Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

УДК 512.542

Группы с системами условно перестановочных подгрупп

Н.С. Косенок[1], В.М. Селькин[2], В.Н. Рыжик[3]

Пусть G конечная группа и N нормальная подгруппа группы G. Нами было доказано, что если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы группы $F(N)$ условно-перестановочна в G, то группа G сверхразрешима.
Ключевые слова: сверхразрешимая группа, условно допустимая подгруппа.

Let G be a finite group and N is a normal subgroup of G. We prove that if every maximal subgroup any Sylow subgroup of $F(N)$ is conditionally permutable in G, then G is supersoluble.
Keywords: supersoluble group, conditionally permutable subgroup.

1. Введение. Строение группы тесно связано со свойствами максимальных подгрупп ее силовских подгрупп. Так в работе [1] было доказано, что группа сверхразрешима, если все такие ее подгруппы нормальны. В дальнейшем было доказано, что группа G сверхразрешима, если либо каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из G c-нормальна в G [2], либо каждая такая подгруппа дополняема в G [3]. В работе [4] было установлено, что группа G нильпотентна (сверхразрешима), если каждая максимальная подгруппа любой ее силовской подгруппы обладает нильпотентным (соответственно сверхразрешимым) добавлением в G.

В данной работе, используя условия, налагаемые на максимальные подгруппы силовских подгрупп, мы докажем новые критерии сверхразрешимости групп.

2. Предварительные сведения. Напомним, что класс групп F называется формацией, если F является гомоморфом (т. е. классу F принадлежат все факторгруппы всех его групп), и любая группа обладает наименьшей нормальной подгруппой, факторгруппа по которой принадлежит F. Формация F называется насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/\Phi(G)\in F$.

Лемма [5, I, лемма 4.4]. Пусть N – нормальная подгруппа группы G такая, что факторгруппа $N/N\cap\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда N также нильпотентна. Подгруппы H и T группы G называются перестановочными (условно перестановочными [6]), если $HT = TH$ (если соответственно $HT^x = T^xH$ для некоторого $x\in G$). Подгруппа H называется условно перестановочной или более коротко c-перестановочной [6], если она условно перестановочна со всеми подгруппами из G.

Подгруппа H называется наследственно c-перестановочной [6], если она условно перестановочна в любой, содержащей ее подгруппе. В качестве тривиального примера заметим, что в группе S_3 силовская 2-подгруппа наследственно c-перестановочна, но не является перестановочной подгруппой в S_3. Отметим несколько очевидных свойств условно перестановочных подгрупп.

Лемма 2. Пусть G – группа, $K \trianglelefteq G$ и $H\leq G$. Тогда:

(1) Если $K\leq T\leq G$ и H условно перестановочна (наследственно c-перестановочна) с T, то KH/K условно перестановочна (наследственно c-перестановочна) с T/K в G/K.

(2) Если $K\leq H$, $T\leq G$ и H/K условно перестановочна (наследственно с-перестановочна) с KT/K в G/K, то H условно перестановочна (наследственно с-перестановочна) с T.

Лемма 3. [4] Пусть N и L – нормальные подгруппы группы G такие, что P/L является силовской p-подгруппой в NL/L, и M/L – максимальная подгруппа в P/L. Если P_p – силовская p-подгруппа в $P\cap N$, то P_p – силовская p-подгруппа в N такая, что $D = M\cap N\cap P_p$ является максимальной подгруппой P_p и $M = LD$.

Лемма 4. [5, с. 35]. Класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией.

Лемма 5. [7, A, 10.6]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда $F(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$.

Лемма 6. [7, B, 9.8]. Пусть H/K – главный фактор группы G. Тогда $|H/K|$ является простым числом p тогда и только тогда, когда $G/C_G\ (H/K)$ – циклическая группа порядка, делящего p-1.

Лемма 7. [7, A, 10.6]. Пусть H/K – главный фактор группы G. Тогда $F(G)\subseteq C_G(H/K)$.

Лемма 8. [7, A, 10.6]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда $C_G(F(G))\subseteq F(G)$.

Лемма 9. [8, VI, 9.3]. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда G p-сверхразрешима тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы M из G с $p||G:M|$, имеет место $|G:M\ | = p$.

Лемма 10. [5, I, лемма 3.4]. Пусть H/K – главный фактор группы G. Если H/K – p-группа, то $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$.

Лемма 11. [8, VI, 9.1]. Пусть G – сверхразрешимая группа. Если p и q – максимальный и минимальный простые делители $|G|$ соответственно, тогда силовская p-подгруппа G нормальна в G, и G q-нильпотентна.

Лемма 12. [9, 3, 1.3.9]. Пусть A и B – такие подгруппы группы G, что $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ для любого элемента x из G.

3. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть G – разрешимая группа, которая содержит неединичную нормальную подгруппу N с сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N)$ условно перестановочна в G, то G сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что эта теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка. Сначала покажем, что условие теоремы выполняется для факторгруппы G/Φ, где $\Phi = \Phi(G)$ – подгруппа Фраттини в G. Рассмотрим $T/\Phi = F(N\Phi/\Phi)$.Тогда $T = T\cap N\Phi = \Phi(T\cap N)$. Так как T/Φ – нильпотентная нормальная подгруппа в G/Φ, то по лемме 1, T – нильпотентная нормальная подгруппа в G. Следовательно, $T\cap N \leq F(N)$. С другой стороны, поскольку

$$F(N)/F(N)\cap\Phi \simeq F(N)\Phi/\Phi \leq F(N\Phi/\Phi),$$

мы имеем $F(N)\subseteq T$. Следовательно, $T\cap N = F(N)$. И таким образом,

$$F(N\Phi/\Phi) = T/\Phi = (T\cap N)\Phi/\Phi = F(N)\Phi/\Phi.$$

Теперь пусть P/Φ – силовская p-подгруппа группы T/Φ, и пусть M/Φ – максимальная подгруппа в P/Φ и P_p – силовская p-подгруппа в $P\cap F(N)$.Тогда по лемме 3, P_p – силовская p-подгруппа в $F(N)$, и $L = M\cap F(N)\cap P_p$ – максимальная подгруппа в P_p. По условию подгруппа L условно перестановочна в G. По лемме 3 мы имеем $M = \Phi L$. Значит, по лемме 2 подгруппа $M/\Phi = L\Phi/\Phi$ условно перестановочна в G/Φ. Таким образом, группа G/Φ имеет нормальную подгруппу $N\Phi/\Phi$ такую, что каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из $F(N\Phi/\Phi) = F(N)\Phi/\Phi$ условно перестановочна в G/Φ. Поскольку $(G/\Phi)/(N\Phi/\Phi) \simeq G/N\Phi \simeq (G/N)/(N\Phi/N)$ – сверхразрешимая группа, мы видим, что условия теоремы все еще выполняются для G/Φ.

Если $\Phi \neq 1$, то $|G/\Phi| <|G|$ и поэтому G/Φ сверхразрешима, по выбору группы G. Следовательно, G – сверхразрешима по лемме 4. Это противоречит нашему предположению о группе G. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Так как $\Phi(N)\subseteq\Phi(G)$, это влечет $\Phi(N) = 1$ и по лемме 5, $F(N) = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_t$, где $R_1, R_2 \ldots R_t$ – минимальные нормальные подгруппы группы G.

Пусть M_i – максимальная подгруппа R_i, $i=1, 2, \ldots, t$. Предположим, что для некоторого индекса i, мы имеем $|M_i|\neq 1$. Пусть теперь R_i – q-группа и R – силовская q-подгруппа в $F(N)$. Так как $N\trianglelefteq G$ и $F(N)$ char N, мы видим, что $F(N)$ нормальна в G. Следовательно, $R\trianglelefteq G$, поскольку R char $F(N)$. Пусть E – такая максимальная подгруппа группы G, что $G = ER_i$. Тогда $G = RE$, что влечет $D = E\cap R\trianglelefteq G$. Так как $E\cap R_i = 1$, то $R = R_i \times D$. Пусть $M = M_iD$. Так как

$|R:M| = |R_i:M_i| = q$, то M – максимальная подгруппа в R. Так как M по условию является условно перестановочной в G, то G имеет такой элемент x, что $M_iDE^x = M_iE^x = E^xM$. Это влечет $|G:E| = |M_i| = |R_i|$, что не возможно. Это противоречие показывает, что для каждого $I = 1, 2, \ldots, t$ группа R_i имеет простой порядок. Допустим, что $N = G$. Тогда по лемме 6 мы видим, что $G/C_G(R_i)$ – абелева группа. Пусть $C=\bigcap_{i=1}^{t}C_G(R_i)$. Тогда ясно, что $C = C_G(F(G))$. По лемме 7, $F(G) \le C$. Но из леммы 8, мы имеем $C \le F(G)$ и, следовательно, $C = F(G)$ и $G/F(G)$ – абелева группа. Это показывает, что каждая максимальная подгруппа M из G, содержащая $F(G)$, является нормальной в G и, следовательно, $|G:M|$ – простое число. С другой стороны, если M – максимальная подгруппа в G такая, что $F(G) \not\subseteq M$, тогда $G = R_iM$ для некоторого $i \in \{1,2,..., t\}$, и $|G:M| = |R_i|$ является простым числом (так как R_i – абелева минимальная нормальная подгруппа в G). Таким образом, группа G – сверхразрешима.

Это противоречие показывает, что $N \neq G$. Пусть H/K – такой главный p-фактор группы G, что $F(N)\subseteq K\subset H\subseteq G$ и $H/K \not\subseteq \Phi(G/K)$. Пусть M – такая максимальная в G подгруппа, что $K = H\cap M$. Тогда $O_p(N) \not\subseteq M$ и поэтому $G = R_iM$ для некоторого $i \in \{ 1, ... , n\}$. Но тогда $|G:M| = p$, что влечет $|H/K| = p$. Итак, для любого нефраттиниевого главного фактора группы G имеет место $|H/K|$ – простое число. В силу леммы 9 это означает, что G – сверхразрешимая группа. Это противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть N – неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы G с сверхразрешимой факторгруппой G/N. Если каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из N является наследственно c-перестановочной в G, то G сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G – контрпример минимального порядка.

Прежде докажем, что N не является минимальной нормальной подгруппой в G. Предположим, что N – минимальная нормальная подгруппа в G. Группа N по условию разрешима. Значит, N – p-группа для некоторого простого числа p. Пусть E – максимальная в N подгруппа. Ввиду леммы 4, $N\not\subseteq \Phi(G)$. Пусть D – такая максимальная в G подгруппа, что $G = ND$. Ясно, что $|G:D| = |N|$. По условию подгруппа E наследственно c-перестановочна в G. Значит для некоторого $x\in G$ имеет место $E^xD = DE^x$, что влечет $|G:D| = |E|<|R|$. Полученное противоречие показывает, что подгруппа N не является минимальной нормальной в G. Покажем теперь, что для любой минимальной нормальной в G подгруппы R факторгруппа G/R сверхразрешима. Мы уже знаем, что $R \neq N$ и поэтому RN/R – неединичная нормальная разрешимая подгруппа в G/R такая, что факторгруппа $(G/R)/(RN/R) \simeq G/RN\simeq (G/N)/(RN/N)$ является сверхразрешимой.

Пусть P/R – силовская q-подгруппа в RN/R и M/R – максимальная подгруппа в P/R. Если P_q – силовская q-подгруппа в $P\cap N$, то, по лемме 3, P_q – силовская q-подгруппа в N и $L = M\cap N\cap P_p$ – максимальная подгруппа в P_q, $M = RL$. Таким образом, по условию L является наследственно c-перестановочной подгруппой в G. Значит, по лемме 2 подгруппа $M/R = LR/R$ является наследственно c-перестановочной в G/R. Это показывает, что условие теоремы выполняется и для факторгруппы G/R. Следовательно, по выбору группы G мы заключаем, что G/R – сверхразрешимая группа. Ввиду леммы 4 группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу R. Понятно, что $|R|$ не является простым числом. Покажем, что $R = C_G(R) = O_p(G)$ и $G = [R]M$, где M – такая сверхразрешимая максимальная в G подгруппа, что $O_p(M) = 1$. Действительно, так как класс всех сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, то $R\simeq \Phi(G)$. Пусть R является p-группой. Пусть M – максимальная подгруппа в G такая, что $R\not\leq M$. Пусть $C = C_G(R)$. Ясно, что $C\cap M\trianglelefteq G$. Так как $R = Soc(G)$, мы видим, что $M_G = 1$. Это показывает, что $C\cap M = 1$ и, следовательно, $C = C\cap RM = R(C\cap M) = R$. Используя теперь лемму 10, мы видим, что $O_p(G/C_G(R)) = O_p(G/R) = 1$. Ясно, что $G = [R]M$ и поэтому M – такая сверхразрешимая группа, что $O_p(M) = 1$. Покажем, что силовская p-подгруппа из N не совпадает с R. Действительно, допустим R – силовская p-подгруппа в N. Тогда если R_1 – максимальная подгруппа в R, то по условию R_1 является наследственно c-перестановочной в G.

Теперь, рассуждая как выше, видим, что $|G:M| = |R| = |R_1|$, что не возможно. Таким образом, R не является силовской подгруппой в N. Покажем теперь, что $N = G$. Действительно, допустим, что $N \neq G$. Легко видеть, что условие теоремы переносится на N. Значит, поскольку $|N| < |G|$, то в силу выбора группы G, N – сверхразрешимая группа. Пусть Q – силовская

q-подгруппа в N, где q – наибольший простой делитель порядка группы N. Тогда по лемме 11 подгруппа Q нормальна в N. Если $q \neq p$, то $Q \subseteq C_G(R) = R$, что не возможно. Значит, $q = p$ и поэтому $Q = O_p(N)$ char $N \trianglelefteq G$. Это означает, что $Q \trianglelefteq G$. Но, как мы уже знаем, $R \neq Q$ и поэтому $O_p(M) \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что $N = G$. Это, в частности, означает, что $R \neq G_p$, где G_p – силовская p-подгруппа в G. Пусть M_p – произвольная силовская p-подгруппа в M. Тогда поскольку, очевидно, RM_p – силовская p-подгруппа в G, то в ней мы можем выбрать такую максимальную подгруппу P, что $M_p \subseteq P$. Согласно условию, подгруппа P является наследственно c-перестановочной в G. Значит, для некоторого элемента $x \in G$ имеет место $M^xP = PM^x$. Если $M^xP = G$, то согласно лемме 12 имеет место $MP = G$, что, очевидно, невозможно. Значит, $M^xP \neq G$ и поэтому $P \subseteq M^x$, поскольку M^x – максимальная подгруппа в G. Заметим, что поскольку P – максимальная подгруппа в RM_p и, поскольку, $|R| \neq p$, то $P \cap R \neq 1$. Таким образом, $R \cap M^x \neq 1$. Но это не возможно, поскольку $R \cap M \neq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. – 1990. – № 35. – P. 210–214.

2. Wang, Y. *C*-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – № 180. – P. 954–965.

3. Wang, Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups *c*-supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – № 224. – P. 467–478.

4. Веньбинь, Го. *G*-накрывающие системы подгрупп для классов *p*-сверхразрешимых и *p*-нильпотентных конечных групп / Го Веньбинь, К.П. Шам, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2004. – № 3. – С. 527–539.

5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

6. Gu, W. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // SEAMS Bull Math. – 2005. – Vol. 29, № 2. – P. 792–810.

7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-NewYork : Springer, 1967. – 793 p.

9. Wenbin, Guo. The theory of classes of groups / Guo Wenbin. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

[1]Белорусский торгово-экономический
университет потребительской кооперации

[2]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[3]Брянский государственный
аграрный университет

Поступила в редакцию 05.10.2017