М. М. Шовгеня,
Д. М. Шовгеня
Научный руководитель
Л. А. Воробей
Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации
г. Гомель, Республика Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Напомним, что дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные. В природе и обществе встречаются процессы, где некоторые величины увеличиваются за равные промежутки времени в одно и то же число раз. Их называют процессами естественного роста. Если допустить, что значение величины $y(t)$ меняется одинаково не в течение промежутка фиксированной длительности Δt, а мгновенно, то скорость изменения величины $v(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Уравнение, описывающее этот процесс, можно записать так: $v(t) = ky(t)$. Так как $v(t) = y'(t)$, то получим дифференциальное уравнение с разделяющими переменными: $y'(t) = ky(t)$. Это уравнение называют дифференциальным уравнением естественного роста. Впервые его получил Якоб Бернулли.

Рассмотрим применение полученного уравнения при решении задач социально-экономической сферы.

Пример (износ оборудования). Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна его фактической стоимости. Найдем закон изменения стоимости оборудования, если начальная его стоимость равна S_0.

Решение. Пусть $s(t)$ – стоимость оборудования в момент времени t. Тогда $s'(t)$ – скорость изменения стоимости вследствие износа. Согласно условию задачи получаем следующее уравнение: $s' = -ks$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Знак «–» говорит об уменьшении стоимости оборудования с течением времени.

Разделим переменные: $\frac{ds}{dt} = -ks,\ ds = -ksds,\ \frac{ds}{s} = -kdt.$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим:

$lns = -kt + lnC$, где $C = const$.

$lns = lne^{-kt} + lnC$.

$lns = ln\,(Ce^{-kt})$.

Общее решение дифференциального уравнения $s' = -ks$ имеет вид: $s = Ce^{-kt}$.

Начальная стоимость s_0 задает начальное условие для полученного уравнения: $s(0) = s_0 \times$ $\times\ s' = -ks$ при $s(0) = s_0$.

Найдем C, подставив в полученное общее решение условие $s(0) = s_0$. Имеем: $s(0) = Ce^{-k\,\cdot\,0} =$ $= C = s_0$. Тогда частное решение уравнения $s' = -ks$ равно $s = s_0e^{-kt}$. Таким образом, зная коэффициент износа k и начальную стоимость оборудования s_0, по формуле $s = s_0e^{-kt}$ можно найти фактическую стоимость оборудования по истечении любого времени t.

С помощью дифференциального уравнения естественного роста можно решить задачу истощения ресурсов Земли и другие задачи социальной и экономической сфер.