УДК 512.542

Н. С. Косенок (nskosenok@gmail.com),
канд. физ.-мат. наук, доцент
Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации
г. Гомель, Республика Беларусь

О СУБНОРМАЛЬНО ПРИМИТИВНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Подгруппа H группы G называется субнормально примитивной в G, если G имеет такую субнормальную подгруппу T, что $G = HT$ и $H \cap T \subseteq H_{G}$.

В данной работе на основе этого определения получен новый критерий сверхразрешимости конечных групп.

Subgroup H of G is called subnormally primitive in G, if G has a subnormal subgroup of T, that $G = HT$ and $H \cap T \subseteq H_{G}$.

In this paper, on the basis of this definition we obtain new criteria for the solvability of finite groups.

Ключевые слова: конечная группа; разрешимая группа; максимальная подгруппа; субнормальная подгруппа; субнормально примитивная подгруппа.

Key words: finite group; solvable group; maximal subgroup; subnormal subgroup; subnormally primitive subgroup.

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Как известно, максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение группы. Так, например, согласно знаменитой теореме Хупперта [1] группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. Этот результат получил развитие во многих направлениях (Л. А. Шеметков и С. А. Чунихин [2]). Заметим, что если мы попытаемся заменить условие простоты индексов на более слабое: индекс каждой максимальной подгруппы есть степень простого числа, то как показывает пример группы $PSL(2,7)$, группа при таких ограничениях не является даже разрешимой. Однако как показано в работе [3], если мы накладываем такое ограничение на более широкий класс *примитивных* подгрупп [3], то группа G снова будет сверхразрешимой. Напомним, что собственная подгруппа H группы G называется примитивной подгруппой в G, если пересечение всех тех подгрупп из G, которые содержат H собственным образом, снова отлично от H.

По аналогии с этим, мы говорим, что H – субнормально примитивная подгруппа в G, если H – собственная субнормальная подгруппа в G и пересечение всех тех субнормальных подгрупп из G, которые содержат H собственным образом, отлично от H. В данной работе, основываясь на понятии субнормально примитивной подгруппы, мы докажем новый критерий сверхразрешимости группы.

Теорема. Если каждая субнормально примитивная подгруппа неединичной группы G либо имеет примарный индекс в G, либо обладает холловским нильпотентным добавлением в G, то G сверхразрешима.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $G \neq 1$.

Пусть R – минимальна нормальная подгруппа в G. Рассмотрим факторгруппу G/R. Пусть H/R – субнормально примитивная подгруппа в G/R. Тогда очевидно, H – субнормально примитивная подгруппа в G. Значит, согласно условию, H либо имеет примарный индекс в G, либо в G имеется такая холловская нильпотентная подгруппа T, что $HT = G$. В первом случае, поскольку $|G/R{:}H/R| = |G{:}H|$, подгруппа H/R имеет примарный индекс в G. Пусть имеет место второе. Тогда ввиду изоморфизма $TR/R \simeq T/T \cap R$ подгруппа TR/R нильпотентна и TR/R – холловская в G/R подгруппа. Понятно также, что $(H/R)(TR/R) = G/R$. Таким образом, условие теоремы переносится на G/R. А поскольку $|G/R| < |G|$, то в силу выбора группы G мы видим, что G/R – сверхразрешимая группа. Если в группе G кроме R имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа L, то как и выше $G/L \simeq N/L \cap N$ – сверхразрешимая группа и поэтому $G \simeq G/1 = G/L \cap R$ – сверхразрешимая группа. Это противоречит выбору группы G. Значит, R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Покажем, что R – абелева группа. Пусть $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \simeq A_2 \simeq \ldots \simeq A_t$ – простая группа. Предположим, что $t = 1$, т. е. $R = A_1$ – простая группа. Тогда если единичная подгруппа E является, очевидно, субнормально примитивной в R. Если E – субнормально примитивная подгруппа в G, то ввиду условия теоремы группа G разрешима. Значит R – абелева группа. Пусть E не является субнормально примитивной в G. Тогда $E = R \cap X$, где X – субнормально примитивная подгруппа в G. Пусть $|G:X| = p^{\alpha}$, где $\alpha \geq 1$. Тогда поскольку $X \subseteq RX$ и $|G:X| = |G:RX||RX:X| = |G:RX||R:R \cap X| = |G:RX||R:E|$, то R – p-группа. Значит, R – абелева группа. Пусть $G = TX$, где X – холловская нильпотентная подгруппа в G. Пусть $\pi = \pi(T)$. Поскольку $|G:X| = |T:T \cap X|$, то $|R| = |G:X|$ – π-число. Допустим, что $R \nsubseteq T$. Тогда $T \subset RT$. Но $|RT| = \dfrac{|R||T|}{|T \cap R|}$ – π-число, что противоречит холловости подгруппы T. Значит, $R \subseteq T$, и поэтому R – абелева группа. Пусть теперь $T > 1$ и пусть $M = A_1 \times \ldots \times A_{t-1}$. Тогда поскольку $MA_t = R$, то $R/M \simeq A_t / M \cap A_t = A_t/E \simeq A_t$. Значит, R/M – простая группа, и поэтому M – субнормально примитивная в R подгруппа. Допустим, что M – субнормально примитивная в G подгруппа. Понятно, что $N \nsubseteq M$, и поэтому согласно условию теоремы либо $G = TM$, где T – нильпотентная холловская в G подгруппа. Если имеет место первое, то поскольку $|G:M| = |G:R||R:M| = |G:R||A_t|$, мы видим, что A_t – p-группа. Значит, R – абелева p-группа. Пусть имеет место второе. Тогда $|G:M|$ – π-число, где $\pi = \pi(T)$. Значит, поскольку $|R| = |A_1||A_2| \ldots |A_t| = |A_t|^t$, то R – π-группа и поэтому как и выше мы видим, что $R \subseteq T$, и поэтому R – абелева группа.

Предположим теперь, что M не является субнормально примитивной подгруппой в G. Тогда в группе G имеется такая субнормально примитивная подгруппа X, что $X \cap R = M$. Ясно, что $R \nsubseteq X$, и поэтому либо $|G:X| = p^{\alpha}$ для некоторого простого числа p и натурального $\alpha \geq 1$, либо $G = TX$, где T – холловская нильпотентная подгруппа в G. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку $|G:X| = |G:RX| = |G:RX||A_t|$, то R – p-группа. Значит R – абелева группа. Если же имеет место второе, то как и выше видим, что $R \simeq T$. Значит R – абелева группа. Итак, в любом из случаев мы видим, что R – абелева р-группа для некоторого простого числа p.

Покажем, что $|R| = p$. Допустим, что это не так и пусть M – максимальная в R подгруппа. Предположим, что M является субнормально примитивной в G подгруппой. Тогда если индекс M в G примарен, то очевидно, G – p-группа, что противоречит выбору группы G. Пусть $G = TM$, где T – нильпотентная холловская в G подгруппа. Тогда $|G:M|$ – π-число, где $\pi = \pi(T)$. Но тогда $R \simeq T$, и поэтому $G = T$ – нильпотентная группа, что противоречит выбору группы G. Пусть M не является субнормально примитивной в G подгруппой. Тогда поскольку, очевидно, M – субнормально примитивная в R подгруппа, то $M = X \cap R$, где X – субнормально примитивная в G подгруппа. Понятно, что $N \nsubseteq X$, и поэтому либо X имеет нильпотентное холловское добавление T в G, либо индекс X в G примарен. Пусть имеет место первое. Тогда $|G:X|$ – π-число, где $\pi = \pi(T)$. А поскольку $|G:X| = |G:RX||RX:X| = |G:RX||R:R \cap X||G:RX|p$, то $p \in \pi$ и поэтому $R \subseteq T$. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является локальной формацией и N/R – сверхразрешимая группа, то $R \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть M – такая максимальная в G подгруппа, что $RM = G$. Тогда если $C = CG(R)$, то $C \cap M \lhd G$. Но R – единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Значит $C \cap M = 1$, и поскольку $C = C \cap RM = R(C \cap M) = R$. Поскольку $R \subseteq T$ и T – нильпотентная группа, то холловская p'-подгруппа $T_{p'}$ содержится в C. Значит T – силовская p-подгруппа в G. Последнее означает, что $|G:X| = p^{a}$, где $a \geq 1$. Если же индекс X в G примарен, то как и выше видим, что снова $|G:X|$ – степень числа p. Но в такой ситуации мы приходим к противоречию. Вновь полученное противоречие показывает, что $|R| = p$. Значит, R – циклическая группа. А поскольку N/R сверхразрешимая, то это означает, что N является сверхразрешимой группой, что противоречит выбору группы G. Теорема доказана.

Отметим также следующий важный частный случай доказанной теоремы.

Следствие [4]. Если каждая субнормально примитивная подгруппа неединичной группы G обладает холловским нильпотентным добавлением в G, то G сверхразрешима.

Список использованной литературы

1. **Huppert, B.** Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 1967. – 793 p.

2. **Чунихин, С. А.** Конечные группы / С. А. Чунихин, Л. А. Шеметков // Алгебра. Топология. Геометрия. 1969 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР). – М., 1971.

3. **Johnson, D. L.** A note on supersoluble groups / D. L. Johnson. Canad. J. Math. 23 (1971). – N 3. – P. 562–564.

4. **Косенок, Н. С.** Некоторые критерии сверхразрешимости конечных групп / Н. С. Косенок, В. Н. Рыжик // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2002. – № 18. – С. 68–73.