БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ”

Кафедра информационно-вычислительных систем

АВТОМАТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пособие
для студентов дневной формы обучения экономических специальностей

Гомель 2003

ББК 22.18
А 22

Авторы-составители: *В. В. Бондарева*, канд. техн. наук, ст. преподаватель;
О. И. Еськова, канд. техн. наук, доцент

Рецензенты: *И. В. Максимей*, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой математических проблем управления Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;
Л. П. Авдашкова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом УО "Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации". Протокол № 5 от 11 июня 2002 г.

А 22 **Автоматизация** решения задач линейного программирования: Пособие для студентов дневной формы обучения экономических специальностей / Авторы-составители: *В. В. Бондарева, О. И. Еськова*. — Гомель: УО "Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации", 2003. — 68 с.
ISBN 985-461-005-5

ББК 22.18

ISBN 985-461-005-5

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость интенсивного развития экономики и коренной ее перестройки требует от специалистов по управлению овладения методами научного анализа экономических процессов и умения использовать для этой цели вычислительную технику. В курсе “Экономико-математические методы и модели” рассматриваются принципы математического моделирования, являющегося наиболее эффективным методом анализа социально-экономических проблем и процессов. Этот курс позволяет объединить знания из различных областей математики, экономики и информатики и применить их для решения конкретных экономических задач.

Важным разделом курса “Экономико-математические методы и модели” является линейное программирование. Настоящее пособие посвящено изучению данного раздела. Оно включает необходимые теоретические сведения по различным разделам линейного программирования, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы студентов. Все лабораторные работы сопровождаются вопросами для самоконтроля.

Пособие состоит из двух разделов. В первом из них осуществляется общая постановка задачи линейного программирования, приводятся основные определения и пример формализации экономической задачи.

Второй раздел содержит пять лабораторных работ по следующим темам:

1. Графическое решение задач линейного программирования в MathCad.
2. Решение задач линейного программирования в Excel с помощью надстройки *Поиск решения*.
3. Оптимальное распределение ресурсов. Анализ отчетов.
4. Задачи транспортного типа.
5. Задача о назначениях.

Первая лабораторная работа дает возможность студентам наглядно представить себе основные понятия линейного программирования на примере задачи с двумя неизвестными. Для автоматизации решения задачи используется пакет программ MathCad.

Целью второй лабораторной работы является отработка навыков формализации экономических задач и решения полученных математических моделей с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel.

Третья лабораторная работа на примере задачи распределения ресурсов знакомит студентов с основными понятиями теории двойственности и ее экономической интерпретацией. Эту задачу студенты учатся решать на основе отчетов, полученных с помощью надстройки *Поиск решения* пакета Excel.

В четвертой лабораторной работе решается транспортная задача, которая имеет достаточно наглядную экономическую интерпретацию. Студенты учатся оперировать большим количеством неизвестных величин и закрепляют навыки использования надстройки *Поиск решения*.

В пятой лабораторной работе студенты знакомятся с задачей о назначениях. Их внимание акцентируется на особенностях задач целочисленного программирования и способах задания условия целочисленности в Excel.

1. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее прежде всего следует записать с помощью математических выражений (уравнений и неравенств), т. е. составить экономико-математическую модель. Можно наметить следующую общую схему формирования модели:

- выбор некоторого числа переменных величин, заданием числовых значений которых однозначно определяется одно из возможных состояний исследуемого явления;
- выражение взаимосвязей, присущих исследуемому явлению, в виде математических соотношений (уравнений и неравенств), которые образуют систему ограничений задачи;
- количественное выражение выбранного критерия оптимальности в форме целевой функции;
- математическая формулировка задачи как задачи отыскания экстремума целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные.

Для иллюстрации приведенной схемы рассмотрим пример.

Пример. Имеется три вида продуктов питания: A_1, A_2, A_3. Известна стоимость единицы каждого продукта: 10, 5 и 12 усл. ед. Из этих продуктов необходимо составить пищевой рацион, который должен содержать белков не менее 200 единиц, жиров не менее 150 единиц, углеводов не менее 560 единиц.

Содержание элементов в единице каждого продукта задано табл. 1.

Таблица 1. **Исходные данные для составления рациона, усл. ед.**

Продукты	Содержание питательных веществ в единице продукта			Стоимость единицы продукта
	белки	жиры	углеводы	
A_1	5	7	8	10
A_2	4	1	2	5
A_3	9	3	6	12
Требование к рациону	200	150	560	—

Таким образом, единица продукта A_1 содержит 5 единиц белков, 7 единиц жиров, 8 единиц углеводов и т. д.

Требуется так составить пищевой рацион, чтобы обеспечить заданное содержание компонентов при минимальной стоимости рациона.

Решение

Обозначим через x_1, x_2, x_3 соответственно количество продуктов A_1, A_2 и A_3, входящих в рацион. Общая стоимость рациона при этом будет рассчитываться следующим образом:

$$F = 10x_1 + 5x_2 + 12x_3. \qquad (1)$$

По условию задачи требуется, чтобы эта стоимость была минимальной, т. е. $F \to min$.

Общее количество белков, содержащееся в рационе, не должно быть меньше 200. Это требование можно выразить неравенством

$$5x_1 + 4x_2 + 9x_3 \geq 200. \qquad (2)$$

Аналогично записываются ограничения для жиров:

$$7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 150. \qquad (3)$$

Для углеводов ограничения выражаются следующим неравенством:

$$8x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 560. \qquad (4)$$

Количество продуктов не может быть отрицательной величиной, поэтому зададим также условия:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \qquad (5)$$

Таким образом, математическая модель задачи формулируется следующим образом: найти такие значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих линейным ограничениям (2)–(5), при которых линейная функция (1) обращалась бы в минимум.

В общем виде математическая формулировка задачи линейного программирования (ЗЛП) следующая: найти значения переменных x_i ($i = 1, ..., n$), при которых достигается максимум (минимум) целевой функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max\ (min) \tag{6}$$

и выполняются ограничения:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\}\ b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\}\ b_2; \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\}\ b_m; \\ x_j \ge 0,\ (i = 1, \dots, n), \end{array}\right\} \tag{7}$$

где a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные величины;
m — число уравнений;
n — число переменных.

Запись {≤, =, ≥} в ограничениях (7) означает, что возможен один из знаков (≤, = или ≥).

Решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором выполняются все ограничения, называется допустимым. Допустимое решение, при котором функция F принимает оптимальное значение (максимум или минимум), называется оптимальным.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕМАМ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ, ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ И КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Работа 1. Графическое решение задач линейного программирования в MathCad

Основные теоретические сведения

Решение задачи линейного программирования может быть найдено графическим методом в случае двух неизвестных, т. е. при $n = 2$.

ЗЛП при этом можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} F = c_1x_1 + c_2x_2 \to max\ (min); \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2\ \{\le, =, \ge\}\ b_1; \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\ \{\le, =, \ge\}\ b_m; \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{array}\right\}$$

Этот метод основан на следующих теоретических положениях и понятиях:

- Областью допустимых решений (ОДР) задачи математического программирования называется множество точек (x_1, x_2), которые удовлетворяют всем ограничениям задачи. ОДР линейной задачи является выпуклым множеством. Чаще всего ОДР представляет собой некоторый многоугольник.
- Оптимальное решение линейной задачи находится на границе ОДР — в угловой точке или на ребре.
- Линией уровня целевой функции $F = f\,(x_1, x_2)$ называется кривая на плоскости X_1OX_2, в каждой точке которой значение целевой функции одинаково:

$$f\,(x_1, x_2) = C.$$

При этом C — некоторая константа.

Линия уровня представляет собой проекцию на плоскость X_1OX_2 линии пересечения поверхности, соответствующей функции $F = f\,(x_1, x_2)$ и плоскости $F = C$ (рис. 1).

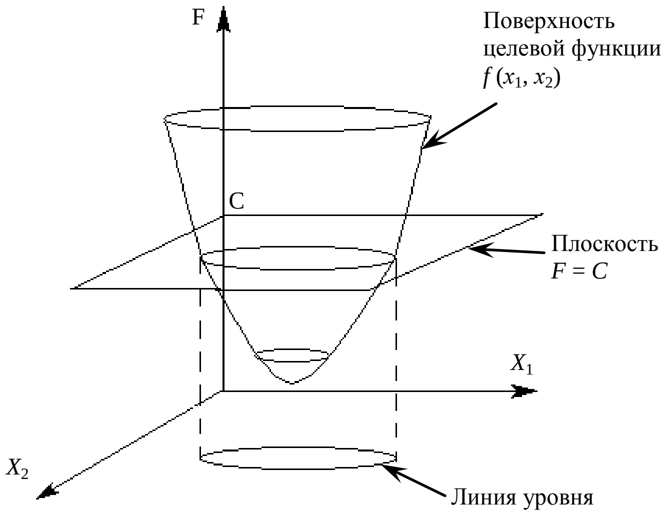


Рис. 1. **Определение линии уровня целевой функции**

Для линейной задачи поверхность $F = f(x_1, x_2)$ представляет собой плоскость в пространстве, а линия уровня линейной задачи — это прямая на плоскости X_1OX_2.

- Вектор-градиент целевой функции $\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$ перпендикулярен линии уровня и показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции.

Пример. Рассмотрим решение линейной задачи математического программирования графическим методом:

$$F = 2x_1 + x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18; \\ 3x_1 + x_2 \le 44; \\ 2x_1 + 5x_2 \le 73; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Шаг 1. Построение области допустимых решений

Каждое из неравенств системы ограничений задачи задает на плоскости X_1OX_2 некоторую полуплоскость. Границами этих полуплоскостей являются прямые

$$x_1 + x_2 = 18; \qquad (8)$$

$$3x_1 + x_2 = 44; \qquad (9)$$

$$2x_1 + 5x_2 = 73. \qquad (10)$$

Построим эти граничные прямые и стрелками отметим те полуплоскости, которые соответствуют знаку неравенства (рис. 2).

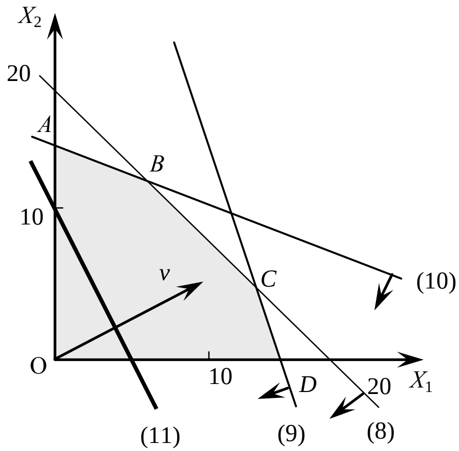


Рис. 2. **Решение ЗЛП графическим методом**

Чтобы легко было определить, какую выбрать полуплоскость, достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству. Если удовлетворяет, то данное неравенство выполняется в полуплоскости, содержащей пробную точку. В противном случае берется полуплоскость, не содержащая пробной точки. В качестве пробной точки часто удобно принимать начало координат O (0;0). Например, для первого ограничения проверяем точку O (0;0): $0 + 0 < 18 \Rightarrow (0;0)$ принадлежит искомой полуплоскости.

Пересечение полуплоскостей, соответствующих ограничениям-неравенствам, и есть ОДР. Таким образом, получаем многоугольник *OABCD* — область допустимых решений.

Шаг 2. Построение и исследование линий уровня целевой функции

Для построения линии уровня приравняем выражение целевой функции к некоторой константе, например 10, и получим следующее уравнение прямой (константа может быть любая, мы выбираем ее из соображений удобства построения прямой):

$$2x_1 + x_2 = 10. \tag{11}$$

Вектор-градиент целевой функции $\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2{,}1)$ перпендикулярен линии уровня целевой функции (11) и показывает направление ее наискорейшего возрастания. Для удобства изображения на графике можно взять вектор, пропорциональный ∇, например $v =$ $= (10{,}5)$. Если перемещать прямую (11) параллельно самой себе в направлении вектора v, то значение целевой функции на этой прямой будет возрастать. Последняя точка ОДР, которой коснется линия уровня, будет точка C. Она является оптимальным решением задачи, поскольку в ней значение целевой функции наибольшее, и точка еще является допустимой.

Очевидно, что при решении задачи на минимум целевой функции нужно рассматривать перемещение линии уровня целевой функции в направлении, противоположном вектору ∇.

Шаг 3. Вычисление координат оптимальной точки

Координаты точки C являются решением систем уравнений (8) и (9):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_1 + x_2 = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 13 \\ x_2^* = 5. \end{cases}$$

Оптимальным является значение целевой функции

$$F_{max} = 2x_1^* + x_2^* = 2 \cdot 13 + 5 = 31.$$

При решении ЗЛП графическим методом возможны также нижеуказанные случаи расположения линии уровня и ОДР:

- Если ОДР не ограничена в направлении возрастания (или убывания) целевой функции, то задача оптимизации не имеет решения (рис. 3).

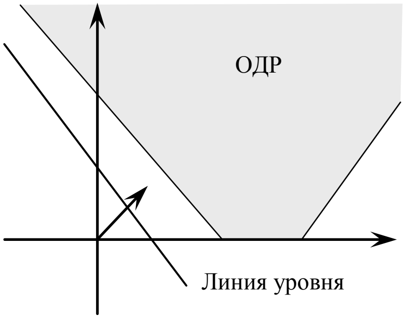


Рис. 3. **Неограниченная область допустимых решений**

- Если линия уровня при перемещении совпадает с границей ОДР, то задача имеет бесконечное множество решений. Решением является любая точка на этой границе (рис. 4).

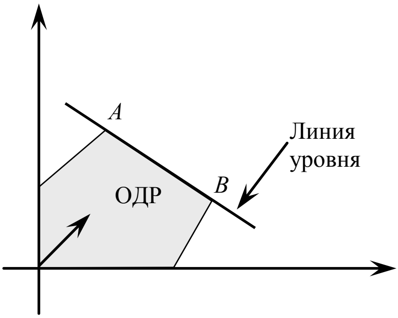


Рис. 4. **Бесконечное множество решений**

Автоматизировать процесс решения задачи графическим методом можно с помощью пакета MathCad.

Общие сведения о пакете MathCad 8.0

MathCad — это программа для математических и инженерных расчетов. Документ MathCad может содержать текст, уравнения и графики. Любой объект вводится в место расположения курсора MathCad (красный крестик). Вычисления выполняются по порядку, от начала к концу документа (сверху вниз и слева направо). Поэтому начинающим рекомендуется после ввода каждого уравнения нажимать клавишу Enter. Курсор при этом переходит на следующую строку. Текст вводится в двойных кавычках.

Уравнения бывают двух видов: определения и вычисляемые уравнения. С помощью определений можно присвоить значения переменным, задать функцию. В определениях используется знак “:=” (“присвоить”). Для его ввода нужно нажать клавишу “:”:

$x1 := 0$ (задание значения переменной)

Нажать “:”

$f1(x1) := 5 \cdot x1 + 2$ (задание функции).

Вычисляемые уравнения выдают результат вычислений после знака “=” (“равно”):

$f1(3) = 17$

Выдает MathCad

.

Чтобы ввести уравнение в общепринятом смысле, т. е. в смысле равенства, следует использовать знак “**=**” (вводится как “Ctrl” + “=”):

$2 \cdot x1 + 4 \cdot x2 \boldsymbol{=} 7$

Нажать “Ctrl” + “=”

.

В MathCad можно задать диапазонные переменные, которые берут свои значения из заданного диапазона всякий раз, когда они используются. Такие переменные необходимы, например, для задания области определения функции:

$x1 := 0..20$ (переменная x1 изменяется от 0 до 20 с шагом 1).

Нажать “;”

Основные сочетания клавиш для ввода символов и операторов MathCad приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Операторы в MathCad**

Оператор	Сочетание клавиш для ввода	Знак в MathCad
Присвоить	“:”	:=
Относительное равенство	“Ctrl” + “=”	**=**

Окончание табл. 2

Оператор	Сочетание клавиш для ввода	Знак в MathCad
Диапазон	“;”	..
Умножение	“*”	·
Деление	“/”	$\frac{\square}{\square}$
Сложение	“+”	$\square + \square$

Для включения в документ графика следует установить курсор в левый верхний угол будущего графика и выбрать в меню пункт *Вставить* / *График* / *X-Y чертеж*. Появится шаблон графика (рис. 5), в котором нужно задать переменную по оси *X* и переменную или функцию по оси *Y*. Также можно задать диапазоны изменения этих переменных. Если диапазоны не заданы, то MathCad сам подберет их.

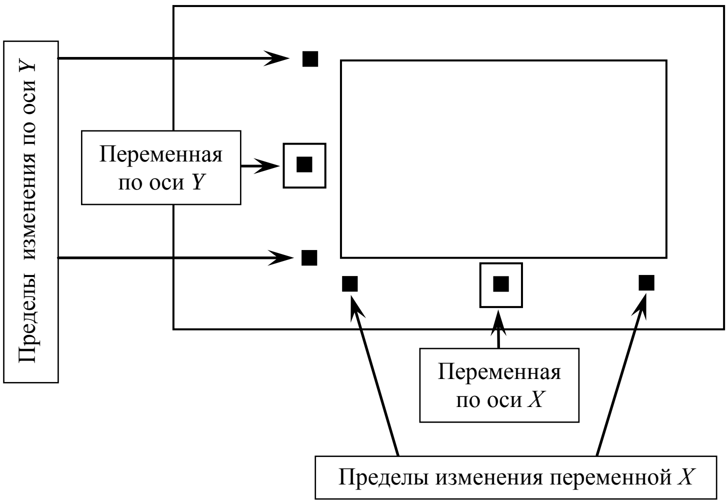


Рис. 5. **Шаблон графика MathCad**

Если нужно построить графики нескольких функций одновременно, то следует перечислить их через запятую в слоте по оси *Y*. Как только указатель мыши будет выведен из области графика, появится его изображение. Отформатировать график можно из контекстного меню или из главного меню *Формат* / *График* / *X-Y чертеж*.

Пример решения задачи

Пусть дана следующая задача линейного программирования:

$$F = 2x_1 + x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18; \\ 3x_1 + x_2 \le 44; \\ 2x_1 + 5x_2 \le 73; \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим ее в пакете MathCad 8.0 в следующем порядке:

1. Загрузим пакет MathCad 8.0. Для этого нажмем на панели задач кнопку *Пуск* и выберем *Программы* / *MathCad* 8 *Rus* / *MathCad 8*. Откроется окно приложения, имеющее обычную Windows-структуру.

2. Зададим диапазон изменения переменной x1:

$$x1 := 0..20.$$

При задании диапазона учитываем, что по условию $x_1 \ge 0$. Величина 20 выбрана произвольно. При необходимости диапазон затем можно будет откорректировать.

3. Для построения прямой x1 + x2 = 18, соответствующей первому ограничению, x2 нужно выразить через x1 и представить эту прямую в виде функции f1(x1). Для этого сначала запишем первое ограничение как относительное равенство:

$$x1 + x2 \mathbf{=} 18.$$

Затем выделим x2 и выберем в главном меню *Операции* / *Переменная* / *Решение*. MathCad напечатает выражение для x2 в месте расположения курсора:

$$\boxed{-x1 + 18}$$

Выведет MathCad

.

Затем зададим функцию f1(x1), присвоив ей полученное выражение:

$$f1(x1) := -x1 + 18.$$

Аналогично два других ограничения представим в виде функций (см. (*) на рис. 6).

$x1 := 0..20$

$x1 + x2 = 18$

$-x1 + 18$

$f1(x1) := -x1 + 18$

$3 \cdot x1 + x2 = 44$

$-3 \cdot x1 + 44$

$f2(x1) := -3 \cdot x1 + 44$

$2 \cdot x1 + 5 \cdot x2 = 73$

$\frac{-2}{5} \cdot x1 + \frac{73}{5}$

$f3(x1) := \frac{-2 \cdot x1}{5} + \frac{73}{5}$

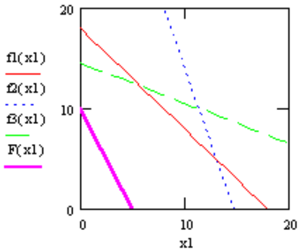
(*)

$2 \cdot x1 + x2 = C$

$-2 \cdot x1 + C$

$C := 10$

$F(x1) := -2 \cdot x1 + C$



$x1 := 0$

$x2 := 0$

Given

$x1 + x2 = 18$

$3 \cdot x1 + x2 = 44$

$Find(x1, x2) = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$

$F(x1, x2) := 2 \cdot x1 + x2$

$F(13, 5) = 31$

Рис. 6. **Текст документа MathCad**

Замечание. При вводе сложного выражения следует изучить его структуру и задавать операции в порядке, обратном выполнению вычислений. Например, для ввода $-\frac{2}{5} \cdot x1 + \frac{73}{5}$ нужно сначала нажать “+”. Появится шаблон операции сложения: ■+ ■.

Установив курсор на первый слот шаблона, нажмем “/”. Шаблон примет следующий вид: $\frac{■}{■} + ■$.

Далее в числитель дроби вводим произведение –2 · x1 (для ввода “·” нажимаем “*”), а в знаменатель вводим 5. Аналогично заполняем второе слагаемое.

4. Уравнение линии уровня целевой функции 2 · x1 + x2 **=** C также запишем в виде, разрешенном относительно x2. При этом константе C предварительно зададим произвольное значение:

2 · x1 + x2 **=** C;

–2 · x1 + C;

C := 10;

F(x1) := –2 · x1 + C.

5. Построим графики прямых, ограничивающих область допустимых решений и линии уровня целевой функции. Для этого в основном меню выберем *Вставка* / *График* / *X-Y чертеж*.

В появившемся шаблоне графика по оси *X* запишем имя переменной x1, а по оси *Y* перечислим все используемые функции: f1(x1), f2(x1), f3(x1), F(x1), нажимая после каждой запятую (при этом курсор переходит на новую строку). Пределы изменения переменной по оси *X* лучше сначала не задавать. Они будут установлены согласно заданному в начале документа диапазону x1. По оси *Y* можно задать пределы изменения от 0 (так как по условию $x_2 \geq 0$) до, например, 20. Выполним щелчок левой кнопкой мыши вне графика. Будут выведены прямые, соответствующие ограничениям и линии уровня. Далее необходимо так настроить график, чтобы область допустимых решений была хорошо на нем видна. С этой целью можно изменять пределы по осям *X* и *Y*. При этом верхний предел по оси *X* можно только уменьшать. Если необходимо увеличить этот предел, то для этого нужно изменить диапазон x1 в начале документа.

Следует также настроить параметры графика. Для этого необходимо щелкнуть мышью в области графика и затем выбрать в меню *Формат* / *График* / *X-Y чертеж*. На вкладке *Координаты X-Y* целесообразно установить флажки *Числа, Авторазмер* и *Автосетка* для обоих осей. На вкладке *Линии* нужно выбрать четвертую строку *trace 4*, которая соответствует линии уровня целевой функции, и для нее задать: *Толщина* = *2* и *Линия* = *solid* (сплошная). Такие параметры позволят выделить линию уровня на графике (см. рис. 6).

6. Используя тщательно настроенный график и учитывая знаки неравенств ограничений (см. описание выполнения шага 1 решения задачи), определим, как выглядит область допустимых решений (ОДР) задачи. В нашем случае ОДР — это пятиугольник, отсекаемый прямыми f1(x1), f2(x1), f3(x1) и осями координат. Увеличивая значение константы *C* в документе (например, задавая C := 20, 30), будем наблюдать движение линии уровня и определим последнюю точку ОДР, которой коснется линия уровня. Эта точка и будет оптимальным решением задачи. Как видно из графика, оптимальное решение находится в точке пересечения прямых f1(x1) и f2(x1).

7. Найти координаты оптимальной точки можно, решив систему уравнений, составленную из уравнений прямых, пересечением которых она является. Для решения систем уравнений в MathCad используется блок решения. Он начинается с ключевого слова Given. За ним следует тело блока, включающее ограничения (равенства или неравенства) и обычные определения. Завершает блок решения функция Find (*переменная1*, *переменная2*, …), которая после знака “=” возвращает вектор значений переменных. Переменные, которые используются в качестве аргументов, должны быть определены в начале блока решения. MathCad использует эти значения в качестве начальных.

Найдем координаты оптимальной точки, используя блок решения:

x1 := 0

x2 := 0

Задание начальных значений

Given

x1 + x2 **=** 18

3 · x1 + x2 **=** 44

Тело блока (ограничения)

$$\text{Find}\,(\text{x1, x2}) = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

MathCad выдает значения переменных x_1 и x_2 .

8. Вычислим значение целевой функции в найденной точке:

F (x1, x2) := 2 · x1 + x2

Определение целевой функции двух переменных

F (13,5) = 31

Выводит MathCad .

Итак, решением задачи являются значения $x_1 = 13$, $x_2 = 5$. Оптимальное значение целевой функции $F_{max} = 31$. Текст документа MathCad приведен на рис. 6.

Задания для самостоятельной работы

Решите задачу линейного программирования, используя информацию, приведенную в табл. 3.

Таблица 3. **Исходные данные для решения задачи линейного программирования**

№ п/п	Целевая функция	Ограничения	Ответ (x_1; x_2; $F_{max(min)}$)
1	$F = x_1 + 5x_2 \to max$	$3x_1 - x_2 \geq 9$; $2x_1 + 3x_2 \leq 50$; $-x_1 + 4x_2 \geq 19$	(7; 12; 67)
2	$F = 5x_1 + 3x_2 \to max$	$6x_1 - 5x_2 \geq 17$; $x_1 + 2x_2 \leq 34$; $-4x_1 + 9x_2 \geq 17$	(16; 9; 107)
3	$F = 9x_1 + 2x_2 \to max$	$11x_1 - 3x_2 \geq 24$; $9x_1 + 4x_2 \leq 110$; $-2x_1 + 7x_2 \geq 15$	(10; 5; 100)
4	$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$	$-3x_1 + 4x_2 \leq 30$; $3x_1 - x_2 \leq 15$; $4x_1 + 2x_2 \geq 28$	(10; 15; 65)
5	$F = x_1 + x_2 \to max$	$x_1 + 2x_2 \leq 14$; $-5x_1 + 3x_2 \leq 15$; $4x_1 + 6x_2 \geq 24$; $x_1, x_2 \geq 0$	(14; 0; 14)
6	$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$	$4x_1 - 3x_2 \geq 24$; $x_1 + 2x_2 \leq 30$; $-2x_1 + 10x_2 \geq 20$	(18,57; 5,71; 67,14)
7	$F = 9x_1 + 3x_2 \to max$	$11x_1 - 4x_2 \geq 20$; $9x_1 + 3x_2 \leq 80$; $-2x_1 + 6x_2 \geq 20$	(5,51; 10,14; 80)
8	$F = -2x_1 + x_2 \to min$	$3x_1 - 2x_2 \leq 12$; $-x_1 + 2x_2 \leq 8$; $2x_1 + 3x_2 \geq 6$; $x_1, x_2 \geq 0$	(10; 9; –11)

Контрольные вопросы и задания

1. Какая задача линейного программирования может быть решена графическим методом?
2. Что такое область допустимых решений задачи линейного программирования?
3. Что такое линия уровня целевой функции?
4. Что такое вектор-градиент целевой функции? Каковы его свойства?
5. Поясните принцип отыскания оптимального решения линейной задачи графическим методом.
6. Может ли задача линейного программирования не иметь решения? Поясните этот случай графически.
7. Может ли задача линейного программирования иметь бесконечное множество решений? Поясните на графическом примере.
8. Какие виды знака равенства существуют в MathCad? Поясните их отличия.
9. Как в MathCad задать переменную, имеющую более одного значения (изменяющуюся при каждом обращении к ней)? Для какой цели в работе используется такая переменная?
10. Как в MathCad получить результат вычислений по некоторой формуле?
11. Как в MathCad из относительного равенства выразить одну переменную через другую?
12. Поясните порядок ввода сложного выражения в MathCad.
13. Как решить систему уравнений с помощью MathCad?
14. Расскажите о принципах работы с графиком в MathCad:
- вставка графика;
- настройка графика;
- вывод графиков нескольких функций одновременно.

Работа 2. Решение задач линейного программирования в MS Excel с помощью надстройки *Поиск решения*

Основные теоретические сведения

Надстройка *Поиск решения* пакета MS Excel предназначена для выполнения сложных вычислений, которые трудно произвести вручную. Она позволяет находить значения в целевой ячейке, изменяя при этом до 200 переменных, удовлетворяющих заданным критериям. По желанию пользователя результаты поиска могут быть представлены в виде отчетов разных типов, которые можно поместить в рабочую книгу.

Перед тем как начать поиск решения, необходимо произвести формализацию задачи, т. е. составить ее экономико-математическую модель.

Исходные данные для запуска надстройки *Поиск решения* должны быть представлены в виде таблицы, которая содержит формулы, отражающие зависимости между данными таблицы.

Рассмотрим работу надстройки *Поиск решения* на примере.

Пример решения задачи

При продаже товаров *A* и *B* торговое предприятие использует четыре вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов на реализацию одной единицы товара и объемы ресурсов указаны в табл. 4. Доход от реализации единицы товара *A* составляет 2 усл. ед., товара *B* — 3 усл. ед. Определим оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию наибольшую прибыль.

Таблица 4. **Нормы затрат и объем ресурсов, усл. ед.**

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на реализацию одной единицы товара		Количество ресурсов на предприятии
	A	*B*	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Решение

1. Составим математическую модель задачи. Количество товара *A* обозначим x_1, *B* — x_2. Доход от реализации товара *A* составляет $2x_1$ усл. ед., товара *B* — $3x_2$ усл. ед., общий доход — соответственно

$$F = 2x_1 + 3x_2.$$

Поскольку торговому предприятию нужно получить наибольшую прибыль, то ставится задача максимизации целевой функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow max.$$

Ресурс 1-го вида ограничен 12 единицами, при этом его расходуется на реализацию товара A $2x_1$ единиц, а на реализацию товара B — $2x_2$ единиц. Поскольку количество израсходованного ресурса не должно превышать его запаса на предприятии, можно записать следующее ограничение:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12.$$

Аналогично записываются ограничения для других ресурсов:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$4x_1 \leq 16;$$

$$4x_2 \leq 12.$$

Так как количество реализованного товара не может быть величиной отрицательной, то добавим еще ограничения $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Таким образом, математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12; \\ x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ 4x_1 \leq 16; \\ 4x_2 \leq 12; \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Заполним ячейки Excel соответствующими значениями (рис. 7).

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	Значения переменных			
4	0	0		
5	Ограничения			
6	Коэффициенты		Левая часть	Правая часть
7	2	2	0	12
8	1	2	0	8
9	4	0	0	16
10	0	4	0	12
11	Коэффициенты целевой функции			
12	2	3		
13	Значение целевой функции			
14	0			

Рис. 7. **Экран Excel для решения задачи линейного программирования**

Ячейки $A4$:$B4$ отведены под значения переменных x_1 и x_2. Этим ячейкам присваиваются начальные значения (0; 0). После решения задачи Excel запишет в эти ячейки найденные оптимальные значения переменных x_1 и x_2. Поэтому эти ячейки называются изменяемыми.

Далее нужно подготовить данные для задания ограничений задачи. В ячейки диапазона $A7$:$B10$ внесем коэффициенты при неизвестных в ограничениях. Вычислим значение левой части первого ограничения при начальных значениях переменных. Для этого введем в ячейку $C7$ формулу

=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A7:B7).

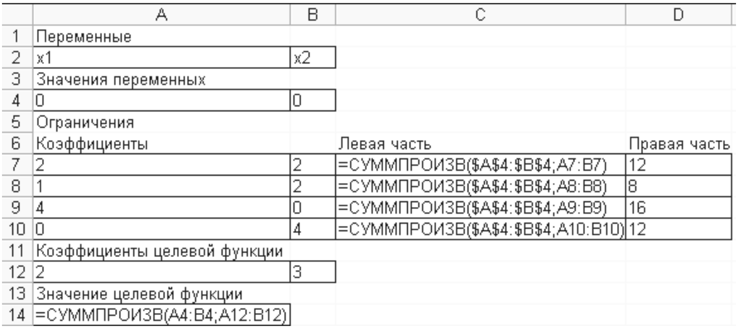
Ячейки $C8$:$C10$ заполняются формулами аналогично. Формулу ячейки $C7$ можно скопировать с помощью автозаполнения. Таким образом, ячейки $C7$:$C10$ содержат значения использованных ресурсов (левые части ограничений). В ячейки $D7$:$D10$ внесем количество ресурса, имеющегося в наличии (правые части ограничений).

Вычислим значение целевой функции при начальных значениях. В ячейку $A14$ запишем формулу вычисления общего дохода

=СУММПРОИЗВ(A4:B4;A12:B12).

Ячейка, содержащая формулу вычисления значения целевой функции модели, называется целевой.

Экран Excel в режиме представления формул показан на рис. 8.



	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	Значения переменных			
4	0	0		
5	Ограничения			
6	Коэффициенты		Левая часть	Правая часть
7	2	2	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A7:B7)	12
8	1	2	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A8:B8)	8
9	4	0	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A9:B9)	16
10	0	4	=СУММПРОИЗВ($A$4:$B$4;A10:B10)	12
11	Коэффициенты целевой функции			
12	2	3		
13	Значение целевой функции			
14	=СУММПРОИЗВ(A4:B4;A12:B12)			

Рис. 8. **Экран Excel в режиме представления формул**

3. Чтобы начать процесс поиска решения, выполним команду *Сервис* / *Поиск решения*. На экране появится окно *Поиск решения*.

Замечание. Если такого пункта в меню *Сервис* не имеется, следует загрузить соответствующую программу-надстройку. Для этого выполним команду *Сервис* / *Надстройки*. В открывшемся окне диалога установим флажок в строке *Поиск решения* (рис. 9).

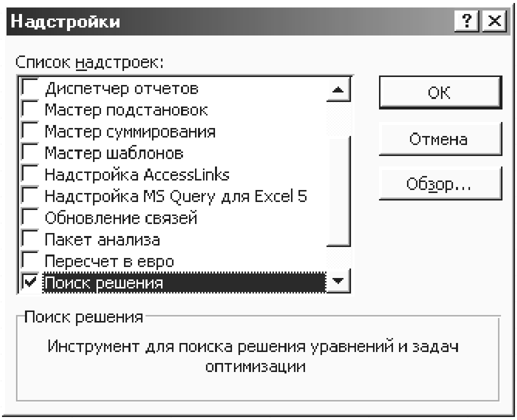


Рис. 9. **Окно *Надстройки***

4. Установим курсор в поле *Установить целевую ячейку* и укажем ячейку модели, значение которой должно быть изменено (максимизировано, минимизировано или приравнено к какому-либо определенному указанному значению). В нашей модели целевой будет ячейка, содержащая формулу расчета прибыли *A*14 (рис. 10).

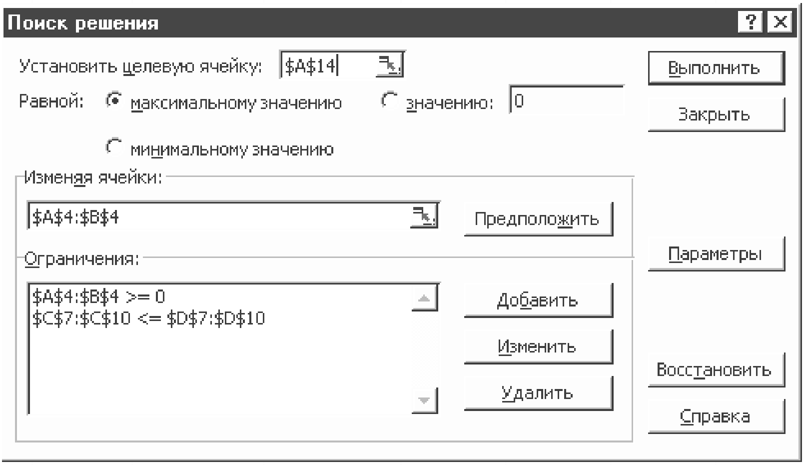


Рис. 10. **Окно *Поиск решения***

Целевая ячейка должна содержать формулу, которая прямо или косвенно ссылается на изменяемые ячейки.

5. С помощью переключателя *Равной*, который может находиться в трех положениях, зададим максимизацию, минимизацию или установку определенного значения целевой ячейки. В последнем случае необходимо указать число в поле *Значение*. В данном примере установим переключатель в положение *Максимальному значению*.

6. В поле *Изменяя ячейки* установим ссылки на ячейки, которые будут изменяться. Сделать это можно двумя способами: введя адреса или имена ячеек с клавиатуры либо указав ячейку (диапазон ячеек) на рабочем листе с помощью мыши.

При нажатии кнопки *Предположить* автоматически выделяются ячейки, на которые есть прямая или косвенная ссылка в формуле целевой ячейки.

Введем адрес диапазона *A*4:*B*4.

7. Следующий этап — определение ограничений. Для этого нажмем кнопку *Добавить*. На экране появится окно диалога *Добавление ограничения* (рис. 11).

В поле *Ссылка на ячейку* указывается адрес ячейки или диапазона ячеек, для которых должно действовать ограничение (левая часть ограничения). В списке операторов нужно выбрать оператор. В поле *Ограничение* указывается число или делается ссылка на какую-либо ячейку или диапазон (правая часть ограничения).

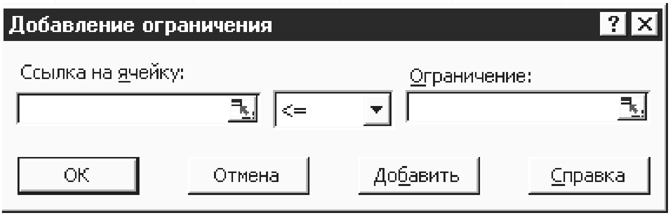


Рис. 11. **Окно *Добавление ограничения***

Ограничения можно задать как для изменяемых ячеек, так и для целевой ячейки, а также для других ячеек, прямо или косвенно присутствующих в модели.

Если в поле *Ограничение* указана ссылка на диапазон ячеек, размер этого диапазона должен совпадать с размером диапазона, указанного в поле *Ссылка на ячейку*.

Введем первое ограничение (требование неотрицательности переменных):

$$\$A\$4:\$B\$4>=0.$$

Нажмем кнопку *Добавить*, чтобы продолжить ввод ограничений. Так как все 4 ограничения имеют один и тот же знак (≤), то можно ввести их одной записью:

$C$7:$C$10<=$D$7:$D$10.

Далее нажмем кнопку *ОК*, чтобы завершить ввод ограничений и вернуться в окно *Поиск решения*. Заданные условия появятся в списке *Ограничения*.

С помощью кнопок *Добавить* и *Изменить* можно при необходимости откорректировать заданные ограничения.

Итак, целевая ячейка, изменяемые ячейки и ограничения для нашей модели заданы (см. рис. 10).

Далее мы можем изменить параметры поиска решения, заданные по умолчанию, а также сохранить созданную модель поиска решения, чтобы использовать ее в дальнейшем.

8. Нажмем кнопку *Параметры* в окне диалога *Поиск решения*. На экране появится окно *Параметры поиска решения* (рис. 12).

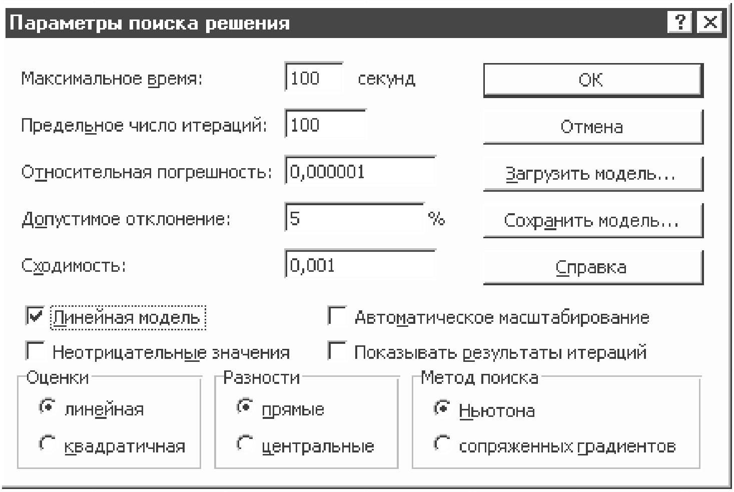


Рис. 12. **Окно *Параметры поиска решения***

Назовем следующие элементы этого окна:

- Поле *Максимальное время*, служащее для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи.
- Поле *Предельное число итераций*, ограничивающее число промежуточных вычислений.

- Поля *Относительная погрешность* и *Допустимое отклонение*, служащие для задания точности, с которой ищется решение. Рекомендуется найти решение с величинами данных параметров, заданными по умолчанию, а затем повторить вычисления с меньшей погрешностью и допустимым отклонением.
- Флажок *Линейная модель* должен быть установлен в случае линейной задачи, а в случае нелинейной — сброшен.
- Флажок *Показывать результаты итераций* служит для приостановки поиска решения и просмотра результатов промежуточных вычислений.
- Флажок *Автоматическое масштабирование* служит для включения автоматической нормализации входных и выходных значений, качественно различающихся по величине (например при максимизации прибыли в процентах по отношению к вложениям, исчисляемым в миллионах рублей).

Установленные параметры и ограничения поиска решения можно сохранить в качестве модели. Для этого служит кнопка *Сохранить модель* в окне *Параметры поиска решения*.

В данном примере следует установить флажок в строке *Линейная модель* и вернуться в окно *Поиск решения*, нажав кнопку *ОК*.

После того, как все параметры и ограничения будут заданы, нужно только инициировать поиск.

9. Нажмем кнопку *Выполнить* в окне диалога *Поиск решения*. По мере того, как идет поиск, отдельные его шаги будут отображаться в строке состояния. Когда поиск закончится, в таблицу будут внесены новые значения, и на экране появится окно, сообщающее о завершении операции (рис. 13).

Поскольку полученные значения нас устраивают, установим безымянный переключатель в положение *Сохранить найденное решение*, тогда таблица будет обновлена. Отменить результаты поиска можно, установив переключатель в положение *Восстановить исходные значения*.

В случае, если поиск закончился удачно, можно указать, какие отчеты следует вставить в рабочую книгу. Для этого в списке *Тип отчета* выделяется название нужного типа отчета (или несколько названий с помощью клавиши Ctrl). Оно будет вставлено на отдельном листе в рабочую книгу перед листом с исходными данными.

Когда решение найти невозможно, Exce1 выводит соответствующее сообщение в окне диалога *Результаты поиска решения*. В этом случае возможность создать отчет отсутствует, так как список *Тип отчета* становится недоступным.

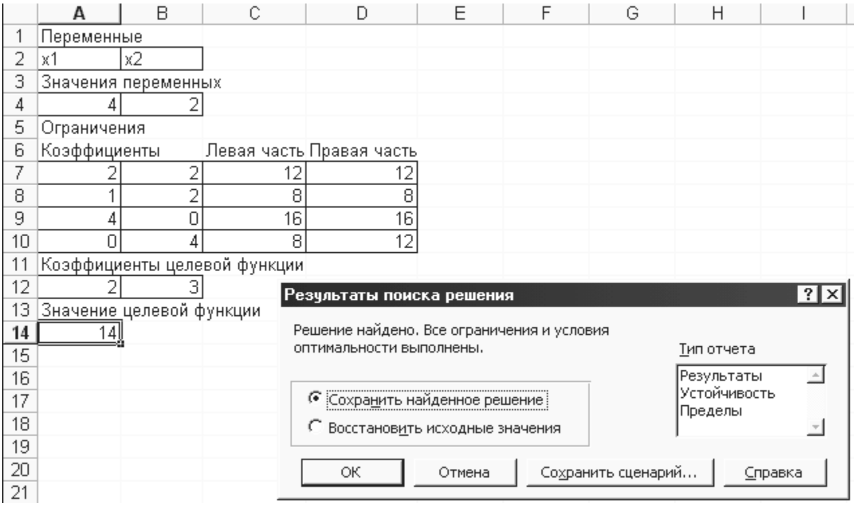


Рис. 13. **Результаты решения**

Если планируется использовать созданную модель в дальнейшем, найденное решение можно сохранить как сценарий, нажав кнопку *Сохранить сценарий* в окне диалога *Результаты поиска решения*.

Итак, нами получено следующее решение задачи: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $F_{max} = 14$. Таким образом, следует реализовывать по 4 единицы товара *A* и 2 — товара *B*. При этом общая прибыль будет наибольшей и составит 14 усл. ед. Левые части ограничений представляют собой количество ресурсов, которые будут израсходованы при данном плане реализации товаров, а правые части — количество имеющихся в наличии ресурсов. Поэтому можно сделать вывод о том, какие ресурсы будут израсходованы полностью (левая часть равна правой), а каких ресурсов имеется остаток. Очевидно, что в данной задаче имеется остаток только 4-го ресурса, составляющий 12 – 8 = 4 усл. ед.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Цех выпускает изделия двух видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 ч, одной втулки — 2 ч. От реализации вала предприятие получает прибыль 80 к., а от реализации втулки — 60 к. Цех должен произвести не менее 100 шт. валов и не менее

200 шт. втулок. Определите, сколько валов и втулок должен выпустить цех, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если фонд рабочего времени производственных рабочих составляет 900 чел.-ч.

Ответ: (100, 300).

Вариант 2

Предприятие выпускает 3 вида изделий. Месячная программа производства составляет 2000 изделий 1-го вида, 1800 изделий 2-го вида и 1500 изделий 3-го вида. Для выпуска изделий используются материалы, месячный расход которых не может превысить 61000 кг. В расчете на одно изделие 1-го вида расходуется 8 кг материала, 2-го вида — 10, 3-го вида — 11 кг. Оптовая цена одного изделия 1-го вида — 7 р., 2-го и 3-го — соответственно 10 и 9 р. Определите оптимальный план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимум выручки.

Ответ: (2000, 2850, 1500).

Вариант 3

Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используются два сорта кожи. Затраты труда и материалов для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации одной единицы продукции указаны в табл. 5. Составьте план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Таблица 5. **Информация о нормах затрат и запасах ресурсов**

Ресурсы	Запас ресурса	Норма затрат ресурсов на производство 1 пары обуви по моделям			
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2	2	12
Кожа 1 сорта, дм^2	500	2	1	0	20
Кожа 2 сорта, дм^2	1200	0	1	4	10
Прибыль, усл. ед.	—	2	40	10	15

Ответ: (0, 500, 0, 0).

Вариант 4

В суточный рацион включаются два продукта питания: $П_1$ и $П_2$ (табл. 6), причем продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 единиц. Стоимость одной единицы продукта $П_1$ составляет 0,2 к., продукта $П_2$ — 0,4 к. Определите оптимальный рацион, стоимость которого будет наименьшей.

Таблица 6. **Данные о содержании питательных веществ в продуктах и о нормах потребления**

Питательные вещества	Минимальная норма потребления, единиц	Содержание питательного вещества в одной единице продукта, усл. ед.	
		$П_1$	$П_2$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

Ответ: (200, 400).

Вариант 5

Обработка деталей *A* и *B* может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль при реализации детали *A* составляет 10 р., детали *B* — 16 р. Исходные данные для решения задачи представлены в табл. 7.

Таблица 7. **Сведения о нормах времени на обработку детали и о времени работы на станке, ч**

Станки	Норма времени на обработку детали		Время работы станка
	A	*B*	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Определите производственную программу, обеспечивающую максимальную прибыль при условии, что деталей *A* нужно произвести не менее 300 единиц, а деталей *B* — не более 200 единиц.

Ответ: (400, 200).

Вариант 6

Торговое предприятие для продажи товаров трех видов использует следующие ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида указаны в табл. 8. Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров 1-го вида, составляет 5 усл. ед.; 2-го — 8; 3-го — 6 усл. ед. Определите оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Таблица 8. **Информация о затратах ресурсов на продажу 1 партии товаров**

Ресурсы	Вид товара			Объем ресурсов
	№ 1	№ 2	№ 3	
Время, чел.-ч	0,5	0,7	0,6	370
Площадь, $м^2$	0,1	0,3	0,2	90

Ответ: (600, 100, 0).

Вариант 7

Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск составляет 90 единиц 1-го изделия, 70 — 2-го и 60 единиц 3-го изделия. Суточные ресурсы включают 780 единиц производственного оборудования (станки, машины), 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в табл. 9. Стоимость 1-го изделия — 8 усл. ед.; 2-го — 7; 3-го изделия — 6 усл. ед. Укажите, сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной.

Таблица 9. **Информация о расходе ресурсов на каждое изделие, единиц**

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	№ 1	№ 2	№ 3
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Ответ: (112,5; 70; 86,25).

Вариант 8

Для производства столов и стульев имеются ресурсы трех видов: доски 1-го типа (500 м), 2-го (290 м), трудовые ресурсы (440 чел.-ч). От реализации одного стола организация получает прибыль в размере 12 р., стула — 5 р. Затраты ресурсов на одну единицу изделия указаны в табл. 10.

Таблица 10. **Данные о расходе ресурсов на производство одной единицы изделия**

Ресурсы	Стол	Стул
Доски 1-го типа, погонных м	5	1
Доски 2-го типа, погонных м	2	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2

Составьте план выпуска продукции при максимизации прибыли.

Ответ: (80,100).

Контрольные вопросы и задания

1. Что значит формализовать экономическую задачу? Каковы основные компоненты математической модели задачи линейного программирования?

2. В чем назначение надстройки *Поиск решения*?

3. Какие ячейки в Excel называются изменяемыми? Как они связаны с другими ячейками? Какие есть способы задания изменяемых ячеек для средства *Поиск решения*?

4. Что такое целевая ячейка? Как задается задача ее оптимизации?

5. Какие виды ограничений можно задать в окне *Поиск решения*? Поясните технологию ввода ограничений.

6. Перечислите основные параметры надстройки *Поиск решения*, укажите их назначение. Какой параметр необходимо устанавливать для решения задачи линейного программирования?

Работа 3. Оптимальное распределение ресурсов. Анализ отчетов

Основные теоретические сведения

Рассмотрим задачу планирования производства продукции при ограничениях на ресурсы.

Постановка задачи. Для производства продукции n типов требуются ресурсы m видов. Нормы расхода ресурсов на производство одной единицы продукции каждого типа заданы матрицей $\{a_{ij}\}$, где a_{ij} — количество ресурса i-го вида, необходимое для производства одной единицы продукции j-го типа. Известно количество ресурсов (b_i, где $i = 1, ..., m$) каждого вида, которое имеется в наличии у предприятия. Известны также величины прибыли (C_j), которую получит предприятие при реализации одной единицы продукции j-го типа. Требуется найти оптимальный план производства продукции, т. е. количество продукции каждого типа, которое нужно произвести, чтобы получить наибольшую прибыль. Условие задачи можно представить в виде табл. 11.

Таблица 11. **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	Продукция				Наличие ресурсов
	Тип 1	Тип 2	…	Тип n	
Ресурс 1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
Ресурс 2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
Ресурс m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибыль	C_1	C_2	…	C_n	—

Обозначим через x_j количество продукции j-го типа, которое планируется выпустить ($j = 1, ..., n$). Тогда математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max; \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \tag{13}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., n). \tag{14}$$

Целевая функция задачи (12) представляет собой общую прибыль от производства всей продукции. Ограничения (13) выражают условие, при котором потребление ресурса i-го вида не должно превышать запаса этого ресурса (b_i). Условия неотрицательности переменных (14) вытекают из смысла переменной x_j: количество продукции не может быть отрицательным.

Канонической называется следующая форма записи ЗЛП:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, ..., m);$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., n); \quad b_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., m).$$

Чтобы привести к виду равенства ограничение вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,$$

в левую часть неравенства прибавляют дополнительную переменную:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i .$$

Аналогично, чтобы привести к каноническому виду ограничение вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i ,$$

из левой части неравенства вычитают дополнительную переменную:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i = b_i .$$

Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с коэффициентами, равными 0:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot y_i .$$

Таким образом, задача (12)–(14) может быть записана в следующем каноническом виде:

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max; \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \quad (i = 1, \ldots, m); \tag{16}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n); \tag{17}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{18}$$

Экономический смысл переменных y_i (i = 1, …, m) следующий: это остатки ресурсов каждого вида. Если при оптимальном решении какой-либо ресурс будет использован полностью, то ограничение исходной задачи (13) будет выполнено в виде равенства, а $y_i = 0$. Такое ограничение в отчетах Excel называется связанным.

Двойственность в линейном программировании. С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной. Первоначальная задача при этом называется исходной, или прямой. Связь этих задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Рассмотрим двойственную задачу, связанную с рассматриваемой нами задачей планирования производства продукции (табл. 12).

Таблица 12. **Двойственная задача**

Исходная задача		Двойственная задача	
$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to max$	(12)	$F_Д = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$	(19)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m)$	(13)	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \ge C_j \quad (j = 1, \ldots, n)$	(20)
$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$	(14)	$z_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$	(21)

Эта задача составляется по следующим правилам:

- Поскольку исходная задача составляется на максимум, то двойственная — на минимум целевой функции.
- В исходной задаче ограничения имеют знаки неравенств “≤”, а в двойственной — “≥”.
- Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи, а каждой переменной исходной задачи — ограничение двойственной задачи.
- Матрица системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей системы ограничений исходной задачи.
- Правые части ограничений в двойственной задаче равны коэффициентам при переменных в целевой функции исходной задачи.
- Коэффициенты при переменных в целевой функции двойственной задачи равны правым частям ограничений исходной задачи.
- В двойственной задаче, как и в исходной, накладываются ограничения на неотрицательность переменных.

Экономический смысл двойственной задачи. Допустим, что у предприятия есть возможность реализации всех ресурсов некоторой организации вместо того, чтобы организовывать свое производство. Необходимо установить прикидочные цены на ресурсы. Обозначим эти цены как $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Они должны быть установлены исходя из несовпадающих интересов предприятия и покупающей организации.

Общую стоимость ресурсов покупающая организация стремится уменьшить, т. е.

$$F_Д = \overbrace{b_1 \cdot z_1}^{\text{Стоимость ресурса 1}} + b_2 \cdot z_2 + \ldots + b_m \cdot z_m \rightarrow min.$$

Количество ресурса 1

Цена ресурса 1

Предприятие согласно продать ресурсы только по таким ценам, при которых оно получит за них выручку, не меньшую той, которую могло бы получить, организовав собственное производство. Таким образом, предприятие откажется от выпуска изделий 1-го типа, если

$$\underbrace{a_{11} \cdot z_1 + a_{21} \cdot z_2 + \ldots + a_{m1} \cdot z_m}_{\text{Стоимость всех ресурсов, которые идут на производство одного изделия 1-го типа}} \geq C_1.$$

Прибыль на одно изделие 1-го типа

Аналогично получаем ограничения для всех остальных типов изделий. По смыслу цена неотрицательна, поэтому накладываются ограничения (21).

В отчетах Excel, получаемых с помощью надстройки *Поиск решения*, оптимальное значение двойственной переменной z_i^* называется теневой ценой, или множителем Лагранжа. Отметим, что теневая цена не есть некоторая реальная цена на рынке. Это лишь оценка значимости ресурса, вытекающая из конкретных условий задачи.

1-я теорема двойственности. Если существует единственное решение исходной задачи, то существует и единственное решение двойственной задачи, причем значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$$max\ F = min\ F_Д.$$

Эту теорему можно интерпретировать так: предприятию безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану X^* и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам Z^* и получить такую же сумму. Для всех других (неоптимальных) планов X и Z прибыль от выпуска продукции всегда меньше внутренней стоимости затраченных ресурсов. Таким образом, $F < F_Д$, а величина $F_Д - F$ характеризует производственные потери.

Следствие (*теорема об оценках*). Двойственная оценка z_i^* (теневая цена) показывает, как изменится целевая функция исходной задачи при изменении ресурса b_i на одну единицу:

$$\Delta F = \Delta b_i z_i^*.$$

Таким образом, по теневым ценам можно судить о том, насколько целесообразно изыскивать резервы для увеличения количества i-го ресурса: если соответствующая теневая цена равна нулю, то увеличение количества этого ресурса никак не повлияет на рост прибыли. С другой стороны, чем больше теневая цена ресурса, тем больше увеличится прибыль при увеличении количества этого ресурса на одну единицу. Поэтому тот ресурс, который имеет большую теневую цену, считается более дефицитным.

Однако эта теорема справедлива только тогда, когда при изменении количества ресурса b_i значения переменных z_i^* в оптимальном плане двойственной задачи остаются неизменными. В отчете Excel по устойчивости можно получить границы изменения b_i (Δb^- и Δb^+), в пределах которых теневая цена есть коэффициент увеличения (уменьшения) целевой функции исходной задачи при изменении доступного количества ресурсов.

Понятие нормированной стоимости. Ограничения двойственной задачи так же, как и исходной, можно привести к виду равенства:

$$F_Д = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i - v_j = C_j \quad (j = 1, ..., n);$$

$$z_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., m);$$

$$v_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., n).$$

Экономический смысл дополнительных двойственных переменных v_j следующий: это производственные потери на одну единицу изделия j-го типа. В самом деле, рассмотрим j-е ограничение двойственной задачи:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i}_{\substack{\text{Внутренняя стоимость всех ресурсов,} \\ \text{которые идут на производство} \\ \text{1 единицы продукции } j\text{-го типа}}} \ge \underbrace{C_j}_{\substack{\text{Прибыль} \\ \text{на 1 единицу продук-} \\ \text{ции } j\text{-го типа}}} .$$

Если это ограничение выполняется в виде равенства, то оценка затраченных ресурсов равна прибыли и потерь нет. В этом случае $v_j = 0$.

Если же это ограничение выполняется в виде строгого неравенства, то затраты на производство одной единицы продукции j-го типа больше прибыли, и следовательно производить этот вид продукции невыгодно. Разница между стоимостью ресурсов и прибылью представляет собой производственные потери:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i - C_j .$$

В отчетах Excel оптимальное значение дополнительной двойственной переменной v_j^* называется нормированной, или редуцированной, стоимостью.

2-я теорема двойственности (*теорема о дополняющей нежесткости*). Оптимальные решения исходной и двойственной задач связаны соотношениями

$$z_i^* \cdot y_i^* = 0;$$

$$v_j^* \cdot x_j^* = 0.$$

Эта теорема означает, что между переменными исходной и двойственной задач существует следующая взаимосвязь:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_m \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, & z_1, & z_2, & \ldots, & z_m. \end{array}$$

Рассмотрим связь y_i^* (остаток ресурса i-го вида) и z_i^*(теневую цену ресурса i-го вида).

Если $y_i^* = 0$, то i-й ресурс использован полностью. Следовательно, он ограничивает дальнейшее увеличение целевой функции, является дефицитным. При увеличении количества этого ресурса может быть произведено больше продукции, следовательно, возрастет прибыль. Соответствующая теневая цена $z_i^* > 0$.

Если же $y_i^* > 0$, то имеется остаток ресурса i-го вида, т. е. ресурс не дефицитен. Увеличение количества этого ресурса не вызовет увеличение прибыли. Соответствующая теневая цена $z_i^* = 0$.

Рассмотрим связь x_j^* (оптимальный объем производства изделий j-го типа) и v_j^* (производственные потери на одну единицу изделия j-го типа).

Если $x_j^* > 0$, т. е. j-е изделие вошло в оптимальный план производства, то соответствующие потери для этого изделия составляют $0 : v_j^* = 0$.

Если же $x_j^* = 0$, т. е. изделие не вошло в оптимальный план производства, то это произошло потому, что данный вид продукции убыточен, т. е. соответствующие потери $v_j^* > 0$.

Свойство нормированной стоимости. Нормированная стоимость v_j^* показывает, насколько уменьшится целевая функция при принудительном выпуске одной единицы продукции j-го типа.

Пусть, например, продукция k-го вида не вошла в оптимальный план производства, т. е. $x_k^* = 0$. Однако существует некоторое плановое задание, предписывающее выпуск этого вида продукции в количестве T_k единиц. Тогда при производстве этого невыгодного вида продукции на него будут оттянуты ресурсы, и выгодной продукции будет выпущено меньше. Целевая функция (общая прибыль) уменьшится, причем это уменьшение можно количественно измерить:

$$\Delta F = T_k \cdot v_k^*. \tag{22}$$

Следует отметить, что равенство (22) справедливо только в том случае, когда плановое задание T_k не нарушает номенклатуру остальных выпускаемых изделий, т. е., кроме “принудительно производимого” k-го изделия, ассортимент остальных выпускаемых “выгодных” изделий не изменится, а изменится только их количество. Определить предельную величину T_k, при которой равенство (22) справедливо, можно экспериментально.

Анализ устойчивости оптимального решения. Основные исходные данные рассматриваемой задачи — это запасы ресурсов (b_i, где i = 1,

..., m) и величина прибыли на одну единицу выпускаемой продукции (C_j, где $j = 1, ..., n$). Исследовать устойчивость — значит определить пределы изменения исходных данных, при которых не изменяется решение или же его структура. Отчет Excel по устойчивости дает допустимое увеличение и допустимое уменьшение по целевому коэффициенту C_j, при которых решение задачи остается прежним. Кроме того, в отчете по устойчивости приведены пределы увеличения и уменьшения правых частей ограничений b_i, при которых прежней остается структура решения. Под неизменностью структуры решения понимается следующее: те ресурсы, которые были дефицитными в исходном решении, остаются дефицитными и в новом оптимальном решении, хотя само решение (количество выпускаемых изделий) и значение целевой функции могут изменяться.

Пример решения задачи

Для производства продукции 4 типов (*Прод*1, *Прод*2, *Прод*3 и *Прод*4) требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Нормы расхода ресурсов и другие исходные данные приведены в табл. 13.

Таблица 13. **Исходные данные к задаче планирования производства продукции**

Ресурсы	*Прод*1	*Прод*2	*Прод*3	*Прод*4	Наличие ресурса
Трудовые, чел.-ч	1	1	1	1	16
Сырье, кг	6	5	4	3	110
Финансы, тыс. р.	4	6	10	13	100
Прибыль, денежных единиц	60	70	120	130	—

Найдем оптимальный план производства продукции, а также ответим на следующие вопросы:

1. Какие типы продукции вошли в оптимальный план производства? Какова максимальная прибыль?
2. Какие ресурсы при этом израсходованы полностью, а какие — нет? Какой ресурс является наиболее дефицитным?
3. Как увеличится общая прибыль, если количество наиболее дефицитного ресурса увеличится на 1, а также 3 и 5 единиц?

4. Каковы пределы изменения исходных данных, при которых структура решения не изменяется?

5. Какая продукция является выгодной, а какая — нет? Какая продукция является наиболее невыгодной? Как изменится общая прибыль, если придется выпускать 1 или 3 единицы этой продукции?

Решение

Составим математическую модель задачи. Введем нижеуказанное обозначение: x_j — количество выпускаемой продукции j-го типа (j = = 1, ..., 4).

Тогда по формулам (12)–(14) получаем следующее:

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100; \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, 4). \end{cases} \tag{23}$$

Целевая функция представляет собой общую прибыль от производства продукции. Ограничения отражают конечность запасов ресурсов на предприятии. Неотрицательность переменных следует из их смысла.

Приведем исходную задачу к каноническому виду:

$$F = 60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 = 16; \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + y_2 = 110; \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 + y_3 = 100; \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, 4); \quad y_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, 3). \end{cases}$$

Дополнительные переменные (y_i) есть остатки ресурсов каждого вида.

Составим двойственную задачу к математической модели (23) с использованием формул (19)–(21):

$$F_Д = 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \to min;$$

$$\begin{cases} z_1 + 6z_2 + 4z_3 \ge 60; \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 \ge 70; \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 \ge 120; \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 \ge 130; \\ z_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, 3). \end{cases}$$

Двойственные переменные z_i — это оценки ресурсов задачи (теневые цены). В двойственной задаче приведем ограничения к виду равенства, вычитая из левых частей ограничений дополнительные переменные (v_j):

$$F_Д = 16z_1 + 110z_2 + 100z_3 \to min;$$

$$\begin{cases} z_1 + 6z_2 + 4z_3 - v_1 = 60; \\ z_1 + 5z_2 + 6z_3 - v_2 = 70; \\ z_1 + 4z_2 + 10z_3 - v_3 = 120; \\ z_1 + 3z_2 + 13z_3 - v_4 = 130; \\ z_i \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, 3); \quad v_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, 4). \end{cases}$$

Дополнительные двойственные переменные (v_j) есть производственные потери на одну единицу продукции j-го типа.

Для решения задачи в Excel с помощью надстройки *Поиск решения* сформируем экран так, как показано на рис. 14.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Переменные						
2	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4			
3	0	0	0	0			
4	Ограничения						
5	Коэффициенты в ограничениях					левая часть	правая часть
6	1	1	1	1		=СУММПРОИЗВ(A$3:D$3;A6:D6)	16
7	6	5	4	3		=СУММПРОИЗВ(A$3:D$3;A7:D7)	110
8	4	6	10	13		=СУММПРОИЗВ(A$3:D$3;A8:D8)	100
9	Прибыль					Цель	
10	60	70	120	130		=СУММПРОИЗВ(A3:D3;A10:D10)	

Рис. 14. **Экран Excel для решения задачи планирования производства продукции**

Вызовем надстройку *Поиск решения* и заполним окно поиска так, как показано на рис. 15. Необходимо также установить флажок *Линейная модель*, нажав кнопку *Параметры*.

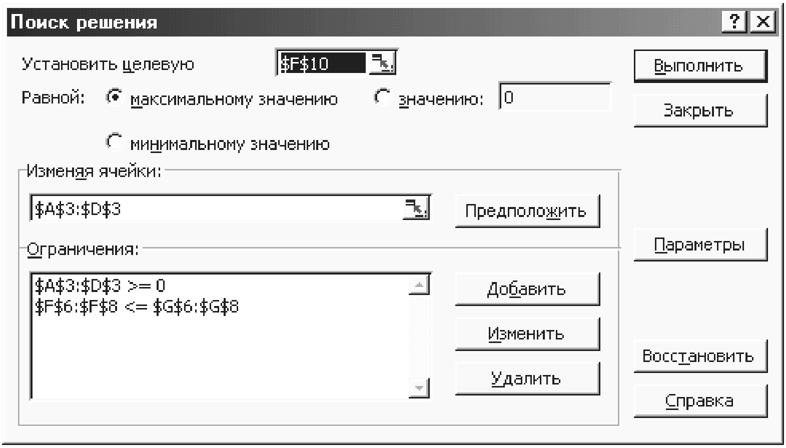


Рис. 15. **Окно *Поиск решения* для решения задачи планирования производства продукции**

Затем активизируем процесс поиска и после его окончания в окне *Результаты поиска решения* выделим все три типа отчетов, используя клавишу Ctrl на клавиатуре (рис. 16).

Рис. 16. **Окно завершения поиска**

Нажатие кнопки *OK* приведет к созданию новых листов рабочей книги: “Отчет по результатам”, “Отчет по устойчивости” и “Отчет по пределам”. Результаты решения на исходном рабочем листе будут сохранены. Содержимое всех отчетов показано на рисунках 17–19.

Отчет по результатам состоит из трех таблиц.

В 1-й таблице приводятся сведения о значениях целевой функции.

Во 2-й таблице представлены исходные и оптимальные значения переменных.

3-я таблица показывает результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий. В графе *Формула* приведены зависимости, которые были введены в диалоговое окно *Поиск решения*. В графе *Значение* приведены величины использованного ресурса, а в графе *Разница* показано количество неиспользованного ресурса (оптимальные значения дополнительных двойственных переменных y_i, где $i = 1, ..., m$). Если ресурс используется полностью, то в графе *Статус* делается пометка “Связанное”, в противном случае — “Не связанное”. Для граничных условий вместо величины неиспользованного ресурса показана разность между оптимальным значением переменной и заданной для нее границей (рис. 17).

Microsoft Excel 8.0a Отчет по результатам
Рабочий лист: [Пример2.xls]Лист1
Отчет создан: 05.06.02 17:17:25

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$F$5	Цель	0	1320

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$A$3	Прод1	0,00	10,00
$B$3	Прод2	0,00	0,00
$C$3	Прод3	0,00	6,00
$D$3	Прод4	0,00	0,00

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
$F$8	Левая часть	16	$F$8<=$G$8	связанное	0
$F$9	Левая часть	84	$F$9<=$G$9	не связан.	26
$F$10	Левая часть	100	$F$10<=$G$10	связанное	0
$A$3	Прод1	10,00	$A$3>=0	не связан.	10,00
$B$3	Прод2	0,00	$B$3>=0	связанное	0,00
$C$3	Прод3	6,00	$C$3>=0	не связан.	6,00
$D$3	Прод4	0,00	$D$3>=0	связанное	0,00

Рис. 17. **Отчет по результатам**

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц.

В 1-й таблице приводится информация по переменным:

- оптимальные значения переменных x_j^* ($j = 1, \ldots, n$);
- соответствующие значения нормированной стоимости, т. е. оптимальные значения дополнительных двойственных переменных v_j^* ($j = 1, \ldots, n$);
- коэффициенты в целевой функции при переменных, заданные в условии;
- предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых решение задачи не изменяется.

Во 2-й таблице показаны аналогичные значения для ограничений:

- величины использованных ресурсов;
- теневые цены для каждого ресурса, т. е. оптимальные значения двойственных переменных z_i^* ($i = 1, \ldots, m$);
- предельные приращения ресурсов (Δb_1^+ и Δb_1^-), при которых сохраняется структура решения (рис. 18).

Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости

Рабочий лист: [Пример2.xls]Лист1

Отчет создан: 05.06.02 17:23:33

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$A$3	Прод1	10,00	0,00	60	40	12
$B$3	Прод2	0,00	-10,00	70	10	1E+30
$C$3	Прод3	6,00	0,00	120	30	13,33333333
$D$3	Прод4	0,00	-20,00	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. Значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$8	Левая часть	16	20	16	3,545454545	6
$F$9	Левая часть	84	0	110	1E+30	26
$F$10	Левая часть	100	10	100	60	36

Рис. 18. **Отчет по устойчивости**

Отчет по пределам показывает, как может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры этого решения. В отчете по пределам показаны значения целевой функции на нижнем и верхнем пределах для продукции, которая вошла в оптимальное решение (рис. 19).

Microsoft Excel 8.0a Отчет по пределам
Рабочий лист: [Пример 2.xls]Лист1
Отчет создан: 05.06.02 17:24:15

	Целевое	
Ячейка	**Имя**	**Значение**
$F$5	Цель	1320

	Изменяемое		Нижний	Целевое	Верхний	Целевое
Ячейка	**Имя**	**Значение**	**предел**	**результат**	**предел**	**Результат**
$A$3	Прод1	10,00	0,00	720,00	10,00	1320,00
$B$3	Прод2	0,00	0,00	1320,00	0,00	1320,00
$C$3	Прод3	6,00	0,00	600,00	6,00	1320,00
$D$3	Прод4	0,00	0,00	1320,00	0,00	1320,00

Рис. 19. **Отчет по пределам**

Анализ отчетов и окна с результатами решения дает возможность ответить на поставленные вопросы следующим образом:

1. $x_1^* = 10$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 6$; $x_4^* = 0$. Эти значения появились в ячейках A3:D3 после окончания поиска. Также их можно увидеть во 2-м блоке отчета по результатам. Таким образом, следует производить продукцию 1-го типа в количестве 10 единиц и продукцию 3-го типа в количестве 6 единиц. Продукцию 2-го и 4-го типов производить не нужно.

При таком плане производства будет получена максимальная прибыль $F^* = 1320$.

2. $y_1^* = 0$; $y_2^* = 26$; $y_3^* = 0$. Таким образом, полностью израсходованы трудовые ресурсы и финансы. Соответствующие ограничения имеют статус связанных. Сырья имеется остаток в количестве 26 единиц. К такому же выводу можно прийти, анализируя значения левой и правой частей ограничений на исходном листе. Из отчета по устойчивости можно получить следующие значения теневой цены:

$$z_1^* = 20;\ z_2^* = 0;\ z_3^* = 10.$$

Сопоставляя значения y_i и z_i, убеждаемся в справедливости 2-й теоремы двойственности: поскольку сырье имеется в избытке, его двойственная оценка равна 0. Теневые цены дефицитных трудовых ресурсов и финансов положительны. Причем, очевидно, трудовые ресурсы являются в этой задаче наиболее дефицитными, поскольку их теневая цена наибольшая.

3. Если количество трудовых ресурсов увеличить на 1, то общая прибыль возрастет на $z_1^* = 20$ единиц. Увеличение трудовых ресурсов на 3 единицы дает увеличение прибыли на $\Delta F = 3 \cdot z_1^* = 3 \cdot 20 = 60$ единиц, если структура решения при этом не изменится. Из отчета по устойчивости допустимое увеличение количества трудовых ресурсов (Δb_1^+) составляет 3,55, допустимое уменьшение (Δb_1^-) — 6. Это означает, что структура решения не изменяется, если $16 - 6 \le b_1 \le 16 + 3{,}55$, т. е. $10 \le b_1 \le 19{,}55$.

Поэтому, если количество трудовых ресурсов возрастет на 5 единиц, теорема об оценках перестанет действовать и мы не сможем количественно измерить увеличение прибыли.

4. Аналогично из отчета по устойчивости мы можем получить пределы изменения других исходных данных, при которых не изменяется структура решения:

$$16 - 6 \le b_1 \le 16 + 3{,}55 \;\Rightarrow\; 10 \le b_1 \le 19{,}55;$$

$$110 - 26 \le b_2 \;\Rightarrow\; 84 \le b_2;$$

$$100 - 36 \le b_3 \le 100 + 60 \;\Rightarrow\; 64 \le b_3 \le 160;$$

$$60 - 12 \le C_1 \le 60 + 40 \;\Rightarrow\; 48 \le C_1 \le 100;$$

$$C_2 \le 70 + 10 \;\Rightarrow\; C_2 \le 80;$$

$$120 - 13{,}3 \le C_3 \le 120 + 30 \;\Rightarrow\; 106{,}7 \le C_3 \le 150;$$

$$C_4 \le 130 + 20 \;\Rightarrow\; C_4 \le 150.$$

5. Из отчета по устойчивости можно получить значения дополнительных двойственных переменных (нормированная стоимость):

$$v_1^* = 0;\; v_2^* = 10;\; v_3^* = 0;\; v_4^* = 20.$$

Выгодной является та продукция, которая вошла в план производства ($x_j^* > 0$). Это *Прод*1 и *Прод*3. Для нее производственные потери равны $v_j^* = 0$. Невыгодной является продукция *Прод*2 и *Прод*4. Соответствующая нормирующая стоимость положительна. Таким образом, и для переменных x_j^* и v_j^* выполняется 2-я теорема двойственности. Наиболее невыгодной при этом является продукция 4-го типа, поскольку v_4^* наибольшая. При выпуске одной единицы этой продукции общая прибыль уменьшается на 20 единиц. При выпуске 3 единиц этой продукции уменьшение прибыли составит $\Delta F = 3 \cdot v_4^* = 3 \cdot 20 = 60$ денежных единиц. Однако опытным путем можно установить, что при выпуске уже 4 единиц этой продукции структура оптимального плана нарушается, и прямая пропорциональная зависимость перестает действовать.

Задания для самостоятельной работы

Решите задачу планирования производства продукции на основании данных табл. 14.

Таблица 14. **Исходная информация для решения задачи планирования производства продукции**

Ресурс	*П*1	*П*2	*П*3	*П*4	Наличие
Вариант 1					
Прибыль, усл. ед.	60	60	40	60	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	1	3	2	20
Сырье, кг	7	2	4	8	50
Финансы, тыс. р.	5	2	4	6	100
Вариант 2					
Прибыль, усл. ед.	50	60	40	40	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	2	3	1	20
Сырье, кг	7	3	4	8	50
Финансы, тыс. р.	4	3	55	1	100
Вариант 3					
Прибыль, усл. ед.	50	40	30	70	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	4	3	2	30
Сырье, кг	7	5	4	8	50
Финансы, тыс. р.	4	3	3	1	100
Вариант 4					
Прибыль, усл. ед.	50	30	50	20	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	2	1	2	30
Сырье, кг	8	5	8	5	550
Финансы, тыс. р.	4	2	3	3	100
Вариант 5					
Прибыль, усл. ед.	50	50	50	50	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	2	1	7	30
Сырье, кг	8	4	8	5	50
Финансы, тыс. р.	4	2	5	1	100

Окончание табл. 14

Ресурс	*П*1	*П*2	*П*3	*П*4	Наличие
Вариант 6					
Прибыль, усл. ед.	10	30	20	40	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	5	2	1	1	15
Сырье, кг	1	4	8	5	35
Финансы, тыс. р.	4	2	5	8	100
Вариант 7					
Прибыль, усл. ед.	5	10	30	20	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	1	1	2	2	15
Сырье, кг	7	2	4	3	25
Финансы, тыс. р.	5	4	2	1	100
Вариант 8					
Прибыль, усл. ед.	50	40	30	20	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	5	1	2	2	20
Сырье, кг	7	2	1	4	30
Финансы, тыс. р.	5	3	1	6	100

Контрольные вопросы и задания

1. Каковы исходные данные задачи планирования производства продукции при ограничениях на ресурсы? Что требуется найти?
2. Приведите математическую модель задачи планирования производства продукции и поясните экономический смысл каждого выражения.
3. Что такое каноническая форма записи ЗЛП? Как можно привести линейную задачу к каноническому виду?
4. Приведите математическую модель задачи планирования производства продукции к каноническому виду и поясните экономический смысл дополнительных переменных.
5. Поясните, как составляется двойственная задача и в чем ее экономический смысл, на примере задачи планирования производства продукции.
6. В чем заключается экономический смысл 1-й теоремы двойственности?
7. Что такое теневая цена? В чем состоит ее основное свойство?
8. Что такое нормирующая стоимость? В чем состоит ее основное свойство?

9. Раскройте смысл 2-й теоремы двойственности.

10. Что значит “исследовать устойчивость решения”?

11. Как по отчетам Excel можно определить, какой ресурс является наиболее дефицитным?

12. Как по отчетам Excel можно определить, какая продукция является наиболее невыгодной?

Работа 4. Задачи транспортного типа

Основные теоретические сведения

Многие прикладные модели в экономике сводятся к задачам линейного программирования. Можно выделить несколько типов ЗЛП, основанных на специфике ограничений этих задач.

Рассмотрим так называемую транспортную задачу по критерию стоимости, которую можно сформулировать следующим образом.

В m пунктах отправления (A_1, A_2, ..., A_m), которые в дальнейшем мы будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i ($i = 1, ..., m$). Данный продукт потребляется в n пунктах (B_1, B_2, ..., B_n), которые будем называть потребителями. Объем потребления обозначим b_j ($j = 1, ..., n$). Известны расходы на перевозку одной единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C = \{c_{ij}\}$.

Требуется составить такой план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i и полностью удовлетворяются потребности всех потребителей в пунктах B_j. Общая величина транспортных издержек при этом должна быть минимальной.

Транспортную задачу можно задавать таблицей, в которой указаны поставщики, потребители, запасы (a_i) и потребности (b_j) в грузах, стоимость перевозок одной единицы груза (c_{ij}) от поставщика i к потребителю j (табл. 15).

Таблица 15. **Транспортная задача в матричной форме**

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	….	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	...	…	…	…	…

Окончание табл. 15

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	…	B_n	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	…	b_n	

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij}. Математическая модель задачи выглядит так:

$$f\left(\overline{X}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\rightarrow min; \qquad (24)$$

$$(25)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=1,...,m); \qquad (26)$$

$$x_{ij}\geq 0.$$

Целевая функция (24) представляет собой суммарные расходы на перевозку грузов, которые необходимо минимизировать. Суммарные расходы рассчитываются как сумма произведений тарифов на перевозку одной единицы продукции на количество перевозимого груза (x_{ij}) от поставщика i к потребителю j по всем возможным перевозкам.

Условие (25) означает полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления, условие (26) определяет полный вывоз продукции от всех поставщиков. По экономическому смыслу задачи объемы перевозок (переменные x_{ij}) неотрицательны.

Выделяют закрытые транспортные задачи, в которых суммарный объем продукта, предлагаемого поставщиками, равен суммарному спросу потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (27)$$

Кроме того, транспортные задачи могут быть открытыми. В этом случае суммарная производственная мощность поставщиков превышает спрос потребителей или спрос потребителей больше фактической суммарной мощности поставщиков, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Равенство (27) называется условием баланса. Его выполнение необходимо для решения задачи. Открытую задачу можно привести к закрытой, если указать фиктивного поставщика или потребителя и определить для него такие тарифы перевозок, которые были бы заранее невыгодны.

Решение транспортной задачи может быть автоматизировано с помощью надстройки Excel *Поиск решения*.

Пример решения задачи

В четырех хранилищах (A_1, A_2, A_3, A_4) имеется запас топлива в 40, 50, 60 и 30 т. Требуется спланировать перевозки топлива трем потребителям (B_1, B_2 и B_3), спрос которых соответственно равен 60, 80 и 40 т, чтобы затраты на транспортировку были минимальными. Стоимость перевозок 1 т топлива из каждого хранилища к каждому потребителю указана в табл. 16.

Таблица 16. **Исходные данные для решения транспортной задачи**

Хранилище	Стоимость перевозки 1 т топлива потребителям, р.			Запасы топлива, т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	3	5	40
A_2	6	2	1	50
A_3	7	4	2	60
A_4	5	6	3	30
Потребность в топливе, т	60	80	40	—

Решение

Проверим, является ли задача закрытой. В хранилищах весь запас топлива составляет 180 т. Спрос равен 180 т. Потребление равно спросу, следовательно, условие баланса выполняется. Задача является закрытой. Заполним ячейки Excel соответствующими значениями, как показано на рис. 20.

	A	B	C	D	E
1	Хранилище	Стоимость перевозки 1 т топлива потребителям, руб			Запасы топлива, т
2		B1	B2	B3	
3	A1	4	3	5	40
4	A2	6	2	1	50
5	A3	7	4	2	60
6	A4	5	6	3	30
7	Потребность в топливе	60	80	40	
8					
9		Количество топлива			
10		0	0	0	0
11		0	0	0	0
12		0	0	0	0
13		0	0	0	0
14		0	0	0	
15	Целевая функция				
16	0				

Рис. 20. **Экран Excel для решения транспортной задачи**

Зададим начальные значения количества перевозимого груза (т. е. переменных x_{ij}) в ячейках B10:D13. Так как план перевозок неизвестен, то необходимо заполнить ячейки нулями.

По условию задачи топливо должно быть полностью вывезено из хранилищ, поэтому рассчитаем количество вывозимого топлива для каждого хранилища. Для 1-го хранилища в ячейку E10 введем формулу

=СУММ(B10:D10).

Ячейки E11:E13, содержащие данные по остальным хранилищам, заполняются формулами аналогично. Можно скопировать формулу из ячейки E10 с помощью автозаполнения.

Потребители должны получить необходимый груз. Рассчитаем его количество. В ячейку B14 введем формулу для первого потребителя:

=СУММ(B10:B13).

В ячейки C14:D14 для остальных потребителей формулы вводятся аналогично (используется автозаполнение для того, чтобы скопировать формулу из ячейки B14).

Значение целевой функции (общие затраты на транспортировку груза), рассчитываемое по формуле (24), введем в ячейку A16:

СУММПРОИЗВ(B3:D6;B10:D13).

Начнем процесс поиска решения. Выберем пункт меню *Сервис/ Поиск решения*. В окне *Поиск решения* установим следующие параметры, как показано на рис. 21:

- целевую ячейку $A$16 равной минимальному значению;
- диапазон изменяемых ячеек (количество груза) B10:D13;
- ограничения.

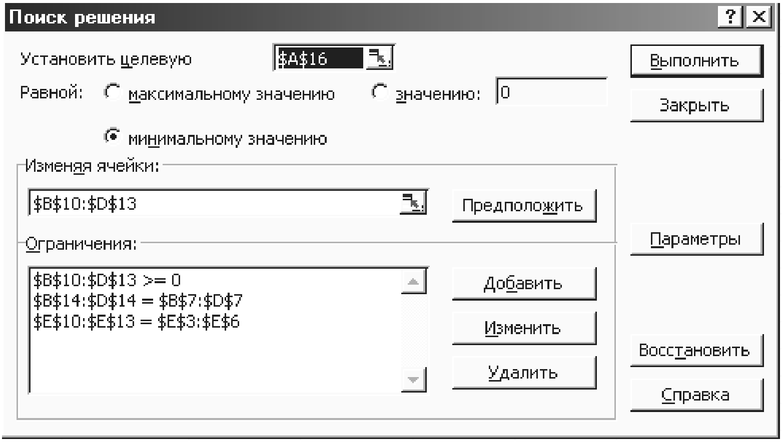


Рис. 21. **Окно *Поиска решения* для транспортной задачи**

Количество перевозимого груза должно быть неотрицательным:

$B$10:$D$13≥0.

Все потребители получат необходимое количество груза, если

$B$14:$D$14=$B$7:$D$7.

От всех поставщиков груз будет полностью вывезен, когда

$E$10:$E$13=$E$3:$E$6.

В окне *Параметры* установим флажок *Линейная модель*.

Запустим модель на выполнение, нажав кнопку *Выполнить* в окне *Поиск решения*. Когда поиск закончится, появится сообщение о том, что решение найдено (рис. 22), и на исходном листе появятся результаты решения задачи. В окне *Результаты поиска решения* установим переключатель в положение *Сохранить найденное решение* и нажмем *ОК*.

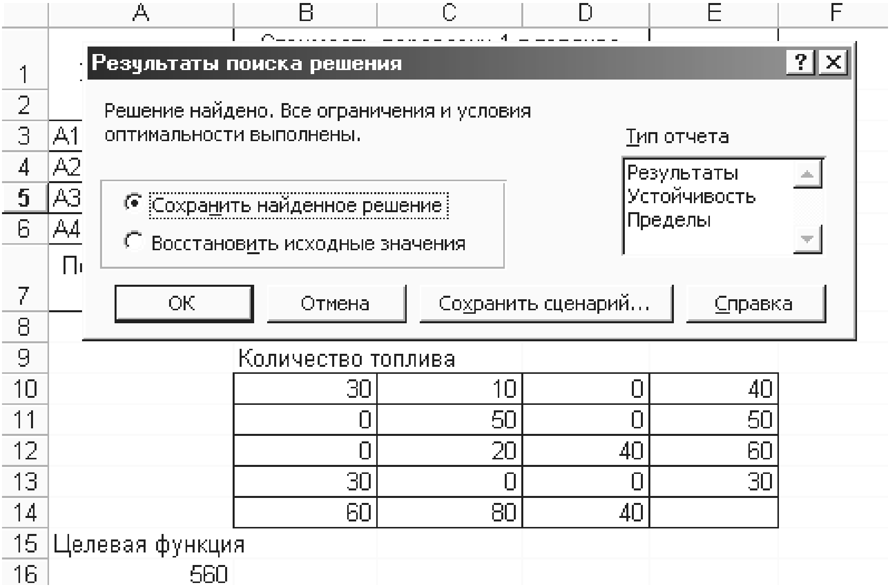


Рис. 22. **Решение транспортной задачи**

Итак, согласно решению задачи, 1-му потребителю топливо будет доставлено из 1-го (30 т) и 4-го (30 т) хранилищ. Таким образом, потребитель получит необходимые ему 60 т топлива (и так далее для всех потребителей).

Из 1-го хранилища топливо будет отправлено следующим потребителям: 1-му (30 т), 2-му (10 т), 4-му (40 т) (и так далее для всех поставщиков).

Общая стоимость перевозок при таком плане поставки составит 560 р.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Составьте план перевозок каменного угля из трех пунктов отправления в четыре пункта назначения. План должен обеспечивать минимальные транспортные издержки. Суточная производительность шахт, потребность пунктов потребления и стоимость перевозки 1 т угля приведены в табл. 17.

Таблица 17. **Данные о производительности шахт, потребностях заказчиков и стоимости перевозки 1 т угля потребителям**

Производитель (шахта)	Стоимость перевозки 1 т угля потребителям, р.				Производительность шахт, тыс. т
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	4	50
Потребности заказчиков, тыс. т	75	80	60	85	—

Ответ: 805,

0	0	60	40
70	80	0	0
5	0	0	45

Вариант 2

Совхозы A_1, A_2, A_3 выделяют 40, 50 и 30 ц молока для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Стоимость перевозки 1 ц молока и потребность пунктов в молоке даны в табл. 18. Организуйте снабжение так, чтобы потребители обеспечивались молоком, а транспортные издержки были минимальными.

Таблица 18. **Информация о стоимости перевозки 1 ц молока потребителям, потребностях заказчиков и количестве молока, предназначенного для вывоза**

Совхоз	Стоимость перевозки 1 ц молока потребителям, р.				Количество молока, предназначенное для вывоза, ц
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3,0	2,5	3,5	4,0	40
A_2	2,0	4,5	5,0	1,0	50
A_3	6,0	3,8	4,2	2,8	30
Потребности заказчиков, ц	20	40	30	30	—

Ответ: 296,

0	40	0	0
20	0	0	30
0	0	30	0

Вариант 3

В городе имеются четыре хлебозавода, которые снабжаются мукой от трех мелькомбинатов. Все необходимые данные приведены в табл. 19. Определите оптимальный план поставок муки, обеспечивающий минимальные расходы.

Таблица 19. **Сведения о количестве поставленной муки, суточной производительности мелькомбинатов и тарифах перевозок**

Мелькомбинат	Стоимость перевозки 1 т муки на хлебозаводы, р.				Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4	2	4	7	25
№ 2	7	6	6	8	20
№ 3	2	2	3	6	35
Суточная потребность в муке, т	30	20	12	18	

Ответ: 291,

0	20	5	0
0	0	2	18
30	0	5	0

Вариант 4

С четырех складов необходимо вывезти картофель в пять торговых точек. Требуется закрепить поставщиков за торговыми точками так, чтобы общая сумма затрат на перевозку была минимальной. Числовые данные задачи представлены в табл. 20.

Таблица 20. **Информация о стоимости перевозки 1 т картофеля потребителям, объеме вывоза и потребностях заказчиков**

Склад (поставщик)	Стоимость перевозки 1 т груза потребителям, усл. ед.					Объем вывоза, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	2	3	6	1	50
A_2	5	3	4	2	6	160
A_3	3	4	7	3	2	70
A_4	2	6	5	4	3	100
Потребность, т	80	100	90	50	60	

Ответ: 1020,

0	0	50	0	0
0	100	20	40	0
0	0	0	10	60
80	0	20	0	0

Вариант 5

Однородный товар с четырех баз поставляется в четыре магазина. Потребности 1-го, 2-го, 3-го и 4-го магазинов в товаре соответственно равны 30, 80, 60 и 50 тыс. ед. Запасы товара на базах составляют 40, 60, 40 и 80 тыс. ед. Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара (в усл. ед.) представлены следующей матрицей затрат:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4{,}5 & 3 & 2 & 1{,}2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3{,}5 & 2{,}6 & 1{,}3 & 1{,}4 \\ 3{,}2 & 4{,}1 & 2{,}5 & 5{,}8 \end{bmatrix}.$$

Необходимо запланировать перевозки таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности магазинов, а затраты свести к минимуму.

Ответ: 528,

0	40	0	0
10	0	0	50
0	40	0	0
20	0	60	0

Вариант 6

Продукцию 3 заводов (a_1 = 40 тыс. ед.; a_2 = 50 тыс. ед.; a_3 = = 30 тыс. ед.) необходимо доставить четырем потребителям, спрос которых распределяется следующим образом: $в_1$ = 20 тыс. ед.; $в_2$ = 50 тыс. ед.; $в_3$ = 20 тыс. ед.; $в_4$ = 30 тыс. ед. Известна матрица транспортных расходов на доставку 1 тыс. ед. с i-го завода j-му потребителю:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 6{,}5 & 4{,}3 & 5{,}1 & 4 \\ 3{,}0 & 7{,}4 & 3{,}5 & 6{,}3 \\ 4{,}3 & 5{,}7 & 6{,}5 & 3{,}8 \end{bmatrix}.$$

Определите оптимальный план прикрепления потребителей к заводам, минимизирующий транспортные расходы.

Ответ: 490,

0	40	0	0
20	10	20	0
0	0	0	30

Вариант 7

Собранный урожай зерна четырех совхозов районного производственного объединения должен быть перевезен на три элеватора: элеватор B_1 мощностью 90 тыс. т, элеватор B_2 мощностью 70 тыс. т, элеватор B_3 мощностью 50 тыс. т. Все числовые данные приведены в табл. 21.

Таблица 21. **Сведения о затратах на перевозку 1 т зерна и о запасах зерна**

Совхоз	Затраты на перевозку 1 т зерна на элеваторы, р.			Запасы зерна, тыс. т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10,5	22,0	17,4	50
A_2	27,3	12,5	23,7	60
A_3	13,7	18,6	15,3	70
A_4	18,1	14,4	11,5	30

Определите план доставки зерна на элеваторы, минимизирующий транспортные издержки.

Ответ: 2656,

50	0	0
0	60	0
40	0	30

0	10	20

Вариант 8

Автопарки города с ежемесячной потребностью в бензине соответственно в 40, 30, 80, 60 и 50 т снабжаются бензохранилищами вместимостью 55, 70, 35 и 100 т. Доставка горючего из бензохранилищ осуществляется автотранспортом. Средние транспортные издержки в расчете на 1 т приведены в табл. 22. Требуется составить план перевозки горючего, обеспечивающий минимальные транспортные издержки.

Таблица 22. **Данные о стоимости перевозки 1 т груза, усл. ед.**

Бензохранилище	Стоимость перевозки 1 т груза потребителям автопарком				
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5
№ 1	4	2	3	6	1
№ 2	5	3	4	2	6
№ 3	3	4	7	3	2
№ 4	2	6	5	4	3

Ответ: 715,

0	30	25	0	0
0	0	10	60	0
0	0	0	0	35
40	0	45	0	15

Контрольные вопросы и задания

1. Каковы исходные данные транспортной задачи? Что в ней нужно найти?

2. Приведите математическую модель транспортной задачи и поясните экономический смысл каждого выражения.

3. Как в Excel задается условие вывоза всей продукции от каждого поставщика?

4. Как в Excel задается условие того, что потребность каждого потребителя должна быть полностью удовлетворена?

5. Какие транспортные задачи называются открытыми, а какие — закрытыми? Как решаются открытые задачи?

Работа 5. Задача о назначениях

Основные теоретические сведения

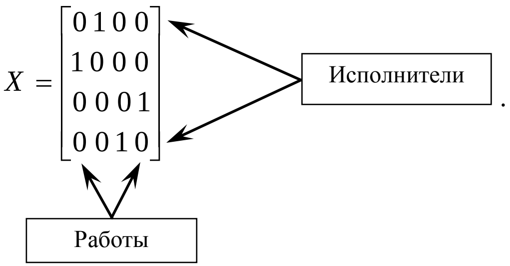
Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Кроме того, эту задачу можно отнести к классу задач дискретного (а точнее — целочисленного программирования), поскольку в ней на переменные накладываются условия целочисленности.

Постановка задачи. Имеется n различных работ, каждая из которых может быть выполнена одним из n исполнителей. Известны затраты C_{ij}, связанные с выполнением работы j исполнителем i. Необходимо найти такой вариант назначения исполнителей на работы, чтобы общие затраты были наименьшими. При этом каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, а каждая работа может быть поручена одному исполнителю.

Составим математическую модель задачи. Введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-й исполнитель назначается на } j\text{-ю работу;} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Например, матрица переменных задачи может выглядеть так:



Такая запись означает, что 1-й исполнитель назначается на 2-ю работу, 2-й исполнитель — на 1-ю и т. д.

Поскольку в задаче требуется, чтобы общие затраты были наименьшими, целевая функция будет представлять собой общие затраты на выполнение работ. Ее следует минимизировать:

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to min. \quad (28)$$

При этом накладываются следующие ограничения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; & (29) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; & (30) \\ x_{ij} \in \{0,1\}; \\ (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Ограничение (29) (суммирование по строке) означает, что каждый исполнитель назначается только на одну работу, а ограничение (30) (суммирование по столбцу) — что каждая работа может быть поручена только одному исполнителю.

Если рассмотреть задачу о назначениях как частный случай транспортной задачи, то очевидно, что $a_i = 1$ ($i = 1, ..., n$) и $b_j = 1$ ($j = 1, ..., n$). Условие баланса (27) означает здесь, что число работ равно числу исполнителей. Если это не так, то в задачу нужно ввести недостающее число фиктивных работ или исполнителей с достаточно большими штрафными затратами C_{ij}.

Отметим, что возможна также другая постановка задачи о назначениях, когда заданы не затраты C_{ij}, а прибыли, связанные с назначением исполнителя i на работу j. В этом случае целевая функция представляет собой общую прибыль, и нужно найти ее максимум.

Пример решения задачи

Имеется 5 работ и 5 исполнителей. Дана матрица затрат $\{C_{ij}\}_{n\times n}$:

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 11 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 10 & 12 \\ 10 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Требуется назначить исполнителей на работы так, чтобы общие затраты на выполнение работ были минимальны. При этом каждый исполнитель назначается только на одну работу, а каждая работа поручается только одному исполнителю.

Сформируем экран Excel так, как показано на рис. 23.

В ячейки A2:E6 введены исходные данные задачи: значения затрат C_{ij}. Ячейки A8:E12 отведены под значения переменных. Можно заполнить эти ячейки некоторыми начальными значениями (например, нулями). Пустые ячейки Excel также рассматривает как нулевые. В ячейки F8:F12 введены формулы, которые задают число назначений для каждого исполнителя:

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица затрат:					
2	7	9	8	5	4	
3	6	8	11	9	10	
4	5	10	6	8	7	
5	4	7	9	10	12	
6	10	6	10	7	8	
7	Переменные:					
8						0
9						0
10						0
11						0
12						0
13	0	0	0	0	0	
14	Цель:					
15	0					

Рис. 23. **Подготовка исходных данных для решения задачи о назначениях**

=СУММ(A8:E8)
=СУММ(A9:E9)
=СУММ(A10:E10)
=СУММ(A11:E11)
=СУММ(A12:E12)

.

В ячейки A13:E13 введены формулы, задающие число исполнителей, которым поручена каждая работа:

=СУММ (A8:A12)	=СУММ (B8:B12)	=СУММ (C8:C12)	=СУММ (D8:D12)	=СУММ (E8:E12)

.

В ячейку A15 записано значение целевой функции (общие затраты):

=СУММПРОИЗВ(A2:E6;A8:E12)

.

Затем вызовем средство *Поиск решения* и заполним окно *Поиск решения* так, как показано на рис. 24.

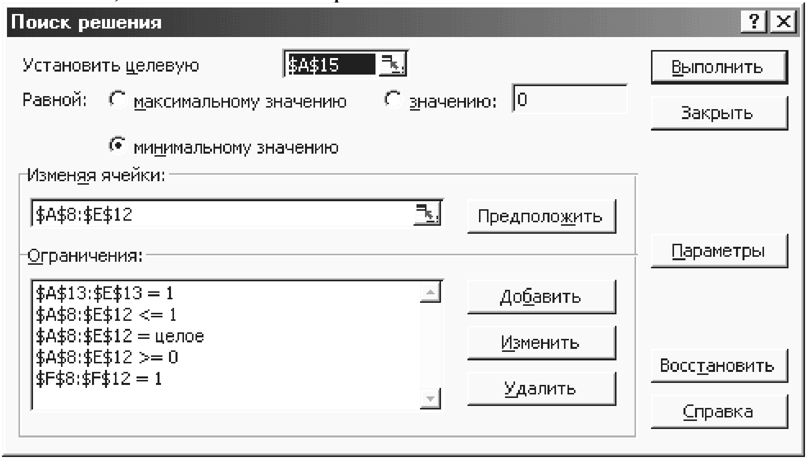


Рис. 24. **Окно *Поиск решения* для решения задачи о назначениях**

1-е ограничение в списке соответствует ограничению (30), т. е. задает условие, при котором каждая работа может быть поручена только одному исполнителю. Последнее ограничение соответствует ограничению (29), т. е. означает, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу. 2-е, 3-е и 4-е ограничения задают условие $x_{ij} \in \{0,1\}$.

Также нажмем кнопку *Параметры* и установим флажок *Линейная модель* в окне *Параметры*. Далее активизируем поиск, нажав кнопку *Выполнить*. Excel найдет оптимальное решение в соответствии с условием задачи. В окне *Результаты поиска решения* установим переключатель в положение *Сохранить найденное решение* и нажмем *ОК*. Тип отчета в данной задаче выбирать не нужно. Результат решения задачи (вид листа Excel) показан на рис. 25.

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимальными являются следующие назначения:

- 1-го исполнителя на 5-ю работу;
- 2-го исполнителя на 2-ю работу;
- 3-го исполнителя на 3-ю работу;
- 4-го исполнителя на 1-ю работу;
- 5-го исполнителя на 4-ю работу.

Общие затраты при этом составят 29 денежных единиц. Никакими другими назначениями нельзя достигнуть меньшего уровня общих затрат.

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица затрат:					
2	7	9	8	5	4	
3	6	8	11	9	10	
4	5	10	6	8	7	
5	4	7	9	10	12	
6	10	6	10	7	8	
7	Переменные:					
8	0	0	0	0	1	1
9	0	1	0	0	0	1
10	0	0	1	0	0	1
11	1	0	0	0	0	1
12	0	0	0	1	0	1
13	1	1	1	1	1	
14	Цель:					
15	29					

Рис. 25. **Результат решения задачи о назначениях**

Задания для самостоятельной работы

Решите задачу о назначениях на основании данных табл. 23.

Таблица 23. **Исходная информация для решения задачи о назначениях**

Вариант	Матрица затрат $\{C_{ij}\}$					Ответ					
						цель	назначения				
1	5	7	6	3	2	19	0	0	0	0	1
	4	6	9	7	8		0	1	0	0	0
	3	8	4	6	5		0	0	1	0	0
	2	5	7	8	10		1	0	0	0	0
	8	4	8	5	6		0	0	0	1	0
2	6	8	7	4	3	24	0	0	0	0	1
	5	7	10	8	9		0	1	0	0	0
	4	9	5	7	6		0	0	1	0	0
	3	6	8	9	11		1	0	0	0	0
	9	5	9	6	7		0	0	0	1	0
3	7	11	7	6	5	32	0	0	0	1	0
	6	10	9	12	9		1	0	0	0	0
	10	8	5	7	11		0	0	1	0	0
	7	7	6	8	10		0	1	0	0	0
	8	10	7	9	8		0	0	0	0	1
4	5	9	5	4	3	22	0	0	0	1	0
	4	8	7	10	7		1	0	0	0	0
	8	6	3	5	9		0	0	1	0	0
	5	5	4	6	8		0	1	0	0	0
	6	8	5	7	6		0	0	0	0	1
5	6	10	6	5	4	27	0	0	0	1	0
	5	9	8	11	8		1	0	0	0	0
	9	7	4	6	10		0	0	1	0	0
	6	6	5	7	9		0	1	0	0	0
	7	9	6	8	7		0	0	0	0	1
6	8	11	7	6	4	26	0	0	0	0	1
	4	10	9	12	5		1	0	0	0	0
	6	7	5	7	11		0	0	1	0	0
	7	5	6	5	10		0	0	0	1	0
	9	8	7	10	8		0	1	0	0	0
7	6	9	5	4	2	17	0	0	0	0	1
	4	8	7	10	3		1	0	0	0	0
	7	5	4	3	9		0	0	0	1	0
	5	6	5	7	8		0	0	1	0	0
	4	3	3	5	6		0	1	0	0	0
8	9	12	8	7	5	30	0	0	0	0	1

	5	11	10	13	6		1	0	0	0	0
	10	8	7	6	12		0	0	0	1	0
	8	9	8	10	11		0	0	1	0	0
	7	6	6	8	9		0	1	0	0	0

Контрольные вопросы и задания

1. Как можно классифицировать задачу о назначениях?
2. Каковы исходные данные задачи о назначениях? Что в ней требуется найти?
3. Как формализуется факт назначения или неназначения исполнителей на работы? Приведите математическую модель задачи и поясните смысл всех выражений.
4. Что означает условие баланса для задачи о назначениях?
5. Как задать условие целочисленности $x_{ij} \in \{0,1\}$ в виде ограничений для средства *Поиск решения*?
6. Как задается в Excel условие назначения только одного исполнителя на каждую работу?
7. Как задается в Excel условие того, что каждому исполнителю может быть поручена только одна работа?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Гарнаев В. П. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах. — СПб.: BHV, 1999.

Кудрявцев Е. М. MathCad 8. — М.: ДМК, 2000.

Кузнецов В. П. Экономико-математические методы и модели. — Мн.: Минский институт управления, 2000.

Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. — СПб.: BHV, 1997.

Ларионов А. И., Юрченко Т. И. Экономико-математические методы в планировании. — М.: Высшая школа, 1984.

Кузнецов А. В. и др. Руководство к решению задач по математическому программированию: Учебное пособие / *А. В. Кузнецов, Н. Н. Холод, Л. С. Костевич*; Под общ. ред. *А. В. Кузнецова*. — 2-е изд. — Мн.: Вышэйшая школа, 2001.

Рутковский Р. А., Сакович В. А. Экономико-математические методы в торговле. — Мн.: Вышэйшая школа, 1986.

Сборник задач по математическому программированию (для экономических специальностей вузов) / Авторы-составители: *А. В. Кузнецов, Г. И. Новикова, Н. И. Холод*. — Мн.: Вышэйшая школа, 1985. — 143 с.

Спирин А. А., Фомин Г. П. Экономико-математические методы и модели в торговле. — М.: Экономика, 1988.

Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие / *Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар и др.*; Под общ. ред. *А. В. Кузнецова*. — 2-е изд. — Мн.: БГЭУ, 2000.

Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / *В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.*; Под ред. *В. В. Федосеева*. — М.: ЮНИТИ, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

АВТОМАТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пособие
для студентов дневной формы обучения
экономических специальностей

Авторы-составители: **Бондарева** Валентина Викторовна
Еськова Оксана Ивановна

Редактор *О. М. Ковалева*
Корректор *Т. Ф. Рулинская*
Компьютерная верстка *Л. Ф. Кириленкова*

Подписано в печать 30.12.03. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага типографская № 1. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,9. Тираж 500 экз.
Заказ №

УО “Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации”.
Лицензия ЛВ № 111 от 02.12.02.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

Отпечатано на ризографе
УО “Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации”.
Лицензия ЛП № 112 от 30.12.02.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.