продаж от времени. Таким образом, можно выбрать линейный тренд:

$$\widetilde{y}(t) = a_1 t + a_0 .$$

Кроме того, близко к фактическим значениям данного ряда (рис. 4.1) может пройти и экспоненциальная кривая. Поэтому в качестве второй функции-кандидата можно предложить экспоненциальный тренд

$$\widetilde{y}(t) = ab^t .$$

Также могут быть сделаны и другие предположения относительно формы тренда, но для простоты примера они не рассматриваются.

Численная оценка параметров моделей

Для выбранной функции тренда необходимо подобрать ее параметры таким образом, чтобы график функции тренда прошел как можно ближе к фактическим данным. Для определения параметров тренда используется *метод наименьших квадратов*. Согласно этому методу, параметры тренда подбираются так, чтобы сумма квадратов разностей фактических и теоретических значений показателя была наименьшей, т. е. удовлетворяла следующему условию:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \tilde{y}(t_i)]^2 \to min, \qquad (4.3)$$

где y_i – фактическое значение показателя в момент времени t_i;

$\tilde{y}(t_i)$ – теоретическое (рассчитанное по тренду) значение показателя в момент времени t_i;

Рассмотрим следующий пример.

Пример 4.4. Для временного ряда, приведенного в табл. 4.4, рассчитаем параметры линейного тренда, т. е. найдем числовые значения a_1 и a_0 в формуле $\tilde{y}(t) = a_1 t + a_0$. Эти значения по методу наименьших квадратов находятся из условия (4.3):

$$\sum_{i=1}^{8}(y_i - a_1 t_i - a_0)^2 \to min,$$

где $t_i = \overline{1, 8}$ – номер недели;

y_1, y_2, ..., y_8 – фактические значения объемов продаж на каждой неделе, приведенные в табл. 4.4.

Выполним минимизацию этой функции, используя надстройку *Поиск решения* пакета MS Excel. На рис. 4.2 приведен вид листа Excel с результатами решения. Ячейки A13 и B13 отведены под значения параметров тренда a_1 и a_0. В них были введены начальные приближения для параметров (нулевые), а тот результат, который показан на рисунке, получен в результате работы надстройки *Поиск решения*. В столбце «Теоретическое значение» введены формулы линейного тренда, причем в качестве a_1 и a_0 используются ссылки на соответствующие ячейки. Для расчета суммы квадратов разностей фактических и теоретических значений (целевая функция) используется стандартная функция Excel СУММКВРАЗН().

	A	B	C
1	Номер недели	Объем продаж, млн.руб.	Теоретическое значение уровня ряда
2	1	3,5	=$A$13*A2+$B$13
3	2	4	=$A$13*A3+$B$13
4	3	5,5	=$A$13*A4+$B$13
5	4	5,8	=$A$13*A5+$B$13
6	5	6,2	=$A$13*A6+$B$13
7	6	8	=$A$13*A7+$B$13
8	7	8,1	=$A$13*A8+$B$13
9	8	9,2	=$A$13*A9+$B$13
10			
11	Целевая	функция	=СУММКВРАЗН(B2:B9;C2:C9)
12	a_1	a_0	
13	0,813095	2,628571507	

Рис. 4.2. **Вид листа Excel для задачи определения параметров тренда**

В окне *Поиск решения* была поставлена задача минимизации целевой ячейки С11, изменяя ячейки A13:B13. Ограничения не были заданы и в окне *Параметры* флажок «Линейная модель» не был установлен, так как целевая функция задачи не является линейной.

По результатам работы надстройки *Поиск решения* можно сделать вывод, что a_1 = 0,813; a_0 = 2,629. Таким образом, функция линейного тренда приобретает вид: $\tilde{y}(t) = 0{,}813t + 2{,}629$. Сумма квадратов разностей фактических и расчетных значений (значение ячейки С11) равна: $\sum_{i=1}^{8}[y_i - \tilde{y}(t_i)]^2 = 0{,}8015$. На рис. 4.3 показаны графики фактических значений ряда (объем продаж) и линейного тренда (теоретическое значение). Из этого рисунка видно, что график данного линейного тренда проходит близко к фактическим данным. Причем из всех возможных прямых (линейных функций) именно эта прямая более всего приближена к заданным фактическим значениям ряда.

Аналогично можно найти параметры экспоненциального тренда *a* и *b*, функция которого приобретет следующий вид: $\tilde{y}(t) = 3{,}236 \cdot 1{,}1465^t$. Соответствующая сумма квадратов разностей будет равна $\sum_{i=1}^{8}[y_i - \tilde{y}(t_i)]^2 = 1{,}3264$.

Рис. 4.3. **График фактических объемов продаж и линейного тренда**

Оценка адекватности и точности каждой трендовой модели

Под адекватностью понимается соответствие модели исследуемому процессу. Трендовая модель считается адекватной, если остаточная компонента $\varepsilon_t = y_t - \tilde{y}_t$ удовлетворяет следующим условиям:

- колебания значений остаточной компоненты случайны;
- остаточная компонента подчиняется нормальному закону распределения;
- ее математическое ожидание равно 0;
- значения остаточной компоненты независимы.

Методы доказательства адекватности – это методы статистического анализа на основе проверки гипотез по различным критериям.

Только для адекватных моделей имеет смысл ставить задачу оценки их точности. Точность оценивается как совокупная разница между фактическими значениями показателя и его соответствующими теоретическими значениями. В качестве показателя точности трендовой модели может использоваться сумма квадратов отклонений, которая была минимизирована при расчете параметров тренда, т. е. значение

$$Z = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \tilde{y}(t_i)]^2 .$$

Однако чаще точность оценивается на основании *коэффициента детерминации* (R^2), который рассчитывается по следующим формулам:

$$R^2 = 1 - \varphi^2;$$

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - \tilde{y}(t_i)]^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}, \qquad (4.4)$$

где n – количество уровней временного ряда (число наблюдений);

y_i – фактическое значение показателя в момент времени t_i;

$\tilde{y}(t_i)$ – расчетное значение показателя на основании тренда в момент времени t_i;

$\bar{y}$ – среднее арифметическое фактических значений, которое рассчитывается по формуле $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Коэффициент детерминации всегда удовлетворяет следующему условию:

$$0 \le R^2 \le 1.$$

Чем больше R^2 (ближе к единице), тем точнее модель. На практике стараются подобрать такую модель, чтобы $R^2 \ge 0{,}9$.

Выбор наиболее точной модели

Среди всех трендовых моделей, для которых были найдены параметры тренда и адекватность которых доказана, выбирают наиболее точную модель. Именно эту модель используют в дальнейшем для выполнения прогнозов.

Расчет прогнозов по выбранной модели

Прогнозы, получаемые на основе трендовых моделей, можно разделить на точечные и интервальные.

Точечный прогноз – это прогноз, которым называется единственное значение прогнозируемого показателя. Он получается подстановкой в уравнение выбранного тренда значения времени, относящегося к будущему.

Интервальный прогноз – это прогноз, дающий для каждого момента времени некоторый интервал значений, в котором можно ожидать появление прогнозируемой величины с некоторой степенью уверенности. Этот прогноз осуществляется путем расчета доверительных интервалов на основе теории регрессии.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 4.5. Оценить точность линейной и экспоненциальной трендовых моделей, построенных для временного ряда, заданного в табл. 4.4 (см. пример 4.3). Необходимо рассчитать точечные прогнозы на три недели вперед по наиболее точной модели.

В примере 4.4. была рассчитана сумма квадратов разностей фактических и теоретических значений показателя для следующих моделей:

- линейной – $Z_1 = 0{,}8015$;
- экспоненциальной – $Z_2 = 1{,}3264$.

На основании этого показателя можно сделать вывод, что линейная модель является более точной, так как $Z_1 < Z_2$.

Рассчитаем также коэффициенты детерминации линейной и экспоненциальной моделей.

Среднее арифметическое фактических значений ряда рассчитывается следующим образом:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{8}(3{,}5 + 4 + 5{,}5 + 5{,}8 + 6{,}2 + 8 + 8{,}1 + 9{,}2) = 6{,}2875.$$

Сумма квадратов отклонений фактических значений ряда от среднего вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^{8}(y_i - \bar{y})^2 = (3{,}5 - 6{,}2875)^2 + (4 - 6{,}2875)^2 + \ldots$$

$$\ldots + (9{,}2 - 6{,}2875)^2 = 28{,}56875.$$

Коэффициент детерминации линейной модели рассчитывается по формулам (4.4)

$$R_{лин}^{\ 2} = 1 - \frac{Z_1}{\sum_{i=1}^{8}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0{,}8015}{28{,}56875} = 0{,}9719.$$

Коэффициент детерминации экспоненциальной модели выявляется на основании формул (4.4):

$$R_{эксп}{}^2 = 1 - \frac{Z_2}{\sum_{i=1}^{8}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{1{,}3264}{28{,}56875} = 0{,}9570.$$

Обе рассматриваемые модели являются достаточно точными, но поскольку коэффициент детерминации линейной модели больше, именно эта модель выбирается для расчета прогнозов.

Прогноз на 9-ю неделю выполняется путем подстановки в уравнение линейного тренда значения t = 9: $\tilde{y}(9) = 0{,}813 \cdot 9 + 2{,}629 = 9{,}95$. Таким образом, на 9-й неделе ожидается объем продаж на сумму 9,95 млн р. Аналогично находим прогнозы на 10-ю и 11-ю недели:

$$\tilde{y}(10) = 0{,}813 \cdot 10 + 2{,}629 = 10{,}76;$$

$$\tilde{y}(11) = 0{,}813 \cdot 11 + 2{,}629 = 11{,}57.$$

Точечные прогнозы лежат на линии тренда, продолжая ее на будущее.

Верификация прогноза

Верификацией называется совокупность способов, критериев и процедур, позволяющих на основе многостороннего анализа оценить качество получаемого прогноза. До сих пор не найдено эффективного подхода к оценке качества прогноза до его реализации. После же реализации прогноза верификация сводится к сопоставлению расчетных результатов с данными действительности. Такой подход дает оценку не самого прогноза, а метода прогнозирования, с помощью которого он был получен. Даже если прогноз не оправдался, нельзя сказать, что он был бесполезен, так как пользователь, зная прогноз, мог повлиять на развитие событий. Верификация имеет смысл только для интервальных прогнозов, так как точечные, как правило, никогда не оправдываются.

4.5. Возможности пакета MS Excel для решения задач прогнозирования

В состав MS Excel входит надстройка *Пакет анализа*, которая вызывается командой *Сервис/Анализ данных…* Она включает в себя набор средств статистического анализа данных, в том числе возможность выполнения сглаживания временного ряда методом скользящих средних и методом экспоненциального сглаживания. Выбор любого из этих инструментов анализа приводит к появлению на экране диалогового окна, которое включает следующие поля:

- *Входной интервал* – это диапазон фактических значений временного ряда.
- *Выходной интервал* – это адрес ячейки, с которой начнется вывод расчетных (сглаженных) значений.
- *Фактор затухания* (для метода экспоненциального сглаживания) – это значение параметра сглаживания, равное $1 - \alpha$.
- *Интервал* (для метода скользящих средних) – значение сглаживания m.

Кроме того, можно установить флажок *Вывод графика* для автоматического построения графиков фактических и сглаженных значений временного ряда.

Для определения параметров трендовой модели прогнозирования можно использовать надстройку *Поиск решения*, как было показано выше. Достоинство этого подхода в том, что он позволяет рассчитывать параметры любой трендовой модели, в том числе и нестандартной.

Команда *Добавить линию тренда…* позволяет легко и просто определить параметры и коэффициент детерминации для пяти основных типов трендовых моделей: линейной, экспоненциальной, логарифмической, степенной и полиномиальной (до 6-й степени). Чтобы использовать эту команду, нужно построить график фактических значений ряда, щелчком мыши по любой точке графика выделить данный ряд и вызвать контекстное меню, как показано на рис. 4.4.

Далее в диалоговом окне нужно выбрать тип трендовой модели и на вкладке *Параметры* установить флажки:

- *Показывать уравнение на диаграмме*;
- *Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации* (R^2).

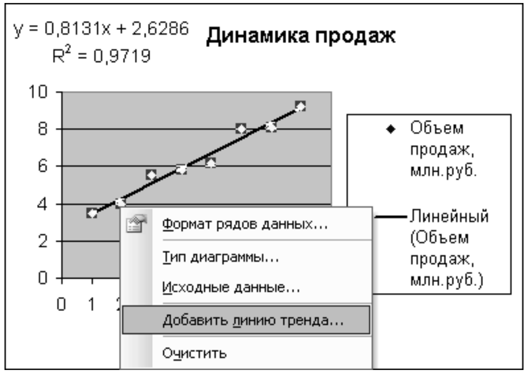


Рис. 4.4. **Графический способ определения параметров трендовой модели**

Результатом выполнения команды *Добавить линию тренда…* является построение линии тренда на графике, а также вывод на график уравнения тренда и коэффициента детерминации R^2. Последовательно выводя на график различные трендовые модели и сравнивая их коэффициенты детерминации, можно осуществить выбор наиболее подходящей модели.

В состав пакета MS Excel также входят встроенные функции для расчета параметров трендовых моделей и прогнозных значений [2]. Они принадлежат к категории *Статистические*. Эти функции можно применять только для двух основных видов тренда: линейного и экспоненциального.

Встроенные функции для определения параметров тренда:

- НАКЛОН (изв_знач_*y*; изв_знач_*x*) определяет коэффициент наклона линейного тренда к оси абсцисс (коэффициент a_1);
- ОТРЕЗОК (изв_знач_*y*; изв_знач_*x*) определяет точку пересечения линейного тренда с осью ординат (коэффициент a_0);
- ЛИНЕЙН (изв_знач_*y*; изв_знач_*x*; константа; статистика) возвращает массив коэффициентов (a_m, a_{m-1}, …, a_1, a_0) многомерной линейной регрессии следующего вида:

$$\widetilde{y}(X_1, X_2, ..., X_m) = a_m X_m + a_{m-1} X_{m-1} + ... + a_1 X_1 + a_0\,;$$

- ЛГРФПРИБЛ (изв_знач_*y*; изв_знач_*x*; константа; статистика) возвращает параметры (b_m, b_{m-1}, …, b_1, a) экспоненциальной многофакторной модели

$$\widetilde{y}(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_m) = a b_1^{X_1} b_2^{X_2} ... b_m^{X_m}\ .$$

Поясним значения аргументов приведенных функций.

Изв_знач_y – это диапазон ячеек, содержащих фактические значения показателя (значения y_i).

Изв_знач_x – это диапазон ячеек, содержащих значения моментов времени, для которых были измерены фактические значения показателя (значения t_i).

Константа для функции ЛИНЕЙН() показывает, требуется равенство $a_0 = 0$. Если константа равна значению ИСТИНА или опущена, то a_0 вычисляется обычным образом. Для функции ЛГРФПРИБЛ() константа показывает, требуется ли значение a вычислять обычным образом (значение ИСТИНА), или необходимо, чтобы $a = 1$ (значение ЛОЖЬ). Ввод числа 1 равносилен вводу значения ИСТИНА.

Аргумент *статистика* показывает, требуется ли вывести дополнительную статистику по регрессии. Если *статистика* равна значению ИСТИНА, то выдается дополнительная информация, если же статистика равна значению ЛОЖЬ или опущена, то дополнительной информации нет. Фунции ЛИНЕЙН() и ЛГРФПРИБЛ() в качестве результата выдают массив значений. Причем, если статистика не требуется, то результат – одна строка и k столбцов, где k – количество параметров регрессии, которые нужно определить. Если же задан аргумент *статистика* = ИСТИНА, то результат будет занимать пять строк и k столбцов. Дополнительные четыре строки заполняются различными статистическими характеристиками тренда. При этом в третьей строке первого столбца находится коэффициент детерминации R^2 для оценки точности модели.

Встроенные функции для получения точечных прогнозов:

- ПРЕДСКАЗ (x; изв_знач_y; изв_знач_x) вычисляет теоретическое значение $\tilde{y}_x$ в одной точке x на основе линейной модели.
- ТЕНДЕНЦИЯ (изв_знач_y; изв_знач_x; нов_знач_x; константа) вычисляет теоретическое значение на основе линейной модели для целого диапазона новых значений x.
- РОСТ (изв_знач_y; изв_знач_x; нов_знач_x; константа) вычисляет значение экспоненциального тренда $y = ab^x$ для диапазона новых значений x.

Таким образом, функции для получения точечных прогнозов объединяют два этапа прогнозирования: определение параметров тренда на основе метода наименьших квадратов и использование найденных параметров для выполнения прогноза.

Ввод функций ЛИНЕЙН(), ЛГРФПРИБЛ(), ТЕНДЕНЦИЯ() и РОСТ() должен начинаться с выделения диапазона ячеек Excel, в которых будет размещен результат их работы, а заканчиваться одновременным нажатием клавиш *Ctrl+Shift+Enter*.

Тема 5. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

5.1. Основные понятия сетевого планирования

Метод сетевого планирования и управления (СПУ) используется при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ (проектов) [6], [8], [12]. Анализ сетевой модели позволяет решить следующие задачи:

- четко выявить взаимосвязь различных этапов проекта, условия начала тех или иных работ;
- определить срок выполнения проекта;
- выявить возможности задержки начала каждой работы или удлинения срока ее выполнения;
- оптимизировать время выполнения проекта или ресурсы, требуемые для его выполнения.

Основой метода СПУ является *сетевой график* – графическая модель некоторого комплекса взаимосвязанных работ (проекта или производственного процесса). Сетевой график отражает логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него работ. С математической точки зрения сетевой график представляет собой ориентированный граф без контуров, дугам которого приписаны некоторые числовые значения.

Дугам графа соответствуют отдельные работы проекта. Различают три вида работ:

- *действительная работа* ($\longrightarrow$) – любой трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность (разработка проекта, подвоз материалов, монтаж оборудования и т. д.);
- *ожидание* ($- \cdot - \cdot \rightarrow$) – процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность (затвердение бетона, сушка штукатурки, рост растений и т. д.);
- *фиктивная работа* ($- - \rightarrow$) отражает логическую зависимость между действительными работами. Не требует ресурсов и имеет нулевую продолжительность.

Над дугой графа может быть указана числовая характеристика работы (например, время ее выполнения).

Вершинам графа соответствуют события. *Событие* означает факт окончания всех работ, в него входящих, и начала всех работ, из него исходящих. Событие не имеет продолжительности и не потребляет ресурсов.

Событие в сетевом графике имеет номер. Работа может обозначаться двумя способами:

- парой номеров (i, j), где i – номер начального события работы, а j – номер конечного события работы;
- буквенно-числовым обозначением с номером работы (a_1, b_2 и т. д.).

Продолжительность работы обозначается $t\,(i, j)$.

Событие, с которого начинается выполнение проекта, называется *исходным* (I). Исходное событие не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим* (S). Завершающее событие не имеет последующих работ.

Приведем следующий пример.

Пример 5.1. Рассмотрим сетевой график выполнения ремонта в одной комнате (рис. 5.1). Этот проект включает следующие работы:

(1, 2) – побелка потолка (3 дня);

(1, 4) – покупка обоев (2 дня);

(1, 5) – покупка краски для пола (1 день);

(2, 3) – покраска окна (1 день);

(2, 4) – очистка стен (2 дня);

(3, 6) – фиктивная работа, отражающая тот факт, что пока не закончена покраска окна, нельзя начинать клеить обои;

(4, 5) – оклейка стен обоями (3 дня);

(5, 6) – окраска пола (1 день);

(6, 7) – ожидание высыхания пола (2 дня).

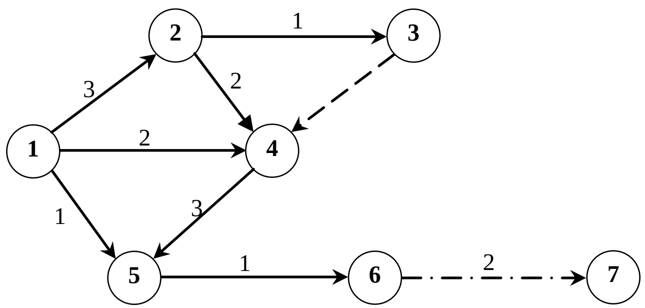


Рис. 5.1. **Сетевой график ремонта**

Событие 1 является исходным. Этим событием одновременно начинаются три работы: побелка потолка (1, 2), покупка обоев (1, 4) и покупка краски (1, 5).

Событие 2 означает факт окончания побелки (работы (1, 2)) и начала работ по очистке стен (2, 4) и покраске окна (2, 3).

Работа по оклейке стен обоями (4, 5) может начаться только в том случае, если свершится событие 4, т. е. будут закончены работы по очистке стен (2, 4) и покупке обоев (1, 4). Кроме того, фиктивная работа (3, 4) означает, что событие 4 свершится и работа (4, 5) может начаться только тогда, когда закончится работа (2, 3) по покраске окна.

Событие 5 есть факт окончания работ (1, 5) и (4, 5). Если хотя бы одна из этих работ не закончена, событие 5 не наступит и работа (5, 6) не начнется.

Работа (6, 7) есть ожидание, т. е. она не требует финансовых затрат, но имеет продолжительность во времени.

Событие 7 есть завершающее событие проекта.

5.2. Построение сетевого графика

При построении сетевого графика необходимо соблюдать следующие правила:

- В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга и событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одна дуга.
- Сетевой график не должен содержать контуров.
- Любая пара событий сетевого графика может быть соединена не более чем одной дугой. Если нужно изобразить параллельно выполняемые работы с общими начальными и конечными событиями, то рекомендуется ввести дополнительные события и соединить их с последующим событием фиктивными работами. Пусть, например, имеются три различные работы a_1, a_2 и a_3, которые начинаются одним событием 2 и заканчиваются одним событием 5 (рис. 5.2).

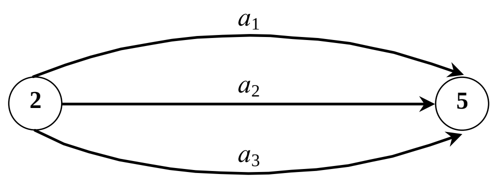


Рис. 5.2. **Фрагмент неверного сетевого графика**

В этой ситуации может возникнуть путаница из-за того, что различные работы имеют одно и то же обозначение (2, 5). Чтобы избежать этого, введем фиктивные работы, как показано на рис. 5.3.

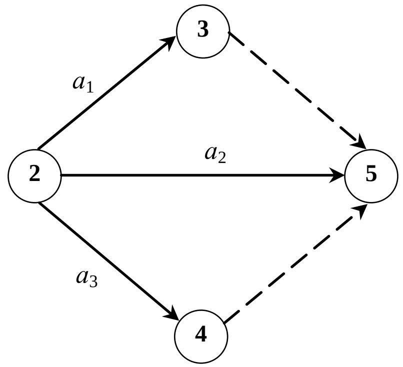


Рис. 5.3. **Правильное изображение параллельных работ**

- События должны быть пронумерованы так, чтобы для любой работы (i, j) номер конечного события был больше номера начального $(j > i)$.
- Желательно, чтобы дуги сетевого графика не пересекались.

Построение сетевого графика начинается с составления списка работ, подлежащих выполнению. Для каждой работы определяется ее продолжительность и предшествующие ей работы.

Приведем следующий пример.

Пример 5.2. Предприятие собирается принять участие в выставке, продемонстрировав образцы своей продукции. Перечень работ по организации выставки приведен в табл. 5.1.

Таблица 5.1. **Перечень работ по организации выставки для демонстрации образцов продукции**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дней
Отбор образцов	a_1	–	5
Изготовление рекламных материалов и приглашений	a_2	a_1	12
Изготовление стендов	a_3	a_1	4
Доставка образцов в выставочный зал	a_4	a_1	2

Окончание табл. 5.1

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дней
Доставка стендов в выставочный зал	a_5	a_3	2
Монтаж стендов	a_6	a_5	2
Установка образцов на стендах	a_7	a_4, a_6	3
Оформление зала рекламными материалами	a_8	a_2, a_7	2
Репетиция открытия выставки	a_9	a_8	1
Рассылка приглашений	a_{10}	a_2, a_7	1

Построим сетевой график этого проекта. Чтобы соблюсти все правила построения сетевого графика, прибегнем к следующей неформальной процедуре.

Построение начинается с изображения исходного события 1, из которого выходят работы, не имеющие предшествующих.

Работа изображается дугой, выходящей из начального события этой работы. Изображение конечного события работы будем откладывать, насколько это возможно.

Далее последовательно изображаем каждую работу, приведенную в табл. 5.1. Если ей предшествует другая работа, то вводим событие, означающее конец этой предшествующей работы, и из него начинаем новую дугу.

Если же работе предшествуют несколько работ, то нужно дуги, изображающие эти предшествующие работы, свести к одному событию, т. е. ввести вершину графа, в которую входят все предшествующие работы, и из этой вершины начать новую работу (при этом возможно, придется перерисовать график).

Таким образом, новое событие вводится только тогда, когда нужно *начать* какую-либо работу.

Номера событиям (вершинам графа) даются последовательно по мере их появления в модели. Такой подход обеспечивает правильную нумерацию событий.

Когда изображены все работы, приведенные в табл. 5.1, нужно проанализировать, какие работы не имеют последующих (не имеют пока конечных событий на графике). Все эти работы следует свести к одной вершине, которая и будет являться завершающим событием проекта. Поскольку проект будет закончен только тогда, когда закончатся все его работы, факт окончания всех не законченных ранее работ и будет являться фактом окончания проекта.

Более подробно описание процесса построения сетевого графика приведено в практикуме для лабораторных работ [15].

Сетевой график данного примера приведен на рис. 5.4.

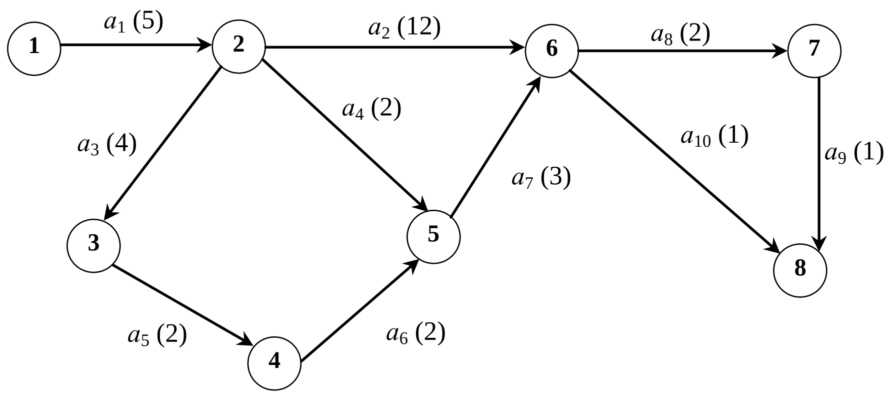


Рис. 5.4. **Сетевой график организации выставки**

5.3. Временные параметры сетевого графика

Полный путь (μ) в сетевом графике – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих исходное и завершающее события. В примере 5.2 можно выделить следующие полные пути (они обозначаются номерами событий, через которые проходят):

$$\mu_1 = (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8);$$

$$\mu_2 = (1 – 2 – 5 – 6 – 7 – 8);$$

$$\mu_3 = (1 – 2 – 6 – 7 – 8);$$

$$\mu_4 = (1 – 2 – 6 – 8);$$

$$\mu_5 = (1 – 2 – 5 – 6 – 8);$$

$$\mu_6 = (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 8).$$

Критическим называется полный путь, имеющий *наибольшую* продолжительность во времени. Критических путей на сетевом графике может быть несколько (при этом все они имеют одинаковую продолжительность). Критический путь принято выделять на графике жирной линией.

Продолжительность критического пути определяет *критический срок* проекта ($t_{кр}$). Все остальные (некритические) полные пути выполняются параллельно с критическим путем (цепочкой работ) и завершаются раньше. Критический срок, таким образом, показывает, за какое *минимальное* время может быть завершен весь проект. Очевидно, что увеличение сроков выполнения проекта больше $t_{кр}$ невыгодно.

Работы, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Они не имеют резервов времени. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего проекта.

Самый очевидный способ определения критического срока проекта – это перебрать все полные пути, рассчитать продолжительность каждого из них T (μ) и выбрать полный путь наибольшей продолжительности:

$$T(\mu_1) = 5 + 4 + 2 + 2 + 3 + 2 + 1 = 19;$$

$$T(\mu_2) = 5 + 2 + 3 + 2 + 1 = 13;$$

$$T(\mu_3) = 5 + 12 + 2 + 1 = 20;$$

$$T(\mu_4) = 5 + 12 + 1 = 18;$$

$$T(\mu_5) = 5 + 2 + 3 + 1 = 11;$$

$$T(\mu_6) = 5 + 4 + 2 + 2 + 3 + 1 = 17.$$

Критическим является полный путь μ_3, так как он имеет наибольшую продолжительность, равную 20. Критический срок проекта $t_{кр} = 20$, что означает что весь проект может быть выполнен не ранее, чем за 20 дней.

Однако, если сетевой график достаточно сложный, перебрать все возможные пути затруднительно. Поэтому используют более формальный подход: 1) Для каждого события рассчитывают ранний и поздний сроки свершения. 2) На их основе определяют резервы времени всех событий и работ. 3) Проводят критический путь по тем работам и событиям, которые не имеют резерва времени.

Ранний срок свершения события – это самый ранний момент, к которому завершаются *все* работы, предшествующие этому событию.

Ранний срок свершения события рассчитывается последовательно для каждого события от исходного к завершающему по следующим формулам:

$$\begin{cases} t_p(I) = 0; \\ t_p(j) = \max\limits_{i \to j}\{t_p(i) + t(i, j)\}, \end{cases} \qquad (5.1)$$

где $i \to j$ – множество работ, заканчивающихся j-м событием (дуги, входящие в вершину j);

$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i, j);

$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Ранний срок свершения завершающего события совпадает с критическим сроком: $t_{кр} = t_p(S)$.

Поздний срок свершения события – это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения к критическому сроку всех работ, следующих за этим событием.

Поздние сроки свершения событий рассчитываются в обратном порядке от завершающего события к исходному по следующим формулам:

$$\begin{cases} t_n(S) = t_p(S) = t_{кр}; \\ t_n(i) = \min\limits_{i \to j}\{t_n(j) - t(i, j)\}, \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $i \to j$ – множество работ, начинающихся i-м событием (дуги, исходящие из вершины i);

$t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i, j);

$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Резерв времени события показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения критического срока проекта. Резерв времени события равен разности между его поздним и ранним сроками свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i). \qquad (5.3)$$

Для событий, принадлежащих критическому пути, ранний и поздний сроки свершения совпадают. Поэтому критические события не имеют резерва времени.

Временные параметры работ определяются на основе параметров свершения событий.

Ранний срок начала работы равен раннему сроку свершения начального события работы:

$$t_{рн}(i, j) = t_p(i) . \qquad (5.4)$$

Ранний срок окончания работы равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности:

$$t_{po}(i, j) = t_p(i) + t(i, j) . \qquad (5.5)$$

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:

$$t_{no}(i, j) = t_n(j) . \qquad (5.6)$$

Полный резерв времени работы – это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R(i, j) = t_{no}(i, j) - t_{po}(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j) . \qquad (5.7)$$

Критические работы резервов времени не имеют.

Приведем следующий пример.

Пример 5.3. Рассчитаем временные параметры событий и работ для сетевого графика примера 5.2. Результаты расчетов запишем непосредственно на сетевом графике. Каждый кружок, изображающий событие, разделим на четыре сектора (рис. 5.5).

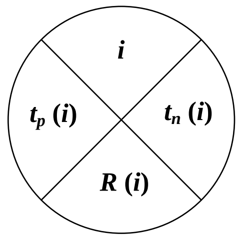


Рис. 5.5. **Представление параметров события на сетевом графике**

В верхнем секторе запишем номер события, в левом по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_p(i)$ свершения события i, в правом – поздний срок $t_n(i)$ этого события, а в нижнем – резерв времени $R(i)$ события.

Сетевой график организации выставки с результатами расчета параметров событий показан на рис. 5.6. Жирной линией выделен критический путь.

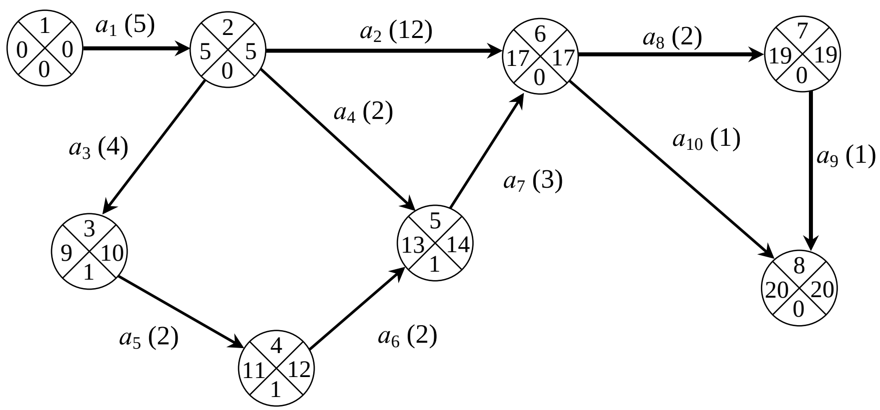


Рис. 5.6. **Параметры событий сетевого графика**

Разобъем процесс решения задачи на несколько шагов.

1 шаг. Определение ранних сроков свершения событий от исходного к завершающему. $t_p(1) = 0$ (расчет времени начинается с 0).

Событие 2 наступит тогда, когда закончится работа a_1. Эта работа начнется в момент времени 0 и продлится 5 дней. Поэтому она закончится на 5-й день:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1, 2) = 0 + 5 = 5.$$

Аналогично рассчитываются ранние сроки событий 3 и 4, в которые входит одна работа:

$$t_p(3) = t_p(2) + t(2, 3) = 5 + 4 = 9;$$

$$t_p(4) = t_p(3) + t(3, 4) = 9 + 2 = 11.$$

В вершину 5 входят две стрелки, т. е. событие 5 наступит тогда, когда закончатся обе работы: a_4 и a_6. Работа a_4 начнется в 5-й день и продолжится 2 дня, т. е. она закончится на 7-й день (5 + 2). Аналогично работа a_6 закончится на 13-й день (11 + 2). Поскольку обе работы должны закончиться, чтобы наступило событие 5, нужно ориентироваться на самую позднюю из них, т. е. взять максимум по входящим в событие работам:

$$t_p(5) = max\{t_p(2) + t(2, 5), t_p(4) + t(4, 5)\} = max\{5 + 2, 11 + 2\} = 13.$$

Аналогично находят ранние сроки остальных событий проекта:

$$t_p(6) = max\{t_p(2) + t(2, 6), t_p(5) + t(5, 6)\} = max\{5 + 12, 13 + 3\} = 17;$$

$$t_p(7) = t_p(6) + t(6, 7) = 17 + 2 = 19;$$

$$t_p(8) = max\{t_p(6) + t(6, 8), t_p(7) + t(7, 8)\} = max\{17 + 1, 19 + 1\} = 20.$$

Критический срок проекта совпадает с ранним сроком свершения завершающего события: $t_{кр} = t_p(8) = 20$.

2 шаг. Определение поздних сроков свершения событий выполняется в обратном порядке – от завершающего события к исходному.

Для завершающего события $t_п(8) = t_p(8) = 20$.

Рассчитывая поздний срок свершения события 7, необходимо учитывать, что этим событием начинается работа a_9, которая должна быть обязательно закончена к 20-му дню. Она длится 1 день, поэтому самый поздний момент, когда она должна начаться, – это 19-й день (20 – 1). Если вдруг событие 7 наступит, скажем, на 20-й день, то работа a_9 закончится на 21-й день (20 + 1) и срок выполнения всего проекта будет сорван. Поэтому можно записать для события 7 следующее равенство:

$$t_п(7) = t_п(8) - t(7, 8) = 20 - 1 = 19.$$

Событием 6 начинаются две работы: a_8 и a_{10}. Обе они должны успеть закончиться вовремя, т. е. работа a_8 – к 19-му дню, а работа a_{10} – к 20-му дню. Для этого работа a_8 должна начаться на 17-й день (19 – 2), а работа a_{10} должна начаться на 19-й день (20 – 1). Чтобы успели закончиться вовремя обе эти работы, нужно, ориентироваться на ту из них, которая должна начаться раньше. Поэтому нужно найти минимум по исходящим из события работам, используя формулу (5.2):

$$t_n(6) = min\{t_n(7) - t(6,7), t_n(8) - t(6,8)\} = min\{19 - 2, 20 - 1\} = 17.$$

Аналогично находятся поздние сроки свершения остальных событий проекта:

$$t_n(5) = t_n(6) - t(5,6) = 17 - 3 = 14;$$

$$t_n(4) = t_n(5) - t(4,5) = 14 - 2 = 12;$$

$$t_n(3) = t_n(4) - t(3,4) = 12 - 2 = 10;$$

$$t_n(2) = min\{t_n(6) - t(2,6), t_n(5) - t(2,5), t_n(3) - t(2,3)\} =$$
$$= min\{17 - 12, 14 - 2, 10 - 4\} = 5;$$

$$t_n(1) = t_n(2) - t(1,2) = 5 - 5 = 0.$$

3 шаг. Определение резервов времени событий производится по формуле (5.3):

$$R(1) = t_n(1) - t_p(1) = 0 - 0 = 0;$$

$$R(2) = t_n(2) - t_p(2) = 5 - 5 = 0;$$

$$R(3) = t_n(3) - t_p(3) = 10 - 9 = 1;$$

$$R(4) = t_n(4) - t_p(4) = 12 - 11 = 1;$$

$$R(5) = t_n(5) - t_p(5) = 14 - 13 = 1;$$

$$R(6) = t_n(6) - t_p(6) = 17 - 17 = 0;$$

$$R(7) = t_n(7) - t_p(7) = 19 - 19 = 0\,;$$

$$R(8) = t_n(8) - t_p(8) = 20 - 20 = 0\,.$$

Таким образом, события 3, 4 и 5 можно задержать на один день, а события 1, 2, 6, 7 и 8 должны наступить точно в срок, т. е. они не имеют резервов времени. Именно через эти события проходит критический путь $\mu_3 = (1 - 2 - 6 - 7 - 8)$. Для проверки нужно сложить продолжительность работ этого полного пути, которые в сумме должны быть равны критическому сроку:

$$5 + 12 + 2 + 1 = 20 = t_{кр}.$$

4 шаг. Определение параметров работ. Критические работы, как известно, резервов времени не имеют. Поэтому будем рассматривать только некритические работы. Расчеты параметров некритических работ приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2. **Параметры некритических работ**

Работы	$t(i, j)$	$t_{рн}(i, j)$	$t_{ро}(i, j)$	$t_{по}(i, j)$	$R(i, j)$
$a_3 = (2, 3)$	4	5	9	10	1
$a_4 = (2, 5)$	2	5	7	14	7
$a_5 = (3, 4)$	2	9	11	12	1
$a_6 = (4, 5)$	2	11	13	14	1
$a_7 = (5, 6)$	3	13	16	17	1
$a_{10} = (6, 8)$	1	17	18	20	2

Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком свершения начального события работы:

$$t_{рн}(2, 3) = t_p(2) = 5\,;$$

$$t_{рн}(2, 5) = t_p(2) = 5\,;$$

$$t_{рн}(3, 4) = t_p(3) = 9 \text{ и т. д.}$$

Ранний срок окончания работы рассчитывается как сумма раннего срока начала и продолжительности работы:

$$t_{ро}(2,\ 3) = t_{рн}(2,\ 3) + t(2,\ 3) = 5 + 4 = 9\,;$$

$$t_{ро}(2,\ 5) = t_{рн}(2,\ 5) + t(2,\ 5) = 5 + 2 = 7\,;$$

$$t_{ро}(3,\ 4) = t_{рн}(3,\ 4) + t(3,\ 4) = 9 + 2 = 11 \text{ и т. д.}$$

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения конечного события работы:

$$t_{по}(2,\ 3) = t_{п}(3) = 10\,;$$

$$t_{по}(2,\ 5) = t_{п}(5) = 14\,;$$

$$t_{по}(3,\ 4) = t_{п}(4) = 12 \text{ и т. д.}$$

Полный резерв времени работы равен разности между поздним и ранним сроками ее окончания:

$$R(2,3) = t_{по}(2,3) - t_{ро}(2,3) = 10 - 9 = 1\,;$$

$$R(2,5) = t_{по}(2,5) - t_{ро}(2,5) = 14 - 7 = 7\,;$$

$$R(3,4) = t_{по}(3,4) - t_{ро}(3,4) = 12 - 11 = 1 \text{ и т. д.}$$

Итак, данный проект может быть выполнен за 20 дней. При этом работы a_1, a_2, a_8 и a_9 являются критическими, т. е. должны быть выполнены точно в срок. Остальные работы имеют резервы времени, величина которых приведена в последнем столбце табл. 5.2. Данные работы можно позже начать или затянуть время их выполнения на величину этого резерва, и при этом срок выполнения всего проекта не изменится.

5.4. Оптимизация сетевого графика

Можно выделить две основные постановки задачи оптимизации сетевого графика:

1. Минимизация времени выполнения проекта при заданных ресурсах, которая может быть сформулирована в виде следующей задачи математического программирования:

$$F = t_{кр} \to min;$$

$$r \le r^{выд},$$

где r – требуемые ресурсы;
$r^{выд}$ – выделенные ресурсы.

2. Минимизация требуемых ресурсов, обеспечивающих выполнение проекта в заданный период времени, математическая модель которой имеет следующий вид:

$$F = r \to min;$$

$$t_{кр} \le t^{зад},$$

где $t^{зад}$ – заданное время выполнения проекта.

Рассмотрим задачу по минимизации времени выполнения проекта. Сокращение времени выполнения работ может быть достигнуто за счет вложения в них некоторых ресурсов. Такими ресурсами являются, например, трудовые ресурсы или машины, а также универсальный ресурс – финансы. При вложении дополнительного количества финансов в работу сокращение ее длительности достигается за счет следующих факторов:

- найма дополнительного количества рабочих;
- улучшения организации работ;
- автоматизации производственных процессов;
- применения передовых технологий и т. д.

Далее в качестве ресурса будут рассматриваться только финансы. При этом будем считать, что каждая работа (a_i, $i = \overline{1, n}$) характеризуется некоторой трудоемкостью (Q_i, $i = \overline{1, n}$), а время выполнения работы (t_i) обратно пропорционально величине вложенных в нее финансов (r_i). Это можно выразить следующей формулой:

$$t_i = \frac{Q_i}{r_i} \quad (i = \overline{1, n}),$$

где n – количество работ проекта.

В общем случае зависимость времени выполнения работы от величины вложенных в работу финансов может выражаться и другой убывающей функцией (например, линейной). Для определения конкретного вида этой функции следует построить уравнение регрессии на основе фактических данных о длительности работ и соответствующих вложенных в работу финансах.

Однако насыщение любой работы финансами небеспредельно. Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения, которое определяется технологическими особенностями этой работы. Это утверждение можно выразить следующим неравенством:

$$t_i \geq d_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

где d_i – минимально возможное время выполнения работы.

Критический срок проекта зависит как от длительности работ этого проекта (t_i), так и от логической последовательности и взаимозависимости работ. Пусть L – это логическая зависимость работ, которая задается в виде сетевого графика. Тогда критический срок проекта ($t_{кр}$) можно представить в виде следующей функции:

$$t_{кр} = f(L, t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Функция f чаще всего не имеет конкретного математического вида, но легко может быть задана в приложении MS Excel с помощью цепочки ссылок и простейших функций [15].

Сокращение времени выполнения проекта возможно как за счет внутренних резервов, так и внешних дополнительных средств. В первом случае у работ, имеющих резервы времени, забирают ресурсы и передают их работам, лежащим на критическом пути. Это позволяет сократить длительность критических работ. В случае использования внешних дополнительных средств, их также стараются вложить сначала в критические работы.

Приведем следующий пример.

Пример 5.4. Для сетевого графика организации выставки (см. рис. 5.4) выполним сокращение критического срока за счет внутренних резервов. Допустим, что первоначально все десять работ проекта имеют по 10 единиц финансов каждая. Тогда если время выполнения работы обратно пропорционально вложенным в нее ресурсам, то трудоемкость каждой работы должна соответствовать данным, приведенным в табл. 5.3.

Таблица 5.3. **Продолжительность и трудоемкость работ**

Работа	Продолжительность, t_i	Трудоемкость, Q_i	Финансы, r_i
a_1	5	50	10
a_2	12	120	10
a_3	4	40	10
a_4	2	20	10
a_5	2	20	10
a_6	2	20	10
a_7	3	30	10
a_8	2	20	10
a_9	1	10	10
a_{10}	1	10	10

Работа a_4 имеет длительность 2 дня и резерв времени – 7 дней (см. табл. 5.2). Если забрать от нее 5 единиц финансов, то ее продолжительность станет равна 4 дням:

$$t_4 = \frac{Q_4}{10-5} = \frac{20}{5} = 4\,.$$

Таким образом, продолжительность работы a_4 увеличится в пределах резерва времени этой работы.

Передадим высвободившиеся 5 единиц финансов критической работе a_1. Тогда ее продолжительность будет равна примерно 3 дням:

$$t_1 = \frac{Q_1}{10+5} = \frac{50}{15} \approx 3{,}3\,.$$

Критический срок проекта сократится до 18,3 дней, а критический путь останется неизменным (рис. 5.7).

Если же вложить 5 единиц финансов не в работу a_1, а в работу a_2, то длительность работы a_2 станет равна 8 дням:

$$t_2 = \frac{Q_2}{10+5} = \frac{120}{15} = 8\,.$$

Критический путь изменится и пройдет через события (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8). Критический срок сократится только до 19 дней (рис. 5.8.)

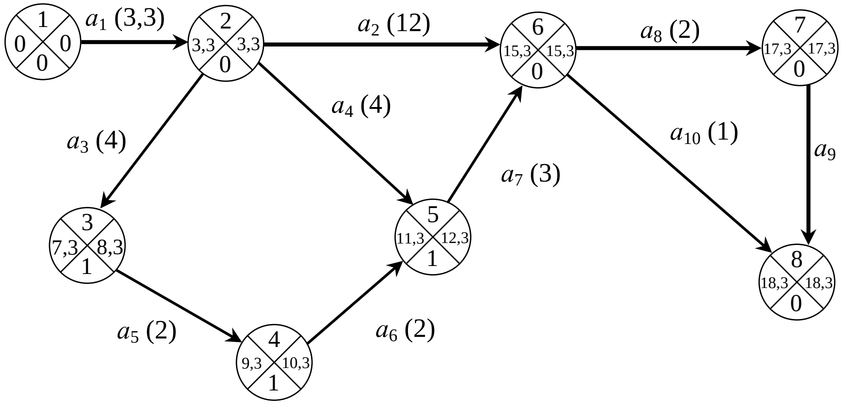


Рис. 5.7. **Первый вариант перераспределения ресурсов**

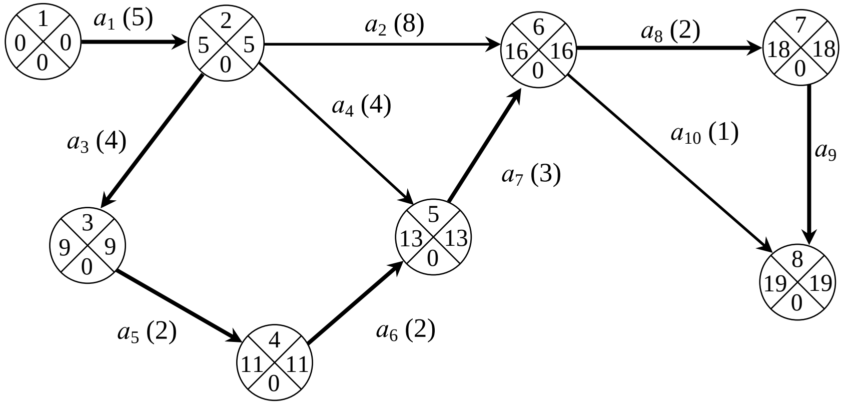


Рис. 5.8. **Второй вариант перераспределения ресурсов**

Таким образом, задача оптимизации перераспределения ресурсов не является тривиальной. Она может быть формализована в виде следующей задачи математического программирования:

$$F = t_{кр} \to min;$$

$$\begin{cases} t_{кр} = f(L, t_1, t_2, ..., t_n); \\ t_i = \dfrac{Q_i}{r_i} \quad (i = \overline{1, n}); \\ t_i \geq d_i \quad (i = \overline{1, n}); \\ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \leq r^{выд} \end{cases}$$

Если $r^{выд}$ – это то же количество ресурсов, что планировалось вначале, то мы имеем задачу отыскания внутренних резервов. Если же $r^{выд} > r^{выд}_{нач}$, то это задача оптимизации вложения дополнительных средств. Решение этой задачи может быть найдено с помощью компьютера, например, в приложении MS Excel [15].

Тема 6. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

6.1. Принципиальная схема межотраслевого баланса

Под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым количеством продукции и общей потребностью в этой продукции. Балансовые модели относятся к типу матричных экономико-математических моделей. Важнейшим видом балансовых моделей являются модели межотраслевого баланса (МОБ). Они используются для анализа и планирования обмена продукцией между отраслями народного хозяйства [11].

В модели МОБ все народное хозяйство представляется в виде совокупности n отраслей (промышленность, сельское хозяйство и т. д.). При этом используется понятие чистой (или технологической) отрасли, т. е. условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта, независимо от ведомственной подчиненности и форм собственности предприятий и фирм. Деление на отрасли можно выполнить и для более мелких систем, таких как некоторое конкретное производство. Каждая отрасль выпускает продукцию, часть которой потребляется другими отраслями и ею самой, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее конечного результата. Таким образом, каждая отрасль рассматривается одновременно и как производящая, и как потребляющая.

Валовой продукцией отрасли X_i $(i = \overline{1, n})$ называется вся производимая данной отраслью продукция. Распределение этой продукции можно условно разделить на две части: промежуточную и конечную продукцию.

Промежуточной называется продукция, потребленная внутри системы отраслей для нужд производства. Таким образом, промежуточная продукция, которую произвела одна из отраслей, для другой отрасли выступает в качестве ресурса. Обозначим через x_{ij} объем продукции, произведенной в i-й отрасли и потребленной в j-й отрасли $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, n})$.

Конечной продукцией отрасли Y_i $(i = \overline{1, n})$ называется та часть произведенной в этой отрасли продукции, которая выходит за пределы системы (на внешнее потребление, на рынок, в другие системы).

Принципиальная схема МОБ представлена в виде табл. 6.1.

Таблица 6.1. **Принципиальная схема межотраслевого баланса**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n

Раздел конечной продукции в этой схеме дан укрупненно в виде одного столбца величин Y_i. В развернутой схеме баланса конечный продукт каждой отрасли может быть показан дифференцированно по следующим направлениям использования: на личное потребление населения, общественное потребление, на накопление, экспорт и др. Этот столбец характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода, а в развернутом виде – и распределение национального дохода.

Если рассмотреть схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, то очевидно, что валовая продукция (вся продукция, произведенная отраслью) равна сумме промежуточной и конечной продукции данной отрасли (которые в сумме дают все потребление этой продукции). Таким образом, можно записать следующее равенство:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \qquad (i = \overline{1,\, n}), \tag{6.1}$$

6.2. Применение балансовых моделей в задачах планирования производства

Коэффициентом прямых материальных затрат (a_{ij}) называется количество продукции i-й отрасли, которое необходимо для производства единицы валовой продукции в j-й отрасли. Эта величина рассчитывается по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (i = \overline{1,\, n}, \quad j = \overline{1,\, n}). \tag{6.2}$$

Значения a_{ij} для всех отраслей составляют матрицу коэффициентов прямых материальных затрат:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}.$$

Очевидно, что все элементы этой матрицы неотрицательны, т. е. $a_{ij} > 0$. Поскольку процесс воспроизводства нельзя было бы осуществлять, если бы в отрасли затрачивалось собственной продукции больше, чем создавалось, диагональные элементы матрицы A должны быть меньше единицы. Это можно выразить в виде следующей цепочки неравенств:

$$a_{ii} < 1, \text{ так как } a_{ii} = \frac{x_{ii}}{X_i} \text{ и } x_{ii} < X_i.$$

В моделях межотраслевого баланса принимается допущение, что величины a_{ij} постоянны (т. е. одинаковы как в отчетном, так и в планируемом периодах). Таким образом, пропорции материальных затрат остаются неизменными. Поэтому коэффициенты прямых материальных затрат рассчитываются по отчетным данным, а затем используются для определения неизвестных величин в планируемом периоде.

В систему уравнений (6.1) подставим выражение $x_{ij} = a_{ij} X_j$ из формулы (6.2) и получим следующее равенство:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \quad (i = \overline{1, n}). \tag{6.3}$$

В матричной форме это выражение можно записать следующим образом:

$$X = AX + Y, \tag{6.4}$$

где $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец валовой продукции;

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец конечной продукции.

Соотношение (6.3) или (6.4) называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса* или *моделью Леонтьева*. На основе этой модели можно выполнять следующие три варианта расчетов:

1. Задав величины валовой продукции каждой отрасли, можно определить объемы конечной продукции отраслей в плановом периоде по формуле

$$Y = (E - A)X, \tag{6.5}$$

где E – единичная матрица размерности $n \times n$. Единичная матрица имеет по диагонали единицы, а остальные элементы – нулевые.

2. Задав величины конечной продукции всех отраслей, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли в планируемом периоде:

$$X = (E - A)^{-1} Y, \tag{6.6}$$

где $(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная к $(E - A)$. Она существует, если матрица $E - A$ невырожденная.

3. Задав некоторые величины валовой продукции, а для остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти неизвестные величины валовой и конечной продукции по всем отраслям. При этом удобнее использовать систему уравнений в виде соотношений (6.3), а не в матричном виде.

Обозначим матрицу $(E - A)^{-1}$ через B:

$$B = (E - A)^{-1}. \tag{6.7}$$

Матрица $B = (b_{ij})_{n \times n}$ называется *матрицей коэффициентов полных материальных затрат.* С ее помощью формулу (6.6) можно переписать следующим образом:

$$X = BY \tag{6.8}$$

или в развернутом виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j \quad (i = \overline{1, n}). \tag{6.8′}$$

Из этого соотношения следует, что валовая продукция выступает как взвешенная сумма величин конечной продукции, причем весами являются коэффициенты b_{ij}. Таким образом, *коэффициент полных материальных затрат* b_{ij} показывает, сколько нужно произвести валовой продукции i-й отрасли, чтобы получить единицу конечной продукции j-й отрасли. При этом учитываются как прямые, так и косвенные затраты этой продукции.

Если прямые затраты отражают количество средств производства, израсходованных непосредственно при изготовлении данной продукции, то косвенные относятся к предшествующим стадиям производства. Рассмотрим, например, технологическую цепочку «руда – чугун – сталь – прокат» и расходы электроэнергии на производство проката. Затраты электроэнергии при производстве проката из стали будут называться прямыми, затраты при получении стали из чугуна – косвенными 1-го порядка и т. д. Общая сумма этих затрат и составит полные затраты электроэнергии при производстве проката.

Обычно коэффициенты полных материальных затрат применяются, когда нужно определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей. Формула (6.8) может быть записана в этом случае в следующем виде:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j \qquad (i = \overline{1,\, n}), \tag{6.9}$$

где ΔX_i и ΔY_j – приросты величин валовой и конечной продукции отраслей, соответственно.

Приведем следующий пример.

Пример 6.1. Пусть за отчетный период (январь) имеется межотраслевой баланс продукции для системы из двух отраслей (табл. 6.1).

Таблица 6.1. **Межотраслевой баланс производства и распределения продукции (январь)**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция (Y_i)	Валовая продукция (X_i)
	1	2		
1	20	90	90	200
2	80	60	160	300

На планируемый период (февраль) заданы следующие объемы конечной продукции:

$$Y^{пл} = \begin{pmatrix} Y_1^{пл} \\ Y_2^{пл} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 \\ 192 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти объемы валовой продукции каждой отрасли на планируемый период, которые обеспечат заданный выпуск конечной продукции.

Решение

1. Найдем матрицу коэффициентов прямых материальных затрат, применив формулу (6.2):

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{x_{11}}{X_1} & \dfrac{x_{12}}{X_2} \\ \dfrac{x_{21}}{X_1} & \dfrac{x_{22}}{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{20}{200} & \dfrac{90}{300} \\ \dfrac{80}{200} & \dfrac{60}{300} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

2. Для определения объемов валовой продукции на февраль воспользуемся формулой (6.8). Запишем единичную матрицу размерности 2×2:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем разность матриц путем следующих вычислений:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}1 & 0 - 0{,}3 \\ 0 - 0{,}4 & 1 - 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем матрицу коэффициентов полных материальных затрат по формуле (6.7)

$$B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}33 & 0{,}5 \\ 0{,}67 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления обратной матрицы в пакете MS Excel можно использовать функцию МОБР.

По формуле (6.8) найдем вектор плановой валовой продукции как матричное произведение следующего вида:

$$X^{пл} = B \cdot Y^{пл} = \begin{pmatrix} 1{,}33 & 0{,}5 \\ 0{,}67 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 108 \\ 192 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления произведения матриц в MS Excel применяется функция МУМНОЖ.

Итак, для обеспечения заданного выпуска конечной продукции в плановом периоде (феврале) следует произвести валовой продукции в первой отрасли 240 ед., а во второй отрасли – 360 ед.

3. Восстановим теперь весь межотраслевой баланс для февраля (найдем объемы промежуточной продукции). Из формулы (6.2) мож-

но записать, что $x_{ij} = a_{ij} X_j$. Учитывая, что коэффициенты прямых материальных затрат в плановом периоде не изменятся, а величины $X_j^{пл}$ мы уже нашли, получим следующую промежуточную продукцию планового периода:

$$x_{11} = a_{11} X_1 = 0{,}1 \cdot 240 = 24;$$

$$x_{12} = a_{12} X_2 = 0{,}3 \cdot 360 = 108;$$

$$x_{21} = a_{21} X_1 = 0{,}4 \cdot 240 = 96;$$

$$x_{22} = a_{22} X_2 = 0{,}2 \cdot 360 = 72.$$

Таким образом, в феврале будем иметь межотраслевой баланс, который приведен в табл. 6.2.

Таблица 6.2. **Межотраслевой баланс производства и распределения продукции (февраль)**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция (Y_i)	Валовая продукция (X_i)
	1	2		
1	24	108	108	240
2	96	72	192	360

6.3. Применение балансовых моделей при ограничениях на внешние ресурсы

В реальной практике планирования при расчете объемов валовой продукции требуется учитывать ограничения на используемые внешние ресурсы, например:

- производственные фонды (основные, оборотные, заработная плата);
- трудовые ресурсы;
- природные ресурсы (лес, вода и т. д.);
- продукцию внешних систем (например, импорт).

Расход внешних дефицитных ресурсов указывается в межотраслевом балансе в виде дополнительной матрицы

$$\left(r_{ij}\right)_{m\times n},$$

где r_{ij} – потребление i-го ресурса j-й отраслью;
m – количество видов ресурсов;
n – количество отраслей.

Таким образом, с учетом внешних ресурсов баланс приобретает вид, соответствующий данным табл. 6.3.

Таблица 6.3. **Межотраслевой баланс с учетом внешних дефицитных ресурсов**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция (y_i)	Валовая продукция (x_i)
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}		
2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}		
…	…	…	…	…		
m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}		

Чтобы рассчитать, сколько всего ресурса i-го вида было потреблено в отчетном периоде, следует сложить расходы этого ресурса в каждой отрасли (сумма по строке):

$$R_i^o = r_{i1} + r_{i2} + \ldots + r_{in} \quad (i = \overline{1, m}).$$

где R_i^o – количество ресурса i-го вида за отчетный период.

Коэффициентом прямых затрат ресурсов (p_{ij}) называется объем i-го ресурса, необходимого для производства единицы валовой продукции в j-й отрасли. Его значение рассчитывается по формуле

$$p_{ij} = \frac{r_{ij}}{X_j} \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}). \tag{6.10}$$

Величины p_{ij} образуют матрицу коэффициентов прямых затрат ресурсов размерности m на n: $P = \left(p_{ij}\right)_{m\times n}$. Они считаются в моделях межотраслевого баланса неизменными, т. е. равными в отчетном и в планируемом периодах. Поэтому они вычисляются по отчетным данным, а затем используются для определения количества ресурсов, которые понадобятся в плановом периоде:

$$R_i^{пл} = p_{i1}X_1^{пл} + p_{i2}X_2^{пл} + \ldots p_{in}X_n^{пл} \quad (i = \overline{1,\, m}), \qquad (6.11)$$

где $R_i^{пл}$ – количество ресурса i-го вида за плановый период.

Эту систему уравнений можно записать и в матричном виде:

$$R^{пл} = PX^{пл}. \qquad (6.11')$$

Найденное количество требуемых ресурсов нужно сравнить с известным выделенным объемом ресурсов. Если выполняется следующее неравенство:

$$R_i^{пл} \le R_i^{ВЫД} \quad (i = \overline{1,\, m}),$$

то ресурсов достаточно и план реализуем. В противном случае необходимо либо изыскать дополнительные ресурсы, либо сократить план производства конечной продукции (следовательно, сократится и план валовой продукции).

Рассмотрим следующий пример.

Пример 6.2. Дополним пример 6.1 данными о потреблении трех видов внешних ресурсов, как показано в табл. 6.4.

Таблица 6.4. **Межотраслевой баланс с учетом внешних дефицитных ресурсов (январь)**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2		
1	20	90	90	200
2	80	60	160	300
Затраты труда	30	120		
Производственные фонды	360	240		
Затраты леса	60	120		

Пусть на февраль выделены внешние ресурсы в следующем объеме:

- трудовые ресурсы $R_1^{ВЫД} = 170$;
- производственные фонды $R_2^{ВЫД} = 800$;
- лес $R_3^{ВЫД} = 250$.

Требуется установить, достаточно ли этих ресурсов для реализации плана конечной продукции на февраль при $Y^{пл} = \begin{bmatrix} 108 \\ 192 \end{bmatrix}$.

Решение

1. Найдем коэффициенты прямых затрат ресурсов по формуле (6.10):

$$P = \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{X_1} & \frac{r_{12}}{X_2} \\ \frac{r_{21}}{X_1} & \frac{r_{22}}{X_2} \\ \frac{r_{31}}{X_1} & \frac{r_{32}}{X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{30}{200} & \frac{120}{300} \\ \frac{360}{200} & \frac{240}{300} \\ \frac{60}{200} & \frac{120}{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}4 \\ 1{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

2. Для указанного плана конечной продукции на февраль в примере 6.1 уже был найден соответствующий объем производства валовой продукции: $X^{пл} = \begin{bmatrix} 240 \\ 360 \end{bmatrix}$. Найдем требуемое для этого количество внешних ресурсов по формуле (6.11′):

$$R^{пл} = PX^{пл} = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}4 \\ 1{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 240 \\ 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 \cdot 240 + 0{,}4 \cdot 360 \\ 1{,}8 \cdot 240 + 0{,}8 \cdot 360 \\ 0{,}3 \cdot 240 + 0{,}4 \cdot 360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 720 \\ 216 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в феврале требуется 180 единиц трудовых ресурсов, 720 единиц производственных фондов и 216 единиц леса.

3. Условие $R^{П} = \begin{bmatrix} 180 \\ 720 \\ 216 \end{bmatrix} \le R^{ВЫД} = \begin{bmatrix} 170 \\ 800 \\ 250 \end{bmatrix}$ не выполняется по первому ресурсу. Поэтому план выпуска конечной продукции должен быть уменьшен.

Тема 7. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

7.1. Структура систем массового обслуживания

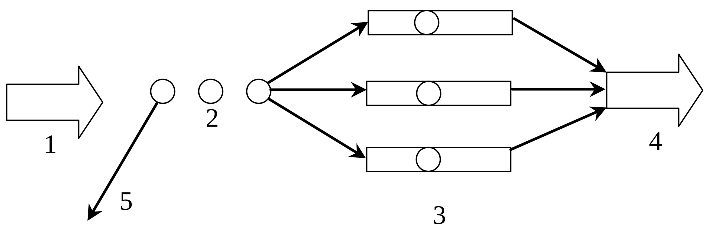
Системами массового обслуживания (*СМО*) называются системы специфического вида, предназначенные для обслуживания потока заявок (требований) [7].

Заявки на обслуживание поступают в систему нерегулярно, в заранее неизвестные и случайные моменты времени. Примерами заявок являются покупатели, приходящие в магазин, клиенты в парикмахерской, телефонные вызовы в сети, бытовые приборы, поступающие в мастерскую для ремонта.

Обслуживание заявок выполняют *каналы обслуживания* (обслуживающие устройства). Система может включать один или несколько каналов обслуживания. В качестве каналов обслуживания могут выступать продавец в магазине, кассир за кассой, мастер в телеателье, парикмахер и т. д. Обслуживание заявок каналом имеет также случайный характер, так как время обслуживания каждой заявки является случайной величиной и зависит от многих факторов. Например, от характера поломки аппарата зависит время его ремонта, от запросов и возраста покупателя – время его обслуживания продавцом и т. д.

Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обуславливает неравномерность загрузки системы (на входе могут накапливаться необслуженные заявки и возникает очередь, либо заявок нет и каналы простаивают).

Структура системы массового обслуживания схематически показана на рис. 7.1.



1 – входной поток заявок;
2 – очередь;
3 – каналы обслуживания;
4 – выходной поток обслуженных заявок;
5 – заявки, получившие отказ в обслуживании

Рис. 7.1. **Структура системы массового обслуживания**

В систему поступает поток заявок на обслуживание. Если имеются свободные каналы обслуживания, то прибывшая заявка поступает на обслуживание. Если же все каналы заняты, то заявка может ожидать в очереди освобождения канала. Иногда заявки покидают систему, не получив обслуживания.

Основной задачей теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению системы. Например, требуется определить оптимальное число каналов обслуживания, при которых, с одной стороны, не возникает бесконечных очередей и время ожидания в очереди является приемлемой величиной, а с другой – нет значительных простоев каналов, поскольку организация каждого канала связана с материальными затратами.

7.2. Классификация систем массового обслуживания

По числу каналов обслуживания различают *одноканальные, многоканальные* и *многофазные СМО*. Если обслуживающие устройства выполняют параллельную обработку сразу нескольких заявок, то система называется многоканальной (например, кассовые аппараты в магазине самообслуживания). В многофазной СМО процесс обслуживания заявки состоит из нескольких этапов, выполняемых последовательно друг за другом на различных обслуживающих устройствах (например, партия изделий последовательно обрабатывается в ряде цехов).

По правилам обслуживания различают следующие три класса СМО:

- *СМО с отказами*. Если нет свободных каналов, заявка покидает систему. Например, при вызове абонента через АТС звонящий получает отказ в обслуживании и кладет трубку, если слышен гудок «занято».
- *СМО с ожиданием*. Если нет свободных каналов, заявка ожидает в очереди и в конце концов будет обслужена. Например, покупатели в магазине, больные в поликлинике.
- *СМО с ограниченным ожиданием*. Число мест для ожидания в очереди может быть ограничено (например, сервис по обслуживанию автомобилей). Отказ в обслуживании происходит, если все каналы заняты и нет мест в очереди. Может рассматриваться также ограничение на время пребывания заявки в системе (так, например, могут быть особые условия обслуживания в валютной кассе банка).

По дисциплине очереди (способу отбора заявок из очереди на обслуживание) различают следующие виды СМО:

- очередь FIFO (первый пришел – первый обслужен);
- очередь LIFO (последний пришел – первый обслужен);

- очередь с приоритетом (ветераны и участники войны без очереди обслуживаются в поликлиниках и в магазинах).

Некоторые заявки на основании каких-то признаков получают преимущество (приоритет) в выборе на обслуживание перед другими. Приоритет заявки является *абсолютным*, если она в момент своего поступления может прерывать процесс обслуживания заявки с более низким приоритетом. Если же прерывание обслуживания другой заявки не допускается, то приоритет называется *относительным*.

По характеру входного потока заявок различают следующие виды СМО:

- *Замкнутые*, в которых обслуженная заявка через какой-то промежуток времени вновь возвращается в систему (отремонтированный станок в цеху опять ломается, посуда в общественной столовой опять загрязняется и т. д.).
- *Разомкнутые* (*открытые*), в которых входящий поток заявок не зависит от выходящего и ничем не ограничивается. Заявки поступают в систему извне, от некоторого бесконечного источника заявок.

7.3. Простейшая система массового обслуживания

Простейшей системой массового обслуживания называется открытая одно- или многоканальная СМО, в которой входящий поток заявок является простейшим (пуассоновским), а время обслуживания заявки каждым каналом имеет экспоненциальный закон распределения.

Простейший входной поток заявок подчиняется закону Пуассона, т. е. вероятность того, что интервал времени между поступлениями заявок не превосходит некоторой величины t, задается следующей функцией распределения:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

где λ – интенсивность потока заявок (среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени. Например, это может быть среднее число бытовых приборов, поступающих в ремонтную мастерскую за день).

Простейший поток заявок обладает следующими тремя основными свойствами:

1. *Ординарностью*, которая означает, что практически невозможно

одновременное поступление двух и более заявок (невозможен одновременный выход из строя двух станков, одновременный приход двух покупателей и т. д.).

2. *Стационарностью*, которая состоит в том, что среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени, постоянно. Таким образом, хотя заявки и поступают в случайные моменты времени, в среднем поток является равномерным и параметр λ не зависит от времени.

3. *Отсутствием последействия*, которое означает, что количество заявок, уже поступивших в систему, не определяет того, сколько заявок поступит далее. Например, если произошел обрыв нити на ткацком станке, то это не означает, что его не будет в следующий момент времени, и, тем более, что его не будет на других станках.

Время обслуживания заявки каналом в простейшей СМО является случайной величиной, подчиняющейся экспоненциальному закону распределения. Функция распределения этого закона задает вероятность того, что время обслуживания одной заявки не превосходит величины t, и имеет следующий вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Параметр распределения (μ) – это среднее количество заявок, которое может обслужить канал в единицу времени (интенсивность обслуживания). Например, количество бытовых приборов, которые успевает отремонтировать один мастер за день. Эта величина является обратной к среднему времени обслуживания ($T_{об}$), т. е. истинно соотношение

$$\mu = \frac{1}{T_{об}}. \quad (7.1)$$

Для простейшей системы массового обслуживания всегда рассчитывается величина α по следующей формуле:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (7.2)$$

В случае многоканальной системы с ожиданием параметр α означает среднее число каналов, которые необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования.

Классификация простейших СМО может быть проведена на основе используемого количества каналов (n) и допустимой длины очереди (m) (табл. 7.1).

Таблица 7.1. **Классификация простейших СМО**

Тип системы массового обслуживания	n	m
Одноканальная с отказами	1	0
Многоканальная с отказами	$n > 1$	0
Одноканальная с ожиданием и ограниченной очередью	1	$1 \le m < \infty$
Многоканальная с ожиданием и ограниченной очередью	$n > 1$	$1 \le m < \infty$
Одноканальная с ожиданием и неограниченной очередью	1	∞
Многоканальная с ожиданием и неограниченной очередью	$n > 1$	∞

7.4. Графическая модель разомкнутой простейшей системы массового обслуживания

В графической модели каждое состояние системы обозначается в виде вершины графа (квадрата или кружка). Будем различать состояния системы по числу находящихся в ней заявок, обозначив S_i (такое состояние СМО, когда в ней находится ровно i заявок).

Возможные изменения состояний системы изображаются в виде стрелок, соединяющих состояния. При приходе очередной заявки система из состояния S_i переходит в состояние S_{i+1}. При окончании обслуживания заявки каким-либо каналом происходит переход из S_i в состояние S_{i-1}. Предполагается, что в системе никогда не происходят одновременно два и более описанных события в силу ее ординарности.

Пусть в системе имеется n каналов и m мест для ожидания в очереди. Тогда возможно всего $n + m + 1$ состояний (учитывается и состояние, когда в системе нет ни одной заявки). Графическая модель такой системы показана на рис. 7.2.

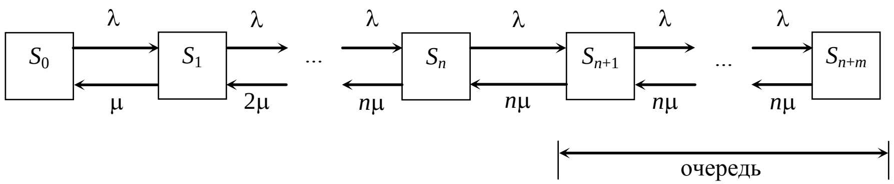


Рис. 7.2. **Графическая модель многоканальной системы с ограниченной очередью**

Над стрелками записывается интенсивность перехода из состояния в состояние, т. е. среднее число возможных переходов в единицу времени. Интенсивность перехода из состояния S_i в состояние S_{i+1} всегда равна λ, поскольку связана с поступлением заявки в систему. Интенсивность перехода из состояния S_i в состояние S_{i-1} связана с окончанием обслуживания заявок, поэтому она зависит от количества каналов, которые заняты в данный момент обслуживанием заявок. Поскольку любой из этих каналов может закончить обслуживание заявки, интенсивность перехода $S_i \to S_{i-1}$ равна $k\mu$, где k – число каналов, занятых обслуживанием в данный момент. Если в системе нет очереди, то число занятых обслуживанием каналов равно числу заявок в системе, т. е. $k = i$. Когда имеется очередь, это означает, что все n каналов системы заняты, т. е. $k = n$.

7.5. Основные показатели эффективности работы системы массового обслуживания

Показатели работы СМО можно разбить на две группы.

1. *Показатели эффективности использования СМО:*

- Относительная пропускная способность (Q) – вероятность того, что требование будет принято к обслуживанию.
- Абсолютная пропускная способность (A) – среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени. Она показывает интенсивность выходящего потока обслуженных заявок и определяется как произведение среднего числа поступивших заявок на вероятность принятия заявки к обслуживанию:

$$A = \lambda Q . \tag{7.3}$$

- Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок в каждый момент времени (K), рассчитывается как следующее отношение:

$$K = \frac{A}{\mu} . \tag{7.4}$$

2. *Показатели качества обслуживания заявок:*

- вероятность того, что в системе нет ни одной заявки (P_0);

- вероятность отказа в обслуживании ($P_{отк}$);
- вероятность немедленного приема заявки ($P_{пр}$);
- средняя длина очереди ($L_{оч}$);
- среднее число заявок в системе ($L_{сис}$). Очевидно, что эта величина должна учитывать заявки, обслуживаемые каналами (K) и ожидающие в очереди ($L_{оч}$), т. е. $L_{сис} = K + L_{оч}$;
- среднее время ожидания заявки в очереди ($T_{оч}$);
- среднее время пребывания заявки в системе ($T_{сис}$).

7.6. Расчет характеристик систем массового обслуживания

7.6.1. Одноканальная СМО с отказами (n = 1, m = 0)

Пусть СМО включает только один канал обслуживания ($n = 1$), интенсивность обслуживания которого равна μ, а на ее вход подается простейший (пуассоновский) поток заявок с интенсивностью λ. Если канал занят во время прихода заявки, то она покидает систему.

Такая СМО может иметь два состояния: когда в системе нет ни одной заявки (S_0) и когда канал занят обслуживанием одной заявки (S_1). Ее графическая модель показана на рис. 7.3.

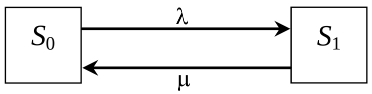


Рис. 7.3. **Графическая модель одноканальной СМО с отказами**

Сумма вероятностей этих состояний S_0 и S_1 равна 1, т. е. $P_0 + P_1 = 1$.

Формулы для расчета основных характеристик работы данной СМО представлены в табл. 7.2.

Таблица 7.2. **Основные характеристики одноканальной СМО с отказами**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что в системе нет ни одной заявки	$P_0 = \frac{1}{1+\alpha}$ или $P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$
Вероятность приема к обслуживанию	$Q = P_0$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_1 = 1 - P_0$ или $P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda \cdot Q = \dfrac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}$

Окончание табл. 7.2

Наименование показателя	Формула расчета
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{об} = \dfrac{1}{\mu}$
Среднее время пребывания заявки в системе (учитываются и заявки, получившие отказ)	$T_{сис} = T_{об}Q = \dfrac{1}{\lambda + \mu}$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.1. Телефонная АТС имеет одну линию, на которую приходится в среднем 0,8 вызова в минуту. Среднее время разговора – 1,5 мин. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается. Считая потоки вызовов пуассоновскими, необходимо найти абсолютную пропускную способность станции и вероятность отказа абоненту.

Решение

За единицу времени примем 1 мин. Даны следующие расчетные данные: $\lambda = 0{,}8$ вызовов/мин; $T_{об} = 1{,}5$ мин. Тогда среднее число вызовов, которое может обслужить АТС в минуту, рассчитывается по формуле (7.1)

$$\mu = \frac{1}{T_{об}} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67 \text{ (вызовов/мин).}$$

Используя формулу из табл. 7.2, рассчитаем вероятность того, что линия свободна:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}67}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}456\,.$$

Таким образом, известна и относительная пропускная способность (вероятность обслуживания) $Q = P_0 = 0{,}456$.

Вероятность отказа в обслуживании вычисляется следующим образом:

$$P_1 = 1 - P_0 = 1 - 0{,}456 = 0{,}544\,.$$

Абсолютную пропускную способность можно определить на основании уже рассчитанной величины Q по формуле

$$A = \lambda Q = 0{,}8 \cdot 0{,}456 = 0{,}365 \text{ (вызовов/мин).}$$

Таким образом, среднее число заявок, которые может обслужить канал в единицу времени (μ = 0,67), больше, чем среднее число заявок, которые обслуживаются АТС в действительности за единицу времени (A = 0,365). Это обусловлено случайным характером потока заявок. Если бы заявки приходили сразу по окончании обслуживания предыдущей заявки, АТС обслужила бы 0,67 заявок за минуту. Но в силу случайности потока заявок некоторые заявки приходят в момент обслуживания другой заявки и получают отказ. Поэтому интенсивность потока обслуженных заявок получается меньше.

7.6.2. Многоканальная СМО с отказами ($n > 1$, $m = 0$)

Пусть СМО включает несколько каналов обслуживания ($n > 1$), которые работают параллельно и каждый обслуживает заявки с интенсивностью μ. На вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Если все каналы заняты, то заявка покидает систему без обслуживания.

Такая система имеет состояние $n + 1$, где n – количество каналов. Графическая модель состояний этой системы показана на рис. 7.4.

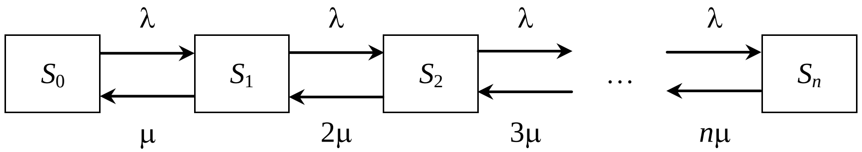


Рис. 7.4. **Графическая модель многоканальной СМО с отказами**

Формулы расчета основных характеристик данной СМО приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3. **Основные характеристики работы многоканальной системы массового обслуживания с отказами**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что в системе нет ни одной заявки	$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}\right]^{-1}$

Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_n = P_0 \dfrac{\alpha^n}{n!}$
Относительная пропускная способность (вероятность приема к обслуживанию)	$Q = 1 - P_{отк}$

Окончание табл. 7.3

Наименование показателя	Формула расчета
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda(1 - P_{отк})$
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{об} = \dfrac{1}{\mu}$
Среднее время пребывания заявки в системе (учитываются и заявки, получившие отказ)	$T_{сис} = T_{об} Q = \dfrac{1 - P_{отк}}{\mu}$
Среднее число занятых каналов	$K = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda Q}{\mu} = \alpha Q$
Среднее число заявок в системе	$L_{сис} = K$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.2. В отделении банка на обслуживании клиентов работают 3 оператора. Среднее время обслуживания клиента оператором – 12 мин. В среднем за час в банк обращается 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиент не обслуживается и покидает банк. Необходимо найти основные характеристики работы банка.

Решение

Примем за единицу времени 1 час. По условию задачи имеются следующие расчетные данные: $n = 3$; $m = 0$; $\lambda = 15$ клиентов/ч; $T_{об} = \dfrac{12}{60} = 0{,}2$ ч. Тогда $\mu = \dfrac{1}{T_{об}} = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$ клиентов/ч. Рассчитаем параметр α по формуле (7.2)

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{5} = 3.$$

Вероятность того, что в системе нет ни одной заявки, определяется по формуле из табл. 7.3:

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{3} \frac{\alpha^i}{i!}\right] = \left[1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right]^{-1} = 0{,}077.$$

Вероятность отказа в обслуживании вычисляется следующим образом:

$$P_{отк} = 0{,}077 \cdot \frac{3^3}{3!} = 0{,}346.$$

Относительную пропускную способность (вероятность обслуживания) определим с учетом вероятности отказа:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Полученный результат означает, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены 65 клиентов.

Абсолютную пропускную способность (среднее число обслуживаемых требований за час) рассчитаем по формуле

$$A = \lambda Q = 15 \cdot 0{,}654 = 9{,}81 \text{ клиентов/ч.}$$

Среднее число занятых каналов вычислим следующим образом:

$$K = \alpha Q = 3 \cdot 0{,}654 = 1{,}962 \approx 2.$$

Если бы заявки приходили тогда, когда обслуживание предыдущей заявки закончилось, то в единицу времени было бы обслужено $n\mu = 3 \cdot 5 = 15$ (клиентов/ч). Однако поток заявок случаен и некоторые заявки получают отказ, поэтому обслуживается в среднем 9,81 клиентов/ч, а 5,19 клиентов (15 – 9,81) уходят необслуженными. Поэтому хотя среднее число занятых каналов – 2 (казалось бы, один оператор лишний), но сокращать операторов нецелесообразно (будет еще больше необслуженных клиентов).

7.6.3. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди ($n \geq 1$, $m > 0$)

Пусть СМО включает n параллельно работающих каналов обслуживания, интенсивность обслуживания каждого из которых равна μ.

На вход системы подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Если в момент прибытия заявки все каналы заняты, то она поступает в очередь ожидания обслуживания, число мест в которой ограничено и равно m ($0 < m < \infty$). Если все каналы заняты и нет мест для ожидания в очереди, то заявка получает отказ в обслуживании.

Число состояний такой системы равно $n + m + 1$, поскольку максимальное число заявок будет в системе при условии занятости всех n каналов и m мест для ожидания в очереди. Учитывается также состояние, когда в системе нет ни одной заявки. Графическая модель многоканальной системы с ожиданием и ограничением на длину очереди представлена на рис. 7.2.

Формулы для расчета основных характеристик работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди приведены в табл 7.4.

Таблица 7.4. **Основные характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что в системе нет ни одной заявки	$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1-(\alpha/n)^m}{n-\alpha}\right]^{-1}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_{n+m} = P_0 \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!}$
Относительная пропускная способность (вероятность приема к обслуживанию)	$Q = 1 - P_{отк}$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q$
Среднее число занятых каналов	$K = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda Q}{\mu} = \alpha Q$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = P_0 \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2}\left[1-\left(\frac{\alpha}{n}\right)^m (1+m-\frac{m\alpha}{n})\right]$
Среднее число заявок в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K$
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{об} = \frac{1}{\mu}$

Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \dfrac{L_{сис}}{\lambda}$

Приведем следующий пример.

Пример 7.3. В пункте валютного обмена работают два оператора, каждый из которых обслуживает клиента в среднем за 2,5 мин. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более 5 человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено, то очередной клиент не становится в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 мин. Необходимо найти основные характеристики работы обменного пункта.

Решение

За единицу времени примем 1 минуту. По условию задачи имеем следующие данные: $n = 2$; $m = 3$; $\lambda = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ клиентов/мин; $\mu = \dfrac{1}{2{,}5} =$ $= 0{,}4$ клиентов/мин.

Рассчитаем параметр α по формуле (7.2):

$$\alpha = \frac{0{,}5}{0{,}4} = 1{,}25.$$

Вероятность того, что в пункте нет ни одного клиента, можно определить, подставив значения в соответствующую формулу из табл. 7.4:

$$P_0 = \left[1 + 1{,}25 + \frac{1{,}25^2}{2} + \frac{1{,}25^3}{2} \cdot \frac{1 - (1{,}25/2)^3}{2 - 1{,}25}\right]^{-1} = 0{,}249.$$

Вероятность отказа в обслуживании рассчитывается следующим образом:

$$P_{отк} = \frac{1{,}25^5}{2^3 \cdot 2} 0{,}249 = 0{,}047.$$

Вероятность приема к обслуживанию (относительная пропускная способность) определяется по формуле

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}047 = 0{,}953.$$

Это означает, что из каждых 100 клиентов будут обслужены примерно 95.

Среднее число обслуженных требований в единицу времени (абсолютная пропускная способность) рассчитывается следующим образом:

$$A = \lambda Q = 0{,}5 \cdot 0{,}953 = 0{,}477.$$

Из этого следует, что каждую минуту из обменного пункта выходят 0,477 обслуженных клиентов (т. е. 0,477 · 60 ≈ 29 клиентов в час).

Среднее число каналов, занятых обслуживанием клиентов, вычисляется по формуле

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}477}{0{,}4} = 1{,}191.$$

Средняя длина очереди определяется по соответствующей формуле:

$$L_{оч} = 0{,}249 \cdot \frac{1{,}25^3}{1 \cdot (2 - 1{,}25)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1{,}25}{2}\right)^3 \cdot (1 + 3 - \frac{3 \cdot 1{,}25}{2})\right] = 0{,}416.$$

Среднее число клиентов в пункте обмена рассчитывается по формуле из табл. 7.4:

$$L_{сис} = 0{,}416 + 1{,}191 = 1{,}607.$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0{,}416}{0{,}5} = 0{,}832 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания клиента в пункте вычисляется следующим образом:

$$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda} = \frac{1,607}{0,5} = 3,214 \text{ мин.}$$

Таким образом, пункт обмена работает хорошо, так как клиенты обслуживаются быстро. Сокращать операторов нецелесообразно.

7.6.4. Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью ($n \geq 1$, $m = \infty$)

Пусть СМО имеет n параллельно работающих каналов обслуживания, причем интенсивность обслуживания заявок каждым каналом равна μ. На вход системы поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Если при поступлении заявки все каналы заняты, то она становится в очередь ожидания обслуживания. Число мест в очереди неограничено ($m = \infty$), поэтому заявка никогда не получает отказа в обслуживании.

Такая система имеет бесконечное множество состояний. Графическая модель аналогична предыдущему случаю с той разницей, что нет правого крайнего состояния и граф является бесконечным.

Характеристики такой системы могут быть рассчитаны только в том случае, если процесс является стационарным, т. е. очередь не растет бесконечно. Условием существования стационарного режима является следующее неравенство:

$$\frac{\alpha}{n} < 1 \quad \leftrightarrow \quad \alpha < n.$$

Для данной СМО $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – это среднее число каналов, которые необходимо иметь, чтобы обслужить в единицу времени все поступающие требования, т. е. реальное число каналов в системе (n) должно быть больше среднего необходимого числа каналов (α).

Для получения расчетных формул перейдем к пределу при $m \to \infty$ в формулах предыдущего раздела. Получим формулы расчета основных характеристик работы многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью, которые приведены в табл. 7.5.

Таблица 7.5. **Основные характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

Наименование показателя	Формула расчета

Вероятность того, что в системе нет ни одной заявки	$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \right]^{-1}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = 0$

Окончание табл. 7.5

Наименование показателя	Формула расчета
Относительная пропускная способность (вероятность приема к обслуживанию)	$Q = 1$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda$
Среднее число занятых каналов	$K = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \alpha$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = P_o \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2}$
Среднее число заявок в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K$
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{об} = \frac{1}{\mu}$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda}$ или $T_{сис} = T_{оч} + T_{об}$

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 7.4. В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 мин. К кассе подходят в среднем 3 человека в минуту. Необходимо найти основные характеристики работы кассы.

Решение

За единицу времени примем 1 минуту. По условию задачи имеем следующие данные: $n = 2$; $\lambda = 3$ человека/мин; $T_{об} = 0{,}5$ мин;

$\mu = \frac{1}{T_{об}} = \frac{1}{0{,}5} = 2$ человека/мин.

Рассчитаем параметр α по формуле (7.2):

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Поскольку $\alpha = 1{,}5 < n = 2$, стационарный режим существует (если бы оказалось, что его нет, дальше рассчитывать вообще ничего не нужно).

Вероятность того, что в системе нет заявок, рассчитаем, подставив значения α и n в соответствующую формулу из табл. 7.5:

$$P_0 = \left[1 + 1{,}5 + \frac{1{,}5^2}{2} + \frac{1{,}5^3}{2 \cdot (2 - 1{,}5)}\right]^{-1} = 0{,}143.$$

Поскольку в СМО с ожиданием и неограниченной очередью не бывает отказов в обслуживании, $P_{отк} = 0$ и $Q = 1$.

Абсолютная пропускная способность равна $A = \lambda = 3$ человека/мин, таким образом, в среднем из кассы выходят обслуженными 3 человека в минуту.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок для системы с неограниченной очередью, равно $K = \alpha = 1{,}5$.

Средняя длина очереди рассчитывается по следующей формуле:

$$L_{оч} = 0{,}143 \cdot \frac{1{,}5^3}{1 \cdot (2 - 1{,}5)^2} = 1{,}931.$$

Среднее число заявок в системе определяется как сумма длины очереди ($L_{оч}$) и числа каналов (K):

$$L_{сис} = L_{оч} + K = 1{,}931 + 1{,}5 = 3{,}431.$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}931}{3} = 0{,}644 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется следующим образом:

$$T_{сис} = T_{оч} + T_{об} = 0{,}644 + 0{,}5 = 1{,}144 \text{ мин.}$$

Таким образом, уменьшить число открытых окон нельзя, так как будет нарушено условие $\alpha < n$, и не будет существовать стационарный режим. Нет смысла также увеличивать число открытых окон, так как время пребывания в системе и длина очереди приемлемые.

Пример 7.5. Железнодорожная станция принимает на 5 путей пассажирские поезда и электрички, которые пребывают по расписанию (каждые 15 мин на каждый из них) и отбывают после обслуживания, также по расписанию, через 12 минут. Следует найти основные характеристики работы системы.

Решение

В данном случае теорию массового обслуживания применять нельзя, так как приход и обслуживание поездов не являются случайными.

Тема 8. МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОГО АНАЛИЗА

8.1. Модели анализа основных финансовых операций

8.1.1. Простой и сложный процент

Рассмотрим процесс изменения стоимости денег на примере банковских депозитов [11], [14], [16]. Пусть некоторая исходная сумма денег P (начальный капитал) помещается в банк под фиксированный процент. При этом r – номинальная годовая процентная ставка банка, выраженная в долях. Если по условию договора проценты выплачиваются непосредственно инвестору, а не прибавляются к исходной сумме вложения, то такой вариант называется размещением средств под простой процент.

Пусть срок депозита составляет n лет. Тогда простой процент определяется по формуле

$$I = P \cdot r \cdot n\,.$$

Сумма первоначального капитала и наросшего процента называется наращенной суммой (S). В случае простого процента наращенная сумма рассчитывается по следующей формуле:

$$S = P + I = P + Prn = P(1 + rn). \tag{8.1}$$

Наращенную сумму называют также будущей стоимостью первоначального капитала и обозначают *FV* (от англ. *future value*).

Если процент прибавляется к исходной сумме в конце каждого периода времени (например, года), то такой метод начисления процентов называется сложным процентом.

В случае сложного процента в конце первого года наращенная сумма составит:

$$S = P + Pr = P(1 + r).$$

Поскольку эта сумма остается в банке, то в конце второго года наращенная сумма будет соответствовать равенству:

$$S = \left[P(1 + r)\right](1 + r) = P(1 + r)^2.$$

В общем случае сумма, наращенная за n лет при вложении средств под сложный процент, рассчитывается по формуле

$$S = P(1 + r)^n. \tag{8.2}$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 8.1. Пусть годовая процентная ставка банка равна 15%, первоначальный капитал – 1000 усл. ед. Срок депозита – 2 года. Необходимо определить наращенную сумму для двух вариантов:

а) при размещении первоначального капитала под простой процент;

б) при использовании сложного процента.

Решение

По условию задачи даны следующие расчетные величины: $r = 0{,}15$; $P = 1000$ усл. ед., $n = 2$ года.

а) в случае простого процента воспользуемся формулой (8.1):

$$S = P(1 + rn) = 1000 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot 2) = 1300 \text{ усл. ед.};$$

б) для расчета сложного процента используется формула (8.2):

$$S = P(1+r)^n = 1000 \cdot (1+0{,}15)^2 = 1322{,}5 \text{ усл. ед.}$$

Очевидно, что в случае сложного процента сумма на депозите нарастает быстрее.

8.1.2. Период капитализации процента

Процент может прибавляться к капиталу (капитализироваться) не только в конце каждого года, но и чаще (раз в квартал, раз в месяц, ежедневно и т. д.). Время между двумя последовательными капитализациями (начислениями) процента называется *периодом капитализации процента*.

До сих пор мы рассматривали период капитализации, равный одному году. Пусть по условию договора с банком номинальная годовая процентная ставка составляет r, а процент капитализируется m раз в течение года. *Эффективной процентной ставкой банка* для периода капитализации называется процент, нарастающий в течение одного периода капитализации, который определяется по формуле

$$r_{кап} = \frac{r}{m}. \tag{8.3}$$

Если срок депозита составляет l периодов капитализации, то формулу (8.2) вычисления наращенной суммы можно обобщить следующим образом:

$$S = P(1 + r_{кап})^l. \tag{8.4}$$

Если срок депозита измеряется в годах, то наращенная сумма через n лет при m начислениях процентов внутри каждого года будет равна:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}. \tag{8.5}$$

Приведем следующий пример.

Пример 8.2. Номинальная годовая процентная ставка банка равна 15%, первоначальный капитал – 1000 усл. ед., срок депозита – 2 года.

При этом проценты начисляются ежемесячно. Необходимо определить наращенную сумму.

Решение

По условию задачи имеются следующие расчетные данные: $r = 0{,}15$; $P = 1000$ усл. ед.; $n = 2$ года; $m = 12$.

Для расчета применим формулу (8.5):

$$S = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 1347{,}351 \text{ усл. ед.}$$

Для решения этой задачи можно также рассчитать сначала эффективную процентную ставку для периода капитализации (месяца) по формуле (8.3):

$$r_{кап} = \frac{r}{m} = \frac{0{,}15}{12} = 0{,}0125,$$

Число периодов капитализации $l = 12 \cdot 2 = 24$, а затем использовать общую формулу начисления сложного процента (8.4):

$$S = P(1 + r_{кап})^{l} = 1000 \cdot (1 + 0{,}0125)^{24} = 1347{,}351 \text{ усл. ед.}$$

8.1.3. Начисление процентов для нецелого числа периодов капитализации

В случае, когда срок депозита состоит из нецелого числа периодов капитализации, используются два метода начисления процентов: смешанный (комбинированный) и общий.

В соответствии с *общим методом*, наращенная сумма непосредственно рассчитывается по формуле (8.4) (используется нецелый показатель степени).

По *смешанному методу* вначале по формуле сложного процента (8.4) находится наращенная сумма для целого числа периодов капитализации $[l]$, а для оставшейся дробной части срока депозита $\{l\}$ начисляется простой процент с капитала, наросшего за целое число периодов капитализации. Таким образом, к концу срока депозита наращенная сумма составит:

$$S = P(1 + r_{кап})^{[l]} \cdot (1 + r_{кап}\{l\})\ . \qquad (8.6)$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 8.3. Номинальная годовая процентная ставка равна 16%, период капитализации процента – квартал, начальный капитал – 600 усл. ед., срок депозита – 1 год и 5 месяцев. Требуется найти наращенную сумму смешанным методом.

Решение

По условию задачи имеются следующие данные: r = 0,16; P = 600 усл. ед.; m = 4; $n = 1\frac{5}{12}$ года. Выразим срок депозита в периодах капитализации следующим равенством:

$$l = nm = 1\frac{5}{12} \cdot 4 = 5\frac{2}{3} \text{ квартала.}$$

Эффективная процентная ставка для квартала рассчитывается по формуле

$$r_{кап} = \frac{r}{m} = \frac{0{,}16}{4} = 0{,}04 .$$

Найдем сумму, нарастающую за целое число периодов капитализации $[l] = 5$, по формуле

$$S_1 = P(1 + r_{кап})^{[l]} = 600 \cdot (1 + 0{,}04)^5 = 729{,}99 \text{ усл. ед.}$$

Для оставшейся дробной части срока депозита $\{l\} = \frac{2}{3}$ квартала начисляется простой процент с уже наращенной суммы следующим образом:

$$S = S_1(1 + r_{кап}\{l\}) = 729{,}99 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{2}{3}\right) = 749{,}46 \text{ усл. ед.}$$

Если в расчетах воспользоваться общим методом, наращенная сумма в конце срока составит:

$$S = P(1 + r_{кап})^l = 600 \cdot (1 + 0{,}04)^{5\frac{2}{3}} = 749{,}33 \text{ усл. ед.}$$

8.1.4. Дисконтирование денежных средств

На практике часто приходится решать обратную задачу, т. е. определить, какой начальный капитал нужно положить в банк, чтобы наращенная за l периодов капитализации сумма составила заданную величину S. Данный процесс называется дисконтированием, а искомая величина – текущей стоимостью.

Текущая (приведенная) стоимость суммы S – это первоначальный капитал, обеспечивающий эту наращенную сумму. Текущая стоимость обозначается PV (от англ. *present value*).

Из формулы (8.4) следует, что при сложном проценте текущая стоимость рассчитывается по формуле

$$PV = \frac{S}{(1 + r_{кап})^l}\,. \tag{8.7}$$

Приведем следующий пример.

Пример 8.4. Годовая процентная ставка банка составляет 12%. Следует определить, какую сумму нужно положить в банк, чтобы наращенная за 5 лет сумма составила 1000 усл. ед.? Для данной задачи необходимо рассмотреть два случая капитализации процентов:

а) в конце года;

б) поквартально.

Решение

По условию даны следующие величины: r = 0,12; n = 5; S = 1000. Для случая (а) период капитализации равен одному году, поэтому $r_{кап} = r = 0{,}12$, число периодов капитализации равно числу лет $l = n = 5$. Используя формулу (8.7), получаем следующее:

$$PV = \frac{S}{(1 + r_{кап})^l} = \frac{1000}{(1 + 0{,}12)^5} = 567{,}431.$$

Для случая (б) период капитализации равен одному кварталу (m = 4). Рассчитаем эффективную процентную ставку для квартала по формуле (8.3):

$$r_{кап} = \frac{r}{m} = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03\,.$$

Срок депозита выразим в кварталах: $l = nm = 5 \cdot 4 = 20$ кварталов. Тогда по формуле (8.7) получим следующий результат:

$$PV = \frac{S}{\left(1 + r_{кап}\right)^{l}} = \frac{1000}{\left(1 + 0{,}03\right)^{20}} = 553{,}68 \text{ усл. ед.}$$

Это значение меньше соответствующего значения, рассчитанного для случая (а). Таким образом, если проценты начисляются чаще, то в банк можно положить меньшую сумму для достижения того же результата.

В приложении MS Excel для определения текущей стоимости суммы можно использовать стандартную функцию ПЗ() (категория *Финансовые*).

8.1.5. Расчет срока депозита для накопления определенной суммы

На основании формулы (8.4) можно решить задачу определения количества времени, требующегося для накопления определенной суммы. Приведем пример.

Пример 8.5. Необходимо определить, через сколько лет накопленная сумма составит 2000 усл. ед., если положить в банк 1000 усл. ед. при годовой процентной ставке 10%? Используется сложный процент, проценты капитализируются ежегодно.

Решение

По условию даны следующие величины: $P = 1000$; $S = 2000$; $r = 0{,}1$. Требуется найти количество временных периодов n. Используя формулу (8.4), получим следующее уравнение:

$$2000 = 1000 \cdot (1 + 0{,}1)^{n}.$$

Решив это уравнение относительно n, получим: $n = 7{,}27$. Таким образом, на данное накопление потребуется больше семи лет.

В приложении MS Excel для определения количества периодов накопления можно использовать финансовую функцию КПЕР(), надстройку *Поиск решения* или средство *Подбор параметра* (для решения уравнения относительно n).

8.1.6. Учет инфляции

Уровень инфляции за некоторый период времени влияет на стоимость денежной суммы, размещаемой на банковском депозите [11], [14]. Пусть цена потребительской корзины в начале периода равна P_0, а в конце периода – P_1. Уровень инфляции за период времени определяется по следующей формуле:

$$i = \frac{P_1 - P_0}{P_0}.$$

Пусть r – номинальная банковская процентная ставка за период времени. Тогда сумма S_1, наращенная за период времени при начальном капитале S_0, может быть найдена по формуле

$$S_1 = S_0(1 + r).$$

Очевидно, что в начале периода за начальный капитал S_0 можно купить $k_0 = \frac{S_0}{P_0}$ потребительских корзин, а в конце периода за наращенную сумму S_1 можно купить $l_1 = \frac{S_1}{P_1}$ потребительских корзин.

Реальная процентная ставка r определяется по формуле

$$\hat{r} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

и показывает, на сколько процентов больше можно купить потребительских корзин в конце периода за наращенную сумму, чем в начале периода за начальный капитал. В отличие от номинальной процентной ставки реальная процентная ставка учитывает инфляцию.

Из приведенных выше формул можно получить следующее:

$$\hat{r} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \left(\frac{S_1}{P_1} - \frac{S_0}{P_0}\right) : \frac{S_0}{P_0} = \left(\frac{S_0(1+r)}{P_0(1+i)} - \frac{S_0}{P_0}\right) : \frac{S_0}{P_0} = \frac{1+r}{1+i} - 1 = \frac{r-i}{1+i}.$$

Таким образом, реальная процентная ставка определяется с помощью номинальной процентной ставки и уровня инфляции по формуле

$$\hat{r} = \frac{r-i}{1+i}. \tag{8.8}$$

Рассмотрим ситуацию на следующем примере.

Пример 8.6. Пусть годовая номинальная процентная ставка равна 36%, а годовой уровень инфляции составляет 20%. Требуется найти реальную процентную ставку.

Решение

По формуле (8.8) получим следующее:

$$\widehat{r} = \frac{r - i}{1 + i} = \frac{0{,}36 - 0{,}2}{1 + 0{,}2} = 0{,}1333 = 13{,}33\%.$$

Таким образом, реальная процентная ставка равна 13,33%.

8.2. Анализ инвестиционных проектов

8.2.1. Дисконтирование денежных потоков инвестиционного проекта

Под инвестиционным проектом понимается любое вложение денежных средств, генерирующее денежные потоки в будущем [11], [14], [16]. Примерами инвестиционных проектов могут служить закупка производственного оборудования, вложение денег в банк под процент, приобретение ценных бумаг.

Рассмотрим проект, начальные инвестиции в который составляют I_0 усл. ед. (инвестиции в нулевом периоде). В конце временного периода (например, года) k ($k = \overline{1, n}$) проект приносит прибыль C_k усл. ед. Количество рассматриваемых временных периодов n называется горизонтом оценивания. Величина C_k называется свободным денежным потоком проекта и представляет собой чистую прибыль за вычетом расходов и налогов.

Денежные потоки проекта можно представить в виде табл. 8.1 (в этой таблице сумма вложения средств должна быть отрицательным значением, а сумма поступления средств – положительным).

Таблица 8.1. **Денежные потоки проекта**

Номер временного периода	0	1	2	…	k	…	n

Денежный поток	$-I_0$	C_1	C_2	…	C_k	…	C_n

Допустим, у инвестора имеется альтернатива: вложить деньги в проект или положить их на банковский депозит с процентной ставкой r. Тогда, чтобы получить ту же сумму, которая ожидается в качестве прибыли проекта в конце периода k, в банк следует положить в нулевом периоде сумму $\frac{C_k}{(1+r)^k}$. Чтобы иметь в банке денежные потоки, аналогичные всем потокам проекта, нужно положить в банк сумму, рассчитанную по формуле

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}, \tag{8.9}$$

где r – эффективная банковская процентная ставка для одного периода времени.

Эта величина называется *текущей (приведенной) стоимостью* проекта и показывает, каким должно быть альтернативное вложение средств, чтобы получить в банке последовательность платежей, равных свободным денежным потокам проекта.

Таким образом, текущая стоимость проекта представляет собой сумму дисконтированных денежных потоков проекта.

При расчете этой величины часто к последней ожидаемой прибыли проекта C_n прибавляют рыночную стоимость проекта в конце горизонта оценивания. Для расчета текущей стоимости проекта в приложении MS Excel можно использовать финансовую функцию НПЗ().

Процентная ставка r, используемая при дисконтировании денежных потоков проекта, называется *нормой дисконтирования*.

Приведем следующий пример.

Пример 8.7. Последовательность денежных потоков проекта представлена в табл. 8.2. В качестве альтернативы этому проекту рассматривается вложение денег в банк, годовая процентная ставка которого равна 17%. Требуется выбрать наилучший вариант вложения средств.

Таблица 8.2. **Денежные потоки проекта из примера 8.6.**

Номер года	0	1	2	3	4	5

Денежный поток	–1000	–200	300	600	700	500

Решение

По условию задачи r = 0,17. Определим текущую стоимость проекта по формуле (8.9):

$$PV = \frac{-200}{1+0{,}17} + \frac{300}{(1+0{,}17)^2} + \frac{600}{(1+0{,}17)^3} + \frac{700}{(1+0{,}17)^4} + \frac{500}{(1+0{,}17)^5};$$

$$PV = 1024{,}45.$$

Таким образом, чтобы получить денежные потоки, аналогичные потокам проекта, в банк следует вложить 1024,45 усл. ед. Поскольку начальные инвестиции в проект меньше (они составляют 1000 усл. ед.), то рассматриваемый проект является предпочтительным для инвестора.

8.2.2. Показатели эффективности инвестиционного проекта

Если начальные инвестиции в проект I_0 меньше, чем текущая стоимость проекта PV, то деньги выгоднее вкладывать в проект.

Чистая текущая стоимость проекта NPV (от англ. *net present value*) рассчитывается по формуле

$$NPV = PV - I_0 \qquad (8.10)$$

и показывает, на сколько меньше денежных единиц требуется вложить в проект, чем в банк в начальный момент времени, чтобы получить последовательность платежей, равных свободным денежным потокам проекта.

Если $NPV > 0$, то деньги выгоднее инвестировать в проект (проект эффективен).

Если $NPV < 0$, то выгоднее принять альтернативные предложения (например, положить деньги в банк).

Если $NPV = 0$, то необходимо использовать другие критерии эффективности.

Такая норма дисконтирования денежных потоков проекта, при которой чистая текущая ценность проекта равна нулю ($NPV = 0$), называется внутренней нормой прибыли проекта и обозначается IRR (от англ. *internal rate of return*). Таким образом, IRR показывает процентную ставку некоторого гипотетического банка, который дает такую же доходность, как и данный проект.

Внутренняя норма прибыли проекта находится из следующего уравнения:

$$NPV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad PV - I_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1 + IRR)^k} = I_0 . \qquad (8.11)$$

В пакете MS Excel для решения такого уравнения можно использовать надстройку *Поиск решения*, средство *Подбор параметра* или финансовую функцию ВНДОХ().

Если найденная внутренняя норма прибыли больше, чем норма дисконтирования ($IRR > r$), то рассматриваемый проект является выгодным для инвестора.

Если $IRR < r$, то проект следует отвергнуть, так как альтернативные вложения лучше.

Если $IRR = r$, то инвестиции в проект окупаются.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 8.8. Для условия примера 8.7 (денежные потоки проекта приведены в табл. 8.2) необходимо рассчитать показатели эффективности проекта.

Решение

В примере 8.7. была рассчитана текущая стоимость проекта как сумма дисконтированных денежных потоков проекта: PV = 1024,45. Чистая текущая стоимость проекта показывает, на сколько меньше начальных инвестиций требует проект, чем банковский депозит, и рассчитывается по формуле (8.10)

$$NPV = PV - I_0 = 1024{,}45 - 1000 = 24{,}45 .$$

Поскольку чистая текущая стоимость проекта положительна, он является привлекательным для инвесторов.

Внутренняя норма прибыли проекта находится из уравнения (8.11):

$$1000 = \frac{-200}{1 + IRR} + \frac{300}{(1 + IRR)^2} + \frac{600}{(1 + IRR)^3} + \frac{700}{(1 + IRR)^4} + \frac{500}{(1 + IRR)^5} .$$

Решив его, находим IRR = 17,72% (можно использовать надстройку *Подбор параметра* или стандартную функцию ВНДОХ()). Поскольку внутренняя норма прибыли данного проекта выше, чем норма дисконтирования (r = 17%), он является выгодным.

Если необходимо выбрать один из взаимоисключающих проектов или ранжировать проекты по степени целесообразности их реализации, также применяют показатели эффективности, т. е. для каждого проекта рассчитываются чистая текущая стоимость и внутренняя норма прибыли, а затем выбирают тот проект, для которого эти показатели наибольшие. При этом не всегда можно сделать однозначный выбор только по этим критериям.

Пример 8.9. Проект *А* требует начальных инвестиций 100 усл. ед. и генерирует следующие денежные потоки: C_1 = 120 усл. ед.; C_2 = 50 усл. ед. Начальные инвестиции для проекта *В* равны 200 усл. ед., а свободные денежные потоки – C_1 = 250 усл. ед.; C_2 = 50 усл. ед. Ставка дисконтирования составляет 15% годовых. Требуется сравнить эффективность предложенных проектов.

Решение

Рассчитаем показатели эффективности для данных проектов. По формуле (8.9) текущая стоимость каждого проекта рассчитывается следующим образом:

$$PV_A = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} = \frac{120}{1+0{,}15} + \frac{50}{(1+0{,}15)^2} = 142{,}155;$$

$$PV_B = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} = \frac{250}{1+0{,}15} + \frac{50}{(1+0{,}15)^2} = 255{,}199.$$

Чистая текущая стоимость проектов вычисляется по формуле (8.10):

$$NPV_A = PV_A - I_{oA} = 142{,}155 - 100 = 42{,}155;$$

$$NPV_B = PV_B - I_{oB} = 255{,}199 - 200 = 55{,}199.$$

Внутренняя норма прибыли каждого проекта определяется из уравнения (8.11):

- Для проекта *А*:

$$\frac{120}{1+IRR_A} + \frac{50}{(1+IRR_A)^2} = 100 \quad \rightarrow \quad IRR_A = 0{,}53 = 53\%.$$

- Для проекта *B*:

$$\frac{250}{1+IRR_B}+\frac{50}{(1+IRR_B)^2}=200 \quad \rightarrow \quad IRR_B=0{,}43=43\%.$$

Таким образом, для анализируемых проектов получены следующие результаты: *NPVA* < *NPVB*, а *IRRA* > *IRRB*. В данной ситуации нельзя однозначно определить наиболее эффективный проект, используя лишь показатели эффективности.

8.2.3. Норма дисконтирования денежных потоков проекта

В качестве нормы дисконтирования можно брать процентную ставку банка только в том случае, когда риск, связанный с проектом, и риск, связанный с банковским депозитом, одинаковы. Обычно это не так, и в качестве нормы дисконтирования берут внутреннюю норму прибыли альтернативных проектов с таким же финансовым риском, как и у данного проекта.

В условиях инфляции используемая в расчетах норма дисконтирования должна быть скорректирована, поскольку инфляция влияет на внутреннюю норму прибыли альтернативных проектов.

В п. 8.1.6 была приведена зависимость (8.8) между реальной процентной ставкой ($\widehat{r}$) и номинальной процентной ставкой банка (r). При этом реальная процентная ставка в условиях инфляции оказалась меньше номинальной.

При оценке инвестиционного проекта нужно считать, что заявленная внутренняя норма прибыли альтернативных проектов – это аналог реальной процентной ставки, а норма дисконтирования – это аналог номинальной процентной ставки. Поэтому соответствующая норма дисконтирования в условиях инфляции должна быть больше, чем норма прибыли альтернативных проектов. Из формулы (8.8) получим следующее выражение для номинальной процентной ставки:

$$\widehat{r}=\frac{r-i}{1+i} \quad \rightarrow \quad r=\widehat{r}+i+\widehat{r}i\,.$$

Таким образом, при наличии инфляции норма дисконтирования рассчитывается по формуле

$$r=\widehat{r}+i+\widehat{r}i\,, \tag{8.12}$$

где $\hat{r}$ – реальная процентная ставка (внутренняя норма прибыли альтернативных проектов);
i – уровень инфляции;
r – номинальная норма дисконтирования, применяемая в условиях инфляции.

Приведем следующий пример.

Пример 8.10. Пусть в примере 8.7 внутренняя норма прибыли альтернативных проектов равна 17%, а годовой уровень инфляции – 10%. Тогда в расчетах следует использовать следующую норму дисконтирования:

$$r = 0{,}17 + 0{,}1 + 0{,}17 \cdot 0{,}1 = 0{,}287 \text{ или } r = 28{,}7\% .$$

Чистая текущая ценность проекта рассчитывается следующим образом:

$$NPV = -1000 - \frac{200}{1 + 0{,}287} + \frac{300}{(1 + 0{,}287)^2} + \frac{600}{(1 + 0{,}287)^3} +$$

$$+ \frac{700}{(1 + 0{,}287)^4} + \frac{500}{(1 + 0{,}287)^5} = -296{,}07 .$$

Таким образом, в условиях инфляции данный проект становится непривлекательным для инвестора (отрицательное значение *NPV*).

8.2.4. Модель определения оптимального портфеля инвестиционных проектов

Часто при выборе инвестиционных проектов у менеджеров возникают трудности по их реализации в рамках ограниченных ресурсов. Задачу выбора оптимального портфеля инвестиционных проектов при ограничениях на начальные инвестиции можно представить в виде линейной целочисленной экономико-математической модели [14].

Рассмотрим возможность реализации n инвестиционных проектов. Эффективность i-го проекта характеризуется чистой текущей стоимостью проекта NPV_i ($i = \overline{1, n}$). Первоначальные инвестиции, необходимые для реализации i-го инвестиционного проекта, составляют

I_0^i $(i = \overline{1, n})$. Размер имеющихся в распоряжении финансовых ресурсов равен $I^{выд}$.

Введем переменную x_i, которая обозначает решение о реализации либо отклонении i-го инвестиционного проекта и может принимать два значения:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й инвестиционный проект принимается;} \\ 0, \text{ если } i\text{-й инвестиционный проект отклоняется} \end{cases}$$

Целевая функция задачи представляет собой общую эффективность портфеля инвестиционных проектов:

$$F = \sum_{i=1}^{n} NPV_i x_i \to max. \tag{8.13}$$

Ограничение на финансовые ресурсы состоит в том, что общие начальные инвестиции не должны превышать имеющихся ресурсов $I^{выд}$, т. е. соответствовать неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} I_0^i x_i \le I^{выд}. \tag{8.14}$$

Прямые ограничения на значения переменных имеют следующий вид:

$$x_i \in \{0,1\} \quad (i = \overline{1, n}). \tag{8.15}$$

В каждой конкретной ситуации система ограничений может быть расширена. Например, при использовании кроме финансов других ограниченных ресурсов вводятся дополнительные ограничения по этим ресурсам аналогично (8.14). Если же требуется исключить одновременную реализацию некоторых инвестиционных проектов (например, для проектов 1 и 2) математическое выражение, описывающее это условие, будет иметь следующий вид:

$$x_1 + x_2 \le 1.$$

Рассмотрим пример формирования инвестиционного портфеля.

Пример 8.11. Предприятие по производству сборных деревянных коттеджей планирует осуществить модернизацию оборудования, которая может быть реализована посредством четырех инвестиционных проектов. Величина первоначальных инвестиций и денежные потоки по годам для всех проектов приведены в табл. 8.3.

Ставка дисконтирования (r) составляет 35% в год. Известно, что финансовые возможности предприятия для модернизации ограничены суммой 720 млн р. Кроме того, предприятие располагает земельным участком площадью 2 га, а для реализации проектов необходимы площади, соответственно: 0,2; 0,7; 0,5; 1 га. После модернизации оборудования по инвестиционным проектам предприятие будет выпускать одинаковую продукцию (коттеджи) в объеме 20, 45, 75 и 25 шт., соответственно, при емкости рынка 150 единиц продукции в год.

Таблица 8.3. **Характеристики инвестиционных проектов, млн р.**

Проект	Начальные инвестиции	Свободные денежные потоки по годам			
		$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
A	250	90	130	180	150
B	300	130	150	175	195
C	240	95	135	155	160
D	320	125	175	210	200

Необходимо сформировать оптимальный портфель инвестиционных проектов для модернизации оборудования.

Решение

Внесем исходные данные задачи на рабочий лист Excel. Для каждого инвестиционного проекта рассчитаем чистую текущую стоимость в ячейках G4:G7 (рис. 8.1). Для определения текущей стоимости проекта используем финансовую функцию НПЗ(), а затем из нее вычитаем размер начальных инвестиций.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ставка	дисконтирования		0,35			
2	Проект	Начальные инвестиции, млн.руб.	Свободные денежные потоки по годам, млн.руб				NPV, млн.руб.
3			1	2	3	4	
4	A	250	90	130	180	150	=НПЗ($D$1;C4:F4)-B4
5	B	300	130	150	175	195	=НПЗ($D$1;C5:F5)-B5
6	C	240	95	135	155	160	=НПЗ($D$1;C6:F6)-B6
7	D	320	125	175	210	200	=НПЗ($D$1;C7:F7)-B7

Рис. 8.1. **Денежные потоки проектов и формулы расчета чистой текущей стоимости**

Получаем следующие оценки эффективности каждого проекта: $NPV_A = 6{,}32$; $NPV_B = 8{,}44$; $NPV_C = 15{,}61$; $NPV_D = 14{,}18$ (рис. 8.2). Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$F = 6{,}32x_1 + 8{,}44x_2 + 15{,}61x_3 + 14{,}18x_4 \to max,$$

где x_i $(i = \overline{1,4})$ – это решение принять или отклонить соответствующий проект.

Ограничение на финансовые ресурсы имеют вид неравенства

$$250x_1 + 300x_2 + 240x_3 + 320x_4 \le 720.$$

Ограничение на используемый земельный участок имеет вид

$$0{,}2x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}5x_3 + x_4 \le 2.$$

Ограничение на объемы сбыта продукции имеют следующий вид:

$$20x_1 + 45x_2 + 75x_3 + 25x_4 \le 150.$$

Прямые ограничения – $x_i \in \{0{,}1\}$ $\quad (i = \overline{1,4})$.

Решим эту задачу с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel. Для этого в столбце H отведем четыре ячейки H4:H7 под значения переменных (рис. 8.2). Начальные значения этих переменных зададим равными 0 (можно задавать любые начальные приближения). В столбцах I и J запишем данные для дополнительных ограничений: необходимую площадь под каждый проект и объемы производства коттеджей, которые будут достигнуты после реализации инвестиционных проектов.

	A	G	H	I	J
2 3	Проект	NPV, млн.руб.	Переменные	Необходимые площади	Объемы производства
4	A	6,32р.	0	0,2	20
5	B	8,44р.	0	0,7	45
6	C	15,61р.	0	0,5	75
7	D	14,18р.	0	1	25

Рис. 8.2. **Фрагмент оформления условия задачи**

В строке 10 подготовим ячейки под левые части ограничений, записав туда формулы расчета требуемых начальных инвестиций, необходимой площади и общего объема производства по всем реализуемым проектам (используем функцию СУММПРОИЗВ() (рис. 8.3). В строке 12 запишем значения правых частей ограничений (выделенные финансы, выделенная площадь и максимальное количество коттеджей, которые можно будет реализовать). Целевая функция в ячейке B14 представляет собой совокупную чистую текущую стоимость всех реализуемых проектов.

	B	C	E
9	Требуемые финансы	Требуемая площадь	Общий объем производства
10	=СУММПРОИЗВ(B4:B7;H4:H7)	=СУММПРОИЗВ(H4:H7;I4:I7)	=СУММПРОИЗВ(H4:H7;J4:J7)
11	Выделенные финансы	Выделенная площадь	Емкость рынка
12	720	2	150
13	Общая эффективность инвестирования		
14	=СУММПРОИЗВ(G4:G7;H4:H7)		

Рис. 8.3. **Ячейки целевой функции, левых и правых частей ограничений**

Вызвав надстройку *Поиск решения*, заполним диалоговое окно, как показано на рис. 8.4. Группа последних трех ограничений задает условие $x_i \in \{0,1\}$ $(i = \overline{1,4})$ (аналогично задаче о назначениях). Нажав кнопку *Параметры*, следует установить флажок *Линейная модель*.

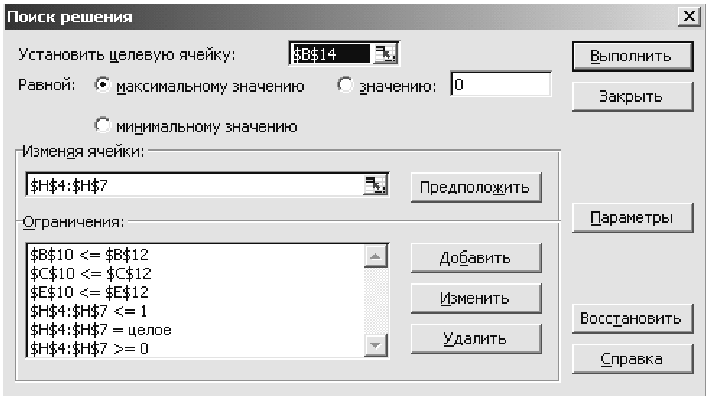


Рис. 8.4. **Окно *Поиск решения* для задачи формирования оптимального портфеля инвестиционных проектов**

После нажатия кнопки *Выполнить* получим следующие оптимальные значения переменных: $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = 1$. Таким образом, оптимальный портфель инвестиционных проектов включает проекты *C* и *D*, а проекты *A* и *B* отклоняются. Значения левых частей ограничений и целевая функция для такого набора инвестиционных проектов показаны на рис. 8.5. Очевидно, что совокупная чистая текущая стоимость проектов составит 29,79 млн р. Ограничения задачи выполнены, при этом из имеющихся ресурсов будет использовано лишь 560 млн р. и 1,5 га земельного участка, а спрос на 150 коттеджей будет удовлетворен только в размере 100 коттеджей.

Требуемые финансы	Требуемая площадь		Общий объем производства		
560	1,5		100		
Выделенные финансы	Выделенная площадь		Емкость рынка		
720	2		150		
Общая эффективность инвестирования					
29,79491609					

Рис. 8.5. **Результаты решения задачи**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экономико-математическое моделирование в настоящее время является основным методом исследования экономических систем. Однако корректное использование этого метода невозможно без знаний основных принципов и понятий моделирования, без умения использовать основные типы моделей и адаптировать их к конкретной ситуации, без владения инструментарием практической реализации этих моделей.

Данный курс лекций дает базовые знания по дисциплине «Экономико-математические методы и модели», позволяет заложить основу развития практических навыков моделирования, которые необходимы современному экономисту. Хотя рассмотренный набор стандартных моделей не является всеобъемлющим, он охватывает достаточно широкий спектр экономико-математических дисциплин (математическая экономика, эконометрика, исследование операций) и дает представление об основных принципах моделирования, а также о возможностях современных программных продуктов в плане реализации моделей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бондарева, В. В.** Автоматизация решения задач линейного программирования : пособие / В. В. Бондарева, О. И. Еськова. – Гомель : УО «Бел. торг.-экон. ун-т потреб. кооп.», 2003.

2. **Гарнаев, В. П.** Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах / В. П. Гарнаев. – СПб. : BHV, 1999.

3. **Гельман, В. Я.** Решение математических задач средствами Excel : практикум / В. Я. Гельман. – СПб. : Питер, 2003.

4. **Зайцев, М. Г.** Методы оптимизации управления для менеджеров. Компьютерно ориентированный подход : учеб. пособие / М. Г. Зайцев. – М. : Дело, 2002.

5. **Костевич, Л. С.** Математическое программирование : учебно-практ. пособие / Л. С. Костевич. – Минск : БГЭУ, 2003.

6. **Костевич, Л. С.** Теория игр. Исследование операций / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Минск : Выш. шк., 1982.

7. **Красс, М. С.** Математика для экономических специальностей : учеб. / М. С. Красс. – М. : Дело, 2002.

8. **Кузнецов, А. В.** Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. Н. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : Выш. шк., 2001.

9. **Курицкий, Б. Я.** Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – СПб. : BHV, 1997.

10. **Минюк, С. А.** Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Минск : ТетраСистемс, 2002.

11. **Экономико-математические** методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : БГЭУ, 2000.

12. **Экономико-математические** методы и прикладные модели : учеб. пособие / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2001.

13. **Экономико-математические** методы и модели. Компьютерные технологии решения : учеб. пособие / И. Л. Акулич [и др.]. – Минск : БГЭУ, 2003.

14. **Экономико-математические** методы и модели : учеб. пособие / С. Ф. Миксюк [и др.] ; под общ. ред. С. Ф. Миксюк, В. Н. Комкова. – Минск : БГЭУ, 2006.

15. **Экономико-математические** методы и модели : практикум к лабораторным занятиям. В 5 ч. Ч. 1 / О. И. Еськова, Т. А. Заяц, В. В. Бондарева. – Гомель : УО «Бел. торг.-экон. ун-т потреб. кооп.», 2005.

16. **Юферева, О. Д.** Экономико-математические методы и модели : сб. задач / О. Д. Юферева. – Минск : БГЭУ, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

Тема 1. Основы моделирования социально-экономических систем и процессов 5

1.1. Экономико-математические методы и их классификация 5

1.2. Основные понятия моделирования 6

1.3. Классификация экономико-математических моделей 8

1.4. Этапы построения моделей 9

Тема 2. Модели математического программирования 11

2.1. Общая постановка задачи математического программирования 11

2.2. Задачи линейного программирования 14

2.3. Графический метод решения задачи линейного программирования 19

2.4. Решение задач линейного программирования с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel 26

2.5. Анализ устойчивости оптимального решения 32

2.6. Анализ отчетов Excel на примере задачи планирования производства продукции 37

2.7. Задачи транспортного типа 51

Тема 3. Матричные игры 59

3.1. Основные понятия теории игр 59

3.2. Решение матричных игр. Принцип минимакса 63

3.3. Решение игры в смешанных стратегиях путем сведения к задаче линейного программирования 68

3.4. Игры с природой 74

Тема 4. Модели прогнозирования экономических процессов 81

4.1. Постановка задачи прогнозирования 81

4.2. Структура временного ряда 82

4.3. Простейшие методы прогнозирования 83
4.4. Трендовые модели прогнозирования 86
4.5. Возможности пакета MS Excel для решения задач прогнозирования 96
Тема 5. Сетевое планирование и управление 99
5.1. Основные понятия сетевого планирования 99
5.2. Построение сетевого графика 101
5.3. Временные параметры сетевого графика 104
5.4. Оптимизация сетевого графика 112
Тема 6. Модели межотраслевого баланса 117
6.1. Принципиальная схема межотраслевого баланса 117
6.2. Применение балансовых моделей в задачах планирования производства 119
6.3. Применение балансовых моделей при ограничениях на внешние ресурсы 124
Тема 7. Системы массового обслуживания 128
7.1. Структура систем массового обслуживания 128
7.2. Классификация систем массового обслуживания 129
7.3. Простейшая система массового обслуживания 130
7.4. Графическая модель разомкнутой простейшей системы массового обслуживания 132
7.5. Основные показатели эффективности работы системы массового обслуживания 133
7.6. Расчет характеристик систем массового обслуживания 134
Тема 8. Модели инвестиционного анализа 145
8.1. Модели анализа основных финансовых операций 145
8.2. Анализ инвестиционных проектов 153
Заключение 164
Список рекомендуемой литературы 166

Учебное издание

Еськова Оксана Ивановна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Курс лекций
для студентов экономических специальностей

Редактор Н. В. Славницкая
Компьютерная верстка Л. Ф. Кириленкова

Подписано в печать 14.09.06. Бумага типографская № 1.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 1050 экз. Заказ №

Учреждение образования «Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.
ЛИ № 02330/0056814 от 02.03.2004 г.

Отпечатано в учреждении образования «Белорусский
торгово-экономический университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

О. И. ЕСЬКОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Курс лекций
для студентов дневной формы обучения
экономических специальностей

Гомель 2006

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

О. И. ЕСЬКОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Курс лекций
для студентов дневной формы обучения
экономических специальностей

Гомель 2006