УДК 519.1
ББК 22.176
О-75

Автор-составитель Л. А. Воробей, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензенты: О. В. Титов, канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий инженер-программист ОАО «Конструкторское бюро системного программирования»;
Е. В. Легчекова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 5 от 17 июня 2017 г.

О-75 **Основы** дискретной математики : пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени / авт.-сост. Л. А. Воробей. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2020. – 68 с.
ISBN 978-985-540-530-7

Издание предназначено для студентов дневной и заочной форм получения образования I ступени специальности 1-28 01 01 «Экономика электронного бизнеса». В нем приводятся теоретические сведения по темам дисциплины «Основы дискретной математики», методические указания по решению типовых задач и задания для самостоятельной работы.

УДК 519.1
ББК 22.176

ISBN 978-985-540-530-7

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время применение математических моделей к анализу систем и процессов в природе и обществе является актуальным и своевременным.

Учебная дисциплина «Основы дискретной математики» является математической основой современных информационных технологий, рассматривается как язык и математические средства построения и анализа моделей в области проектирования автоматизированных систем управления и обработки информации. Знания и навыки, полученные при изучении основ дискретной математики, являются общепрофессиональными, формируют базовый уровень знаний экономиста-программиста для освоения других специальных дисциплин. Учебная дисциплина «Основы дискретной математики» способствует формированию у студентов навыков дискретного математического мышления, умения применять его в конкретных задачах проектирования обработки информации. Большое значение в рамках изучения этой учебной дисциплины уделяется ознакомлению студентов с такими классическими разделами дискретной математики как алгебра высказываний (и некоторые ее приложения), дискретный анализ, теория множеств, комбинаторика, теория неориентированных и ориентированных графов, которые являются основой многих других дисциплин математического, технического и экономического циклов. Изучая математическую логику и теорию множеств, студенты по сути знакомятся с современным математическим языком, являющимся, как известно, языком любой науки.

В пособие разобраны важнейшие теоретические вопросы и даны решения типовых задач. Многие задачи и упражнения предложены для самостоятельного решения.

Список рекомендуемой литературы включает наименование основных литературных источников, которые целесообразно использовать при изучении дисциплины.

1. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

1.1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества является первичным, поэтому формально не может быть определено. Создатель теории множеств *Георг Кантор* (1845–1918) предложил такое определение: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Объекты, из которых состоят множества, называются его *элементами*.

Множества обозначаются прописными латинскими буквами (A, B, C), а элементы множества – строчными буквами (a, b, c). Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A, запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A (значок $\in$ – стилизованная запись греческой буквы ε, являющейся первой буквой в слове «ελεμεητ» – элемент).

Два множества считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Пример 1.1. Рассмотрим множества $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогда $A = B$, так как оба множества состоят из одних и тех же элементов.

Способы задания множеств:

1. *Перечислением* в произвольном порядке всех его элементов. Названия всех элементов множества записываются в строчку, отделяются между собой запятой и заключаются в фигурные скобки. Например, {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье} – множество дней недели, $\{a, b, c, d\}$ – множество, состоящее из элементов *a, b, c, d*. При этом прядок перечисления не имеет значения.

Отметим, что следует различать элемент a и множество $\{a\}$, состоящее из одного этого элемента a. Такое различие диктуется различными соображениями, среди которых можно выделить неодинаковость их ролей в теории множеств. Очевидно, что с помощью перечисления можно задавать лишь конечные множества.

2. *Описанием характеристических свойств*, которыми обладают его элементы. При этом употребляется обозначение $A = \{x \mid P(x)\}$ «Множество *A* состоит из элементов *x* таких, что *x* обладает свойством *P*».

Например:

а) множество всех четных натуральных чисел;

б) множество всех действительных чисел, которые удовлетворяют двойному неравенству $3 < x \le 9$;

в) множество всех точек пространства R^3, расстояние до которых от данной точки *O* равно 4;

г) множество всех простых делителей числа 24;

д) множество сотрудников магазина «Продтовары».

Для приведенных примеров указанные множества математически можно записать так:

а) $\{x \mid x \in N, 2 \mid x \ (\text{ò. å. } 2 \text{ äåëèò } x)\}$,

б) $\{x \mid x \in R, x \in (3,9]\}$,

в) $\{x \mid |XO| = 4\}$,

г) $\{x \mid x - \text{простоечисло}, x \mid 24\}$,

д) $\{x \mid x - \text{сотрудник магазина «Продтовары»}\}$.

3. С помощью *порождающей процедуры*, описывающей способ получения элементов множества из уже полученных элементов или других объектов. При этом элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены такой процедурой.

Например, множество *Z* целых чисел можно задать с помощью процедуры, содержащей три правила:

а) $0 \in Z$; б) если $z \in Z$, то $z + 1 \in Z$; в) если $z \in Z$, то $-z \in Z$.

Универсальным называют множество, элементами которого являются все множества рассматриваемой задачи или теории. Обозначают универсальное множество буквой *U*.

Пример 1.2. Пусть *A* – множество гласных букв. Универсальное множество *U* – множество всех букв.

Множество, состоящее из одного элемента, называется *одноэлементным*. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают $\varnothing$. Все пустые множества считаются равными.

Если каждый элемент множества A содержится во множестве B, то A называется *подмножеством* множества B. При этом пишут $A \subseteq B$ (значок $\subseteq$ называют «включением»). Если при этом $A \neq B$, то пишут $A \subset B$ и говорят, что A – *собственное подмножество* в B. Считается, что пустое множество содержится в любом множестве. Таким образом, два множества равны тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. У любого непустого множества A существуют по крайней мере два подмножества – пустое множество $\varnothing$ и само A.

Пример 1.3. Напомним обозначения:
N – множество всех натуральных чисел,
Z – множество всех целых чисел,
Q – множество всех рациональных чисел,
R – множество всех действительных чисел,
C – множество всех комплексных чисел.
Тогда справедлива цепочка включений:
$\varnothing \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Конечным называется множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, состоящее из конечного (фиксированного) числа элементов. При этом число n называют *мощностью*, или *порядком*, множества X и пишут: $|X| = n$. Мощность пустого множества равна нулю. Два конечных множества, содержащих одинаковое число элементов, называют *равномощными*.

Пусть A – некоторое конечное множество. Совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном* и обозначается $P(A)$ или 2^A.

Пример 1.4. Пусть $A = \{1,2,3\}$. Тогда его булеан $2^A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \varnothing\}$. Как можно заметить, булеан трехэлементного множества состоит из 8 элементов.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Оказывается, разные бесконечные множества могут иметь различную мощность.

Бесконечное множество называется *счетным*, если его элементы можно занумеровать с помощью множества натуральных чисел.

Примерами счетных множеств могут служить множество натуральных чисел, множество четных (нечетных) чисел, множество целых чисел.

Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль»). Алеф – первая буква древнееврейского алфавита, индекс у алефа – номер ступени в иерархии бесконечностей. Таким образом, счетные множества – это «наименьшие» из всех бесконечных множеств.

Счетные множества обладают некоторыми свойствами, например, любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счётно.

Одним из важнейших открытий в теории множеств было открытие Георгом Кантором несчетных множеств.

Любое бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным*.

Примеры несчетных множеств: множество точек отрезка [0; 1], множество точек интервала $(a; b)$, множество всех действительных чисел, множество всех точек ограниченной или бесконечной плоскости, множество 2^N – множество всех подмножеств множества натуральных чисел.

Мощность множества действительных чисел называется *континуумом* и обозначается c .

Геометрически множества также очень удобно представлять с помощью *диаграмм Эйлера-Венна*. Их построение заключается в изображении универсального множества с помощью точек большого прямоугольника, а всех подмножеств универсального множества – с помощью точек кругов, расположенных внутри этого большого прямоугольника.

Если имеются некоторые множества, то из них можно получить новые с помощью определенных операций.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих, по крайней мере, одному из этих множеств: $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ или $x \in B \}$.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих одновременно и A, и B: $A \cap B =$ $= \{ x \mid x \in A$ и $x \in B \}$.

На рисунке 1 множество A состоит из точек фигуры, заштрихованной горизонтальными линиями, а множество B – из точек фигуры, заштрихованной вертикальными линиями. Множество $A \cup B$ будет состоять из точек всей заштрихованной фигуры, множество $A \cap B$ – из точек фигуры, покрытых «решеткой» горизонтальных и вертикальных линий.

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество тех и только тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B (рисунок 2): $A \setminus B = \{ x \mid x \in A$ и $x \notin B \}$.

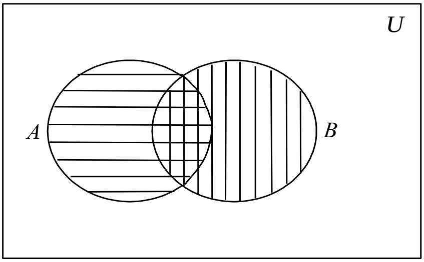


Рисунок 1 – **Объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$**

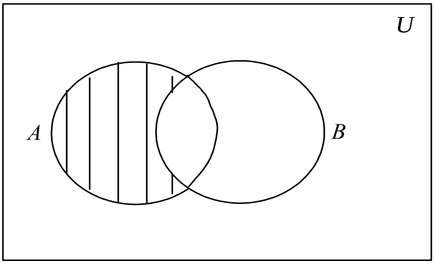


Рисунок 2 – **Разность $A \setminus B$**

Дополнением $\overline{A}$ (до универсального множества U) множества A называется множество всех тех элементов из U, которые не принадлежат A (рисунок 3): $\overline{A} = U \setminus A$.

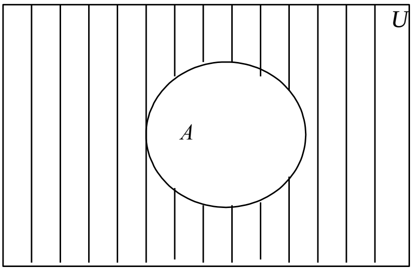


Рисунок 3 – **Дополнение** $\overline{A}$

Пример 1.5. Найти объединение, пересечение, разности, дополнения множеств $A = \{ a, b, c, d, e \}$, $B = \{ b, e, f, g, h, i \}$.

Решение

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$; $A \cap B = \{b, e\}$; $A \setminus B = \{a, c, d\}$; $B \setminus A = \{f, g, h, i\}$. Как видим, $A \setminus B \neq B \setminus A$. Поэтому делаем вывод, что разность двух множеств является операцией некоммутативной.

Заметим, что операции дополнения над множествами A и B выполненными быть не могут, так как универсальное множество не определено. Поэтому дополним условие.

Допустим, что $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, тогда

$\overline{A} = U \setminus A = \{f, g, h, i, j\}$, $\overline{B} = U \setminus B = \{a, c, d, j\}$

Пример 1.6. Допустим, что $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{2, 5, 6\}$ Требуется найти:

а) $\overline{B} \cup \overline{C}$; б) $\overline{B \cap C}$; в) $\overline{A} \cup C$; г) $B \cap \overline{C}$; д) $(A \setminus C) \cup \overline{B}$.

Решение

а) $\overline{B} = \{1, 2, 6\}$, $\overline{C} = \{1, 3, 4\} \Rightarrow \overline{B} \cup \overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

б) $B \cap C = \{5\} \Rightarrow \overline{B \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

в) $\overline{A} = \{4, 5, 6\} \Rightarrow \overline{A} \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$.

г) $B \cap \overline{C} = \{3, 4\}$.

д) $A \setminus C = \{1, 3\} \Rightarrow (A \setminus C) \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 6\}$.

Из определения операций объединения и пересечения следуют их свойства для произвольных множеств A, B, C:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность операции объединения).
2. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность операции пересечения).
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность операции объединения).
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность операции пересечения).
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность операции пересечения относительно объединения).
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность операции объединения относительно пересечения).
7. $A \cup \varnothing = A$ (свойство нуля).
8. $A \cap \varnothing = \varnothing$ (свойство нуля).

Декартовым (прямым) произведением $A \times B$ множества A на множество B называется множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат A, а вторые элементы – B, т. е. $A \times B =$ $= \{ (x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B \}$.

Пример 1.7. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$.
Тогда $A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$,
$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$.

Как видим, $A \times B \neq B \times A$. Это значит, что операция образования декартова произведения двух множеств свойством коммутативности не обладает.

Введенное в рассмотрение ранее декартово (прямое) произведение двух множеств естественным образом может быть обобщено на произвольное число множеств:

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i,\ i = \overline{1,n} \},$$

т. е. $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – множество всевозможных векторов (наборов) длины n, причем i-й элемент x_i в этих наборах принадлежит множеству $X_i \left(x_i \in X_i \right)$, $i = \overline{1,n}$.

Является справедливым равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|,$$

т. е. мощность прямого произведения множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ равна произведению их мощностей.

Пример 1.8. Пусть $X_1 = X_2 = R$ – множества точек двух числовых осей. Тогда декартовым произведением $X_1 \times X_2 = R^2$ является множество точек плоскости. Каждой точке плоскости соответствует пара точек (проекций) на числовых осях.

Теорема (формула ***включений-исключений***). Пусть A, B, и C – конечные множества. Тогда справедливы следующие формулы:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Замечание. При необходимости можно вывести аналогичную формулу для произвольного числа множеств.

Пример 1.9. Сколько натуральных чисел из первых 100 не делятся ни на одно из чисел 2, 3 и 5?

Решение

Введем обозначения:

A – множество натуральных чисел, делящихся на 2;
B – множество натуральных чисел, делящихся на 3;
C – множество натуральных чисел, делящихся на 5.

Тогда количество чисел, делящихся на 2, равно 50. Аналогично находим $|B|=33$, $|C|=20$. Количество чисел, делящихся на 2 и 3 одновременно, равно $|A\cap B|=16$, количество чисел, делящихся одновременно на 2 и 5, а так же на 3 и 5, соответственно, равны $|A\cap C|=10$, $|B\cap C|=6$. Количество чисел, делящихся сразу на все три множителя, $|A\cap B\cap C|=3$.

Теперь можем определить число элементов, делящихся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5:

$$|A\cup B\cup C|=50+33+20-16-10-6+3=74.$$

Окончательно, количество натуральных чисел, которые не делятся ни на одно их чисел 2, 3 и 5, равно $X=100-74=26$.

1.2. Бинарные отношения

Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества. Среди отношений являются наиболее изученными и чаще всего используемыми так называемые унарные и бинарные отношения.

Унарные, т. е. одноместные отношения обычно отражают наличие какого-либо определенного свойства (признака) R у элементов множества X (например, «быть красным» на множестве воздушных шаров). Подмножество всех таких элементов x из множества X, которые отличаются данным признаком R, называется унарным отношением R, т. е. $x\in R$ и $R\subseteq X$.

Бинарные, т. е. двухместные отношения, обычно используются для определения каких-либо взаимосвязей, с помощью которых характеризуются пары элементов во множестве X. Например, могут быть заданы следующие бинарные отношения:

1) между числами: равно, неравно, меньше, не меньше, больше, не больше, делит;

2) между людьми: жить в одном селе, быть старше, быть дочерью, работать в одной организации, быть подчиненным;

3) между странами: сотрудничать, не сотрудничать, быть одинаковыми в своем развитии.

Некоторым бинарным отношениям присвоены специальные названия и обозначения («меньше» – $<$, «параллельно» – $\|$, «отношение подобия» – $\sim$ и т. п.).

Пусть X и Y – два непустых множества.

Бинарным отношением R, определенным на множествах X и Y, называется всякое подмножество их декартового произведения, т. е. $R \subseteq X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Если элементы x и y находятся в отношении R, то пишут $(x, y) \in R$, или xRy. При этом x и y называют *компонентами* отношения.

Пример 1.10. Пусть X – множество слов русского языка, Y – множество слов английского языка. Тогда бинарное отношение $R \subseteq X \times Y$ можно рассматривать как русско-английский словарь.

Над бинарными отношениями, как над множествами, определены все теоретико-множественные операции. Например, если $x(R \cup S)y$, то или xRy, или xSy. В частности, если R = «x является отцом y», а S = «x является матерью y», $R \cup S$ = «x является родителем y».

Можно определить и другие операции:

• *обратное отношение* $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$, $R^{-1} \subseteq Y \times X$;

• *композиция отношений* $R_1 \circ R_2$. Пусть $R_1 \subseteq X \times Y$, $R_2 \subseteq Y \times Z$ – два бинарных отношения. Тогда композицией этих отношений называется отношение $R = R_1 \circ R_2 \subseteq X \times Z$, которое состоит только из тех пар $(x, z) \in R$, для которых найдется элемент $y \in Y$, такой что $(x, y) \in R_1$ и $(y, z) \in R_2$. Например, если $R_1 = \{(1,2), (2,1), (1,3)\}$, $R_2 = \{(1,1), (3,1), (2,1)\}$, то $R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (2,1)\}$.

Особую роль в теории отношений играют бинарные отношения, заданные на элементах одного множества. В случае если $X = Y$, говорят, что отношение R определено на множестве X , при этом

$R \subseteq X^2$, где X^2 – декартов квадрат на множестве X. Задать такие отношения можно *явно*, как мы делали это до сих пор (т.е. перечислив все пары элементов, связанных отношением). Кроме того, отношения на множестве можно задать *графически* или в *матричной* форме.

При изображении отношения графически элементам множества сопоставляют точки плоскости, а парам $(x, y) \in R$ – стрелки (дуги), идущие из x в y.

Матрица бинарного отношения $R \subseteq X^2$ определяется следующим образом: ij-элемент матрицы равен 1, если $x_i R y_j$ и 0, если иначе.

Пример 1.11. Пусть $X = \{1,2,3,4,5\}$. Задать в явном виде (т. е. перечислением пар) и матричным способом отношение $R \subseteq X^2$, если R означает – «быть не меньше». Построить график этого отношения.

Решение

Отношение R как множество будет содержать все такие пары (x, y) элементов x, y из X, что $x \geq y$: $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \geq y\}$.

Тогда R = {(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(4,3),(5,3),(4,4),(5,4),(5,5)} (рисунки 4, 5).

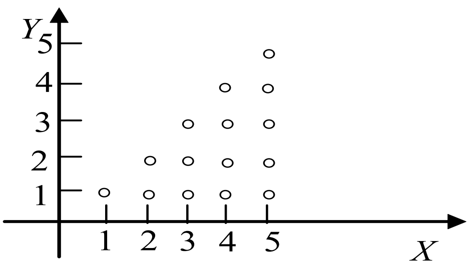


Рисунок 4 – **График данного отношения**

R	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0
5	1	1	1	1	1

Рисунок 5 – **Матрица отношения**

1.3. Отношение эквивалентности

Выделяют некоторые специальные типы отношений на множестве. Пусть $R \subseteq X^2$.

Бинарное отношение R называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in R$ для всех $x \in X$.

Бинарное отношение R называется *симметричным*, если $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $(y, x) \in R$.

Бинарное отношение R называется *антисимметричным*, если из того, что $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, следует, что x совпадает с y.

Бинарное отношение R называется *транзитивным*, если из того, что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, следует, что $(x, z) \in R$.

Пример 1.12. Пусть R – отношение подобия, заданное на множестве треугольников.

Это отношение рефлексивно, так как каждый треугольник подобен сам себе.

Это отношение симметрично, так как из того что треугольник ΔABC подобен треугольнику ΔLMN, следует, что треугольник ΔLMN подобен треугольнику ΔABC.

Отношение подобия неявляется антисимметричным, т. к. если из того что $\Delta ABC \sim \Delta LMN$ и $\Delta LMN \sim \Delta ABC$ совсем не следует, что эти треугольники совпадают.

Отношение подобия транзитивно, т. к. если ΔABC подобен ΔLMN, а ΔLMN, в свою очередь, подобен треугольнику ΔPQR, то треугольники ΔABC и ΔPQR подобны.

Пример 1.13. Пусть задано бинарное отношение R = «x является матерью y». Это отношение не является ни рефлексивным, ни симметричным, ни транзитивным.

Бинарное отношение R называется *отношением эквивалентности,* если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначается символом «~».

Пример 1.14. Отношение $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 6)\}$, определенное на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ является, как можно проверить, рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, оно является отношением эквивалентности.

Примеры отношений эквивалентности: быть параллельными для прямых, быть подобными для треугольников, быть равными для функций, выражений и т. п.

Замечание. Если от бинарного отношения потребовать только рефлексивность и симметричность, а транзитивности не требовать, то получим отношение *толерантности* (два элемента не сходны, а почти сходны). Примером такого отношения может служить отношение знакомства.

1.4. Отношение порядка

Бинарное отношение R называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Обозначается символом «$\prec$».

Примеры отношений порядка: отношение включения «$\subseteq$» для множеств, отношение «$\le$» на множестве действительных чисел, отношение «x делит y» на множестве N всех натуральных чисел.

Если на множестве X задано отношение порядка R, то множество называется *упорядоченным*. Но, являясь отношением порядка, различные отношения упорядочивают множество по-разному. Отношение порядка на множестве A, для которого любые два элемента сравнимы (т. е. либо xRy, либо yRx $\forall x, y \in X$), называется отношением *линейного порядка*. Если во множестве есть элементы, несравнимые между собой, то говорят, что задан *частичный порядок*. Например, отношение «$\le$» задает линейный порядок, а схема организации подчинения в учреждении определяет частичный порядок.

Замечание. В упорядоченном множестве можно указать наибольший и наименьший, минимальный и максимальный элементы.

Элемент x^* упорядоченного множества X называется *наибольшим*, если $x \prec x^*$ для всех элементов $x \in X$. Элемент a упорядоченного множества X называется *максимальным*, если $x \prec a$ для всех $x \in X$, с которыми элемент a сравним.

Любой наибольший элемент является максимальным, но не всякий максимальный элемент является наибольшим.

Аналогично определяются наименьший и минимальный элементы.

Для графического представления упорядоченных множеств используют *диаграмму Хассе*. Она строится следующим образом: каждый элемент упорядоченного множества изображают точкой на плоскости, причем если $a \prec b$, то точку, соответствующую элементу a располагают ниже точки, соответствующей элементу b. Точки, отвечающие элементам a и b, соединяют дугой, если $a \prec b$ и не существует такого элемента c, что $a \prec c \prec b$.

Пример 1.15. Пусть на множестве натуральных чисел задано отношение делимости R = «x делит y тогда и только тогда, когда y делится без остатка на x». Изобразим диаграммы Хассе для упорядоченных множеств делителей чисел 2, 6, 30.

Решение

У двойки всего два делителя – 1 и 2, делители шестерки – 1, 2, 3 и 6, а делители числа 30 – 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30. Следовательно, диаграммы Хассе будут иметь вид, приведенный на рисунке 6.

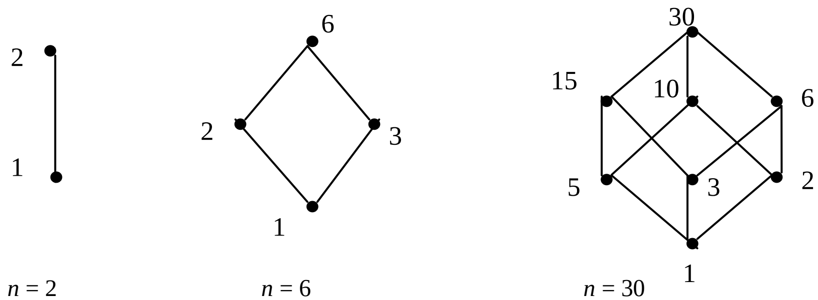


Рисунок 6 – **Диаграмма Хассе**

Упражнения

Упражнение 1. Допустим, что $X = \{2,3,5\}$, а $Y = \{x \mid x = yz; y \neq z; y, z \in X\}$. Определить списком множество Y.

Упражнение 2. Определить из следующих ниже соотношений те, которые не являются верными. Указать причину.

а) $y \in \{3, b, y\}$;

б) $5 \in \{2, \{3,5\}, 7\}$;

в) $x \in \{4, 5, \cos x\}$;

г) $b \in \{b\}$;

д) $\{b\} \in b$;

е) $b = \{b\}$.

Упражнение 3. Определить из следующих ниже множеств A и B те, из которых одно является подмножеством другого.

а) $A = \{1, 2, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 7\}$;

б) $A = \{ a, b, c, f \}$, $B = \{ a, f, c \}$;

в) $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{3, 8\}$;

г) $A = (-\infty; 7]$, $B = (-\infty; 10]$;

д) $A = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \le 1\}$, $B = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \le 4\}$;

е) $A = \{ x \mid x -$ студент БТЭУ$\}$, $B = \{ y \mid y -$ студент ФЭУ$\}$.

Упражнение 4. Пусть $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$ и $B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$. Задать множества A, B с помощью перечисления своих элементов, образовать множества $A \cup B$ и $A \cap B$, найти $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Упражнение 5. Пусть $A = \{x \mid x - 2 < 6\}$ и $B = \{x \mid 2x - 7 > 3\}$. Образовать множества $A \cup B$ и $A \cap B$, найти $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Упражнение 6. Пусть даны множества A_1, A_2:

а) $A_1 = [-2, 7]$, $A_2 = [3, 8]$;

б) $A_1 = (-\infty, 4)$, $A_2 = [4, 6]$;

в) $A_1 = (0,1]$, $A_2 = [2, 5)$.

Требуется: A

1) определить множества $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$;

2) изобразить множества A_1, A_2, $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ на числовой прямой.

Упражнение 7. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ – универсальное множество, $A = \{x_1, x_4, x_8\}$, $B = \{x_2, x_4, x_7, x_8\}$ – подмножества множества X. Требуется:

а) определить объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ подмножеств A и B;

б) определить разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$ подмножеств A и B;

в) определить дополнения $\overline{A}$ и $\overline{B}$ подмножеств A и B;

г) определить подмножества $\overline{A \cap B} \setminus A$, $\overline{A \cup B} \setminus B$, $A \cap \overline{B}$.

Упражнение 8. Пусть X – универсальное множество, A, B, C – множества из X:

1) X – множество магазинов некоторого объединения в г. Гомеле, A – множество магазинов этого объединения, находящихся на территории Центрального района, B – множество магазинов объединения по продаже продуктов питания, C – множество магазинов объединения по продаже женской одежды;

2) X – множество сотрудников некоторой фирмы по продаже и обслуживанию компьютеров, A – множество сотрудников этой фирмы, имеющих водительские права, B – множество сотрудников фирмы, занимающихся спортом, C – множества сотрудников отдела по реализации компьютеров.

В каждом из описанных случаев указать содержательный смысл (характеристическое свойство) следующих множеств:

а) $\overline{A} \cup B$;

б) $\overline{A \cap B} \setminus C$;

в) $\overline{A \cap C}$;

г) $\overline{A \cup C} \setminus B$;

д) $\overline{(A \cap \overline{B})} \setminus (A \setminus \overline{C})$.

С помощью диаграмм Венна изобразить множества а) – д), представив множества A, B, C в виде пересекающихся кругов.

Упражнение 9. Пусть A и B – произвольные подмножества универсального множества X. Проиллюстрировать на примерах конкретных множеств и с помощью диаграмм Эйлера-Венна справедливость следующих тождеств:

а) $A \cup (A \cap B) = A$; б) $A \cap (A \cup B) = A$;

в) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$; г) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

Упражнение 10. Пусть U={множество всех животных},

M = {множество всех млекопитающих},

D = {множество всех собак},

C = {множество всех кошек},

L = {множество всех овчарок}.

Проверить истинность утверждений:

а) $L \subset D \subset M \subset U$; б) $C \subset D \subset M \subset U$; в) $C \cap D = \varnothing$;

г) $D \setminus L \subset C$; д) $U \setminus M \subset D$; е) $D \setminus C = D$.

Упражнение 11. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Определить следующие множества:

а) $A \cup C$; б) $A \cap B$;

в) $A \cap (B \cup C)$; г) $(A \cap B) \cup C$;

д) $\overline{A \cap B}$; е) $\overline{A} \cap \overline{B}$;

ж) $A \oplus B$; з) $A \setminus B$.

Упражнение 12. Доказать следующие законы для разностей:

а) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Упражнение 13. Доказать равносильности:

а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; г) $\overline{A \cap \overline{\overline{B}}} \cup B = \overline{A} \cup B$.

Упражнение 14. Пусть $X_1 = \{0,1,2\}$, $X_2 = \{a,b\}$. Найти $X_1 \times X_2$, $X_2 \times X_1$, X_1^2.

Упражнение 15. Доказать, что $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Упражнение 16. Выполняется ли для множеств $A = \{3,5,7,8,9\}$, $B = \{8,9\}$ и $C = \{0,1,2\}$ равенство $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$?

Упражнение 17. Выписать явно отношение $R \equiv x \mid y$ «x делит y», определенное на множестве $A = \{2, 3, 6, 10, 15\}$. Записать матрицу этого отношения.

Упражнение 18. На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ различными способами задать отношения R_1 = «меньше или равно» и R_2 = «равно».

Упражнение 19. Найти $R \cap S$, $R \cup S$, $R^{-1} \cap S$ для отношений $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$ и $S = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,3)\}$.

Упражнение 20. Для отношения $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2)\}$ найти R^{-1}, $R \circ R$ и $R^{-1} \circ R$.

Упражнение 21. Найти композицию $R \circ R$ для отношения $R =$ = «*x* взаимно просто с *y*», определенного на множестве $A = \{3, 4, 6, 8, 9\}$.

Упражнение 22. Убедиться в том, что бинарное отношение $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (7, 7)\}$, определенное на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, является отношением эквивалентности.

Упражнение 23. Установить, является ли отношение *S* рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным, если $S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$.

Упражнение 24. Установить, является ли отношение *R* = «*x* взаимно просто с *y*», определенное на множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, рефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным.

Упражнение 25. Установить, является ли эквивалентным отношение *R* = «*x* знаком с *y*», определенное на множестве студентов университета.

Упражнение 26. На множестве $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ задано отношение «*x* делитель *y*». Показать, что это отношение упорядочивает множество *A*. Чем этот порядок отличается от того, который устанавливается во множестве *A* при помощи отношения «больше»?

Упражнение 27. На множестве $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15\}$ задано отношение порядка $R \equiv x \mid y =$ «*x* делит *y*». Построить диаграмму Хассе. Указать наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.

Упражнение 28. На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ задано отношение порядка *R* = «*x* кратно *y*». Построить диаграмму Хассе. Указать наименьший, наибольший, максимальный и минимальный элементы.

2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

2.1. Перестановки, размещения, сочетания

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов, элементов. Различают три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками из n элементов называют соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов. Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$(0! = 1)$$

Например, $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Размещениями называют множества, составленные из n элементов по k $(n \geq k)$, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k находят по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Например, $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Сочетаниями из n элементов по k $(n \geq k)$ называют соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга, по крайней мере, одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Например, $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Для C_n^k полезно использовать свойство сочетаний $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Число различных перестановок из n элементов, среди которых k_1 первого вида, k_2 – второго, …, k_m – m-го вида, определяется по формуле

$$P_n(k_1,k_2,...,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

Число размещений из n элементов по k с повторениями находят по формуле

$$\overline{A}_n^k=n^k.$$

Число сочетаний из n по k элементов с повторениями определяется по формуле

$$\overline{C}_n^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Пример 2.1.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 5 книг?

Ответ: $P_5=5!=120$.

2. Сколькими способами можно расставить на полке 3 книги из имеющихся пяти?

Ответ: $A_5^3=5\cdot 4\cdot 3=60$.

3. Сколькими способами можно составить дозор из 3 солдат и 1 офицера, если имеются 80 солдат и 3 офицера?

Ответ: $N=C_3^1\cdot C_{80}^3=246480.$

4. Сколькими способами можно составить наборы из 7 пирожных, если в продаже имеются 4 сорта?

Ответ: $C_{4+7-1}^7=C_{10}^7=120.$

2.2. Метод рекуррентных соотношений

Часто решение комбинаторных задач можно свести к решению аналогичных задач меньшей размерности с помощью некоторых соотношений, тем самым решение сложной задачи можно получить, находя последовательно решения более легких задач.

Формула вида $a_n=F(a_{n-1},a_{n-2},...,a_1)$ называется *рекуррентным соотношением* между элементами последовательности чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Оно позволяет по известным значениям чисел $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ найти a_n.

Например, рекуррентной является формула $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое формулой *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n .$$

При этом коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ называются *биномиальными коэффициентами*. Из элементарной математики хорошо известны частные случаи этой формулы – формулы сокращенного умножения.

Поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов в формуле бинома Ньютона, равны.

Пример 2.2. Рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ задает так называемые числа Фибоначчи. Зная $a_1 = 1$ и $a_2 = 1$, можно найти $a_3 = 2$ и т. д.: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

Иногда удается получить из рекуррентного соотношения общую формулу для вычисления a_n по номеру n. Например, будем искать формулу для вычисления числа Фибоначчи в виде $a_n = \lambda^n$. Тогда из рекуррентного соотношения имеем:

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

или

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,\ (\lambda \neq 0),$$

откуда $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Следовательно, общим решением будет линейная комбинация

$$a_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 \left((1+\sqrt{5})/2\right)^n + C_2 \left((1-\sqrt{5})/2\right)^n .$$

Из начальных условий $(a_1 = a_2 = 1)$ находим значения констант C_1 и C_2: $C_1 = 1/\sqrt{5},\ C_2 = -1/\sqrt{5}$.

Окончательно, искомая формула будет иметь вид:

$$a_n = \left[\ \left((1+\sqrt{5})/2\right)^n - \left((1-\sqrt{5})/2\right)^n\ \right]/\sqrt{5} .$$

Это выражение известно как *формула Бине*.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать общий прием *решения линейных рекуррентных соотношений*, напоминающий соответствующий прием из теории дифференциальных уравнений.

Теорема. Пусть имеется линейное рекуррентное соотношение

$$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_k a_{n-k} = 0,$$

где все коэффициенты p_i – постоянные числа, и пусть λ – корень характеристического уравнения

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \dots + p_k = 0.$$

Тогда:

1) числа вида $C\lambda^n$ ($C = \text{const}$) удовлетворяют данному рекуррентному соотношению;

2) если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – простые корни характеристического уравнения, то общее решение соотношения имеет вид:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n,$$

где $C_i = const$;

3) если λ_i – корень кратности r_i, $i = 1, 2, \dots, s$, то общее решение имеет вид:

$$a_n = \sum_{i=1}^{s}\left(C_{i1} + C_{i2}n + C_{i3}n^2 + \dots + C_{ir_i}n^{r_i-1}\right)\lambda_i^n,$$

где $C_{ij} = const$.

Упражнения

Упражнение 1. Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея среди членов клуба, включающего 8 студентов последнего курса, 10 студентов предпоследнего курса, 15 второкурсников и 20 первокурсников, если:

а) отсутствуют какие-либо ограничения?

б) президентом должен быть студент последнего курса?

в) студент последнего курса не может быть вице-президентом?

г) первокурсники могут быть избраны только на должность секретаря?

Упражнение 2. У профессора в группе 20 студентов. Согласно критерию, известному лишь ему одному, он решил поставить две «10», три оценки «7», десять оценок «5», три оценки «4» и две оценки «2». Сколькими способами он может поставить оценки студентам?

Упражнение 3. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

Упражнение 4. В технической библиотеке имеются книги по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Сколько наборов из четырех заказов можно составить по 16 разделам науки?

Упражнение 5. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

Упражнение 6. В классе 40 человек. Играют в баскетбол 26 человек, занимаются плаванием 25, ходят на лыжах 27, одновременно, плаванием и баскетболом 15, баскетболом и лыжами 16, плаванием и лыжами 18 человек. Один из учащихся освобожден от занятий по физкультуре. Сколько человек занимается всеми видами спорта? Сколько человек занимается только одним видом спорта?

Упражнение 7. В период отпуска 80% дней была теплая погода, 80% дней было облачно и 60% дней было ветрено. Каково минимальное число дней в процентах, когда одновременно было тепло, облачно и ветрено?

Упражнение 8. Экзамены по физике, математике и химии сдавали 75 студентов. Экзамен по физике успешно сдали 51 человек, по химии – 40, по математике – 35. По физике или химии сдали экзамены 61 студент, 60 – по физике или математике, 53 – по химии или математике, а 7 студентов не сдали ни одного экзамена. Сколько студентов сдали все три экзамена?

Упражнение 9. Известно, что из 200 сотрудников института 52 человека посетили Италию, 62 – Германию, 90 человек – Францию;

Италию и Германию – 3 человека. Италию и Францию – 4, Германию и Францию – 10, все три страны – 2 человека. Сколько сотрудников посетило: а) только Италию? б) только Францию?

Упражнение 10. В группе 30 студентов, из них 18 увлекаются физикой, а 17 – химией. Каким может быть число студентов: 1) увлекающихся двумя предметами? 2) увлекающихся хотя бы одним предметом?

Упражнение 11. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. Результаты таковы: задачу по алгебре решили 20 учащихся, по геометрии – 18, по тригонометрии – 18, по алгебре и геометрии – 7, по алгебре и тригонометрии – 8, по геометрии и тригонометрии – 9. Известно также, что трое не справились ни с одной задачей. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько решили ровно две задачи?

Упражнение 12. Пусть A – подмножество натуральных чисел, каждый элемент множества A есть число, кратное или 2, или 3, или 5. Найти число элементов во множестве A, если среди них 70 чисел, кратных 2; 60 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15 и 20 чисел, кратных 30.

Упражнение 13. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, «отлично» получили: по математике – 48 абитуриентов, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

3. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

3.1. Высказывания. Простейшие логические операции

Высказыванием называется любое повествовательное предложение, о котором вполне определенно можно сказать истинно оно или ложно.

Например:

- «$2\times 2=5$» – ложное высказывание;
- «$21<23$» – истинное высказывание;
- «Который час?» – высказыванием не является;
- «Город X – столица страны Y» – высказыванием не является.

Следовательно, высказывание – величина, которая может принимать только одно из двух значений: «истина» или «ложь», которые сокращенно обозначают «*И*» или «*Л*» (1 и 0) соответственно.

Высказывания обычно обозначают буквами латинского алфавита – большими или маленькими, с индексами или без.

Различают простые или сложные (составные) высказывания. Сложные высказывания получают из простых с помощью логических операций. Рассмотрим основные из них.

Отрицанием высказывания x называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда x – ложно.

Обозначение: $\bar{x}$.

Отрицание есть операция, которая соответствует союзу «не».

Конъюнкцией высказываний x и y называется высказывание истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначение: $x\wedge y$.

Конъюнкция есть операция, которая соответствует союзу «и».

Дизъюнкцией высказываний x и y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания.

Обозначение: $x\vee y$.

Дизъюнкция есть операция, которая соответствует союзу «или».

Импликацией высказываний x и y называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда x – истина, а y – ложно. Другими словами, импликация утверждает: из лжи может следовать все, что угодно, из истины всегда следует только истина.

Обозначение: $x\Rightarrow y$.

Импликация есть операция, которая соответствует связке «если …, то…». Высказывание x называется посылкой, а y – следствием (заключением).

Эквиваленцией высказываний x и y называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда x и y принимают одинаковые значения.

Обозначение: $x \sim y$.

Эквиваленция есть операция, которая соответствует связке «x тогда и только тогда, когда y», «x является необходимым и достаточным для y».

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций и составлять формулы. Например,

- *штрих Шеффера* или антиконъюнкция: $x \mid y = \overline{x \wedge y}$
- *стрелка Пирса* или антидизъюнкция: $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$
- *сумма по модулю два* или антиэквиваленция: $x \oplus y = \overline{x \sim y}$.

Удобной формой представления действий логических операций являются таблицы истинности:

x	y	$\bar{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \sim y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

.

Для упрощения формул принято опускать внешние скобки, а также все те скобки, которые становятся необязательными, если считать, что логические операции выполняются в следующем порядке: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \sim$.

Пример 3.1. Вычислить истинностное значение формулы $(\overline{P} \sim Q \vee R) \Rightarrow S \wedge Q$ на наборе $(P, Q, R, S) = (1, 1, 0, 1)$.

Решение

Последовательность выполнения действий будет следующая:

1) $Q \vee R = 1 \vee 0 = 1$;

2) $\overline{P} \sim Q \vee R = \overline{1} \sim 1 = 0 \sim 1 = 0$;

3) $S \wedge Q = 1 \wedge 1 = 1$;

4) $(\overline{P} \sim Q \vee R) \Rightarrow S \wedge Q = 0 \Rightarrow 1 = 1$.

Замечание. Часто требуется вычислить значение формулы на всех возможных интерпретациях переменных. Пусть формула зависит от n переменных. Т. к. каждая переменная принимает одно из двух значений (1 или 0), то число различных возможных наборов равно 2^n.

3.2. Правила преобразования формул

Пусть X и Y – две формулы, зависящие от одного и того же набора высказываемых переменных. Формулы X и Y называются равносильными, если на любом наборе истинностных значений входящих в них переменных он принимают равные значения.

Обозначение: $X \equiv Y$.

Пример 3.2. Проверить равносильность формул: $A = x \Rightarrow y$, $B = x \wedge \overline{y} \Rightarrow (\overline{x} \vee y)$.

Решение

Составим таблицы истинности для формул A и B:

x	y	$x \Rightarrow y$	$\overline{y}$	$x \wedge \overline{y}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$x \wedge \overline{y} \Rightarrow (\overline{x} \vee y)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1
		A					B

$\Rightarrow A \equiv B$.

Основные равносильности:

1. Закон идемпотентности: $x \wedge x \equiv x$, $x \vee x \equiv x$.

2. Закон коммутативности: $x \wedge y \equiv y \wedge x$, $x \vee y \equiv y \vee x$.

3. Закон ассоциативности: $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$,
$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.

4. Закон дистрибутивности: $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

5. Закон двойного отрицания: $\bar{\bar{x}} \equiv x$.

6. Закон поглощения: $x \wedge (x \vee y) \equiv x$, $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.

7. Закон де Моргана: $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

8. Закон склеивания (расщепления): $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \equiv x$,
$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$.

9. Действия с логическими константами 0 и 1:
$x \vee \bar{x} \equiv 1$, $x \vee 0 \equiv x$, $x \vee 1 \equiv 1$
$x \wedge \bar{x} \equiv 0$, $x \wedge 0 \equiv 0$, $x \wedge 1 \equiv x$.

10. $x \sim y \equiv (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$.

11. $x \Rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y \equiv \overline{x \wedge \bar{y}}$.

Формула логики высказываний называется:

• *общезначимой* (тождественно истинной, тавтологией), если во всех своих интерпретациях она принимает значение «истина»;

• *невыполнимой* (тождественно ложной, противоречием), если во всех своих интерпретациях она принимает значение «ложь»;

• *нейтральной*, если она не является ни тавтологией, ни противоречием;

• *выполнимой*, если она является тавтологией или нейтральной;

• *необщезначимой*, если она невыполнимая или нейтральная.

Пример 3.3. Упростить формулу $(x \vee y) \wedge (\bar{z} \Rightarrow x) \wedge (z \vee \bar{x})$, используя правила равносильностей.

Решение

$$(x \vee y) \wedge (\bar{z} \Rightarrow x) \wedge (z \vee \bar{x}) \overset{11}{\equiv} (x \vee y) \wedge (\bar{\bar{z}} \vee x) \wedge (z \vee \bar{x}) \overset{5}{\equiv}$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee \bar{x}) \overset{8}{\equiv} (x \vee y) \wedge z.$$

Пример 3.4. Определить, является ли данная формула тавтологией, противоречием, нейтральной, выполнимой, необщезначимой

$$((A \sim B) \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow A \wedge B)\,?$$

Решение

Составим таблицу истинности для данной формулы:

0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

Так как в выделенном столбце присутствуют и «1» и «0», то данная формула является нейтральной, выполнимой и необщезначимой.

Упражнения

Упражнение 1. Найти среди следующих предложений высказывания:

а) Который час?

б) Целое число 1 есть наименьшее положительное целое число.

в) Берегись автомобиля!

г) Если $x = 3$, то $x^2 = 6$.

Указать их истинностные значения.

Упражнение 2. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p: Путешествие на Марс является дорогостоящим.

q: Я совершу путешествие на Марс.

r: У меня есть деньги.

Записать в символической форме такие высказывания:

а) У меня нет денег и я не совершу путешествие на Марс.

б) У меня нет денег и путешествие на Марс является дорогостоящим или я совершу путешествие на Марс.

в) Неверно, что у меня есть деньги и я полечу на Марс.

г) Путешествие на Марс не является дорогостоящим и я полечу на Марс или путешествие на Марс является дорогостоящим и я не полечу на Марс.

Упражнение 3. Пусть p, q и r обозначают следующие высказывания:

p: Эта игра очень трудна.

q: Я играю в шахматы.

r: Игра в шахматы требует времени.

Интерпретировать следующие выражения как обычные высказывания:

а) $q \wedge r$;

б) $\overline{p} \vee \overline{q}$;

в) $(p \vee r) \wedge q$;

г) $p \wedge q \wedge r$.

Упражнение 4. Построить таблицы истинности для каждого из высказываний в упражнениях 2 и 3.

Упражнение 5. Встретились скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но ни у одного нет волос того цвета, на который указывает его фамилия», – заметил черноволосый. «Ты прав», – сказал Белов. Определить, какой цвет волос у художника.

Упражнение 6. Установить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно:

1) что если A участвовал, то и B участвовал;

2) если B участвовал, то или C участвовал, или A не участвовал;

3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал;

4) если D участвовал, то A тоже участвовал.

Упражнение 7. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: «Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский». Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

4. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

4.1. Определение и способы задания булевых функций

Булевой функцией от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется отображение, определенное на множестве n-элементных последовательностей, состоящих из нулей и единиц, и принимающее два возможных значения – ноль или единица.

Существует четыре булевых функции одной переменной:

1) $f_1(x) \equiv 0$ – константа ноль;

2) $f_2(x) \equiv 1$ – константа единица;

3) $f_3(x) \equiv x$ – тождественная функция;

4) $f_4(x) \equiv \bar{x}$ – инверсия.

Очевидно, что существует 2^n различных n-элементных последовательностей из нулей и единиц, и т. к. на каждом наборе функция может принимать значение 0 или 1, то число всех булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}. Таким образом, существует 16 булевых функций от двух переменных (назовем их элементарными функциями). Значения этих функций приведены в таблице:

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
x_1	x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \leftarrow x_2}$	x_1	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

		f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$\bar{x}_2$	$x_2 \rightarrow x_1$	$\bar{x}_1$	$x_1 \Rightarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Все эти функции имеют специальные названия:

1) f_1 и f_{16} – константы ноль и единица;

2) $f_2 = x_1 \wedge x_2$ – конъюнкция;

3) $f_8 = x_1 \vee x_2$ – дизъюнкция;

4) $f_{14} = x_1 \Rightarrow x_2$ – импликация;

5) $f_{10} = x_1 \sim x_2$ – эквиваленция;

6) $f_{15} = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ – штрих Шеффера (антиконъюнкция, «не-и»);

7) $f_9 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ – стрелка Пирса (антидизъюнкция, «не-или»);

8) $f_7 = x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2}$ – сумма Жегалкина (антиэквиваленция, сумма по модулю 2);

9) $f_{12} = x_2 \Rightarrow x_1$ – конверсия;

10) f_3 и f_5 – функции запрета;

11) f_4 и f_6 – проекции на x_1 и x_2 соответственно;

12) f_{13} и f_{11} – их инверсии.

Две булевых функции называются *равными*, если их таблицы истинности одинаковы.

Замечание. Очевидна аналогия между высказываниями и булевыми функциями, поэтому булевы функции иногда называют логическими функциями. Кроме того, для булевых функции оказываются справедливы все законы, выведенные для логических операций.

Способы задания булевых функций.

1. Задать булеву функцию можно с помощью *таблицы истинности*:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Например, функция голосования.

Теоретически таблицей истинности можно задать любую функцию, но при большом числе переменных способ непригоден.

2. Для экономии места можно задать функцию *вектором значений*.

Например, функция голосования будет иметь вид: $f(x_1, x_2, x_3) = $ $= (00010111)$.

3. Можно задать функцию *перечислением* номеров строк, в которых функция принимает значение 1. При этом заметим, что нумерация строк начинается с нуля. Функция голосования будет иметь вид: $f = \{3,5,6,7\}$.

4. Можно задать булеву функцию привычным образом – *аналитически* (т. е. с помощью формулы). Например, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_2) \Rightarrow x_3$.

4.2. Полные системы булевых функций

В отличие от математического анализа в теории булевых функций ставится задача представления булевой функции такой формулой, которая содержала бы строго определенное конечное множество элементарных булевых функций. Эти функции условно назовем «базисными функциями». Множества таких базисных функций могут быть разными, но в любом случае, через элементы этих множеств можно будет выразить любую функцию. Аналогичная задача не может быть решена для функций действительной переменной. Для булевых же функций она оказывается разрешимой, и это обусловлено, прежде всего, тем, что булева функция является конечной функцией.

Пусть имеется система булевых функций $f(x_1, \ldots, x_m)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots,$ $g_m(x_1, \ldots, x_n)$. Подставим функции $g_1, g_2, \ldots, g_m$ в f. Получим новую булеву функцию $f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, которая называется *суперпозицией* функций $f, g_1, \ldots, g_m$, а сам метод получения новой булевой функции называется *операцией суперпозиции*.

Определение. Набор булевых функций $M = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ называется *полной системой*, если любая булева функция выражается через них при помощи операции суперпозиции в конечном числе раз.

Пример 4.1. Рассмотрим набор булевых функций:

$$M=\{\wedge,\vee,\overline{}\}=\{\cdot,\vee,\overline{}\}=\{f_1=x_1\wedge x_2,\ f_2=x_1\vee x_2,\ f_3=\bar{x}\}$$

Эта система является полной (покажем это позже) и называется *стандартным базисом*.

Вот некоторые примеры разложения функций в стандартном базисе:

$$x_1\Rightarrow x_2=\bar{x}_1\vee x_2,$$

$$x_1\,|\,x_2=\overline{x_1\wedge x_2}=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2,$$

$$x_1\oplus x_2=(\bar{x}_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2).$$

Теорема (*о двух системах*). Пусть имеется полная система булевых функций $M = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$. Тогда для полноты другой системы $N = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ необходимо и достаточно, чтобы любая функция $f_i\in M$ выражалась через функции $g_1, g_2, ..., g_m \in N$ при помощи операций суперпозиции.

Пример 4.2. Является ли полной система функций $N=\{\oplus,\cdot,1\}=\{f_1=x_1\oplus x_2,\ f_2=x_1x_2,\ f_3=1\}$?

Решение

Рассмотрим стандартный базис $M=\{\cdot,\vee,\overline{}\}$ и покажем, что любую функцию из M можно выразить через функции системы N.

Действительно,

$$\bar{x}_1=x_1\oplus 1,$$

$$x_1\vee x_2=\overline{x_1x_2}=(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2)\oplus 1=[(x_1\oplus 1)\wedge(x_2\oplus 1)]\oplus 1=$$

$$=x_1x_2\oplus x_2\oplus \underbrace{x_1\oplus\underbrace{1\oplus 1}_{0}}_{x_1}=x_1x_2\oplus x_2\oplus x_1.$$

Таким образом, инверсия и дизъюнкция выражаются через функции системы N, а конъюнкция присутствует в обеих системах. Следовательно, согласно теореме о двух системах, система функций $N=\{\oplus,\cdot,1\}$ является полной. Эта система называется *базисом Жегалкина*.

С базисом Жегалкина тесно связано понятие *полинома Жегалкина*.

Полином Жегалкина – это многочлен, являющийся суммой постоянной и различных одночленов, в которые каждая из переменных входит не выше чем в первой степени.

Полином Жегалкина постоянной равен самой постоянной.

Для функций одной, двух и трех переменных полиномы Жегалкина имеют вид:

$f(x) = a_0 \oplus a_1 x$,

$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$,

$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3$.

Теорема. Любая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина, причем единственным образом.

Если булева функция задана аналитически, то для представления ее в базисе Жегалкина можно использовать следующие формулы:

$$x \oplus 0 = x, \qquad \bar{x} = x \oplus 1,$$
$$x \oplus x = 0, \qquad x \vee y = x \oplus y \oplus xy.$$

Если же функция представлена таблицей истинности, то можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов или треугольником Паскаля.

Пример 4.3. Построить многочлен Жегалкина функции $f(x, y, z) = (01011001)$.

Решение

Поясним, как заполняется таблица. Первые четыре столбца взяты из условия. В пятом столбце строится треугольник Паскаля. Верхняя строка такого треугольника есть строка значений исходной функции. В шестом столбце указаны конъюнкции переменных, значения которых в одном из первых трех столбцов равны единице. Набору (000) соответствует 1.

x	y	z	$f(x,y,z)$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	0	0 1 0 1 1 0 0 1	1
0	0	1	1	1 1 1 0 1 0 1	z
0	1	0	0	0 0 1 1 1 1	y
0	1	1	1	0 1 0 0 0	yz
1	0	0	1	1 1 0 0	x
1	0	1	0	0 1 0	xz
1	1	0	0	1 1	xy
1	1	1	1	0	xyz

.

Левая строка треугольника Паскаля равна 01001010. Единицам этой строки соответствуют слагаемые z, x, xy из 6-го столбца. Поэтому многочлен Жегалкина для функции $f(x,y,z)$ равен $z \oplus x \oplus xy$.

4.3. Классы Поста

Класс K булевых функций называется *замкнутым*, если любая суперпозиция функций из K вновь будет принадлежать K.

Например, множество F всех булевых функций является замкнутым.

Приведем пять важных замкнутых *классов Поста*:

- T_0 – класс булевых функций, *сохраняющих константу 0*, т. е. $f(0,0,..,0)=0$.
- T_1 – класс булевых функций, *сохраняющих константу 1*, т. е. $f(1,1,..,1)=1$.
- M – класс *монотонных* функций.

Два набора $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ называются *сравнимыми*, если выполнены условия $a_i \le b_i$, $\forall i=\overline{1,n}$. Например, наборы $(0,0)$ и $(1,0)$ сравнимы, а наборы $(1,0)$ и $(0,1)$ – нет.

Булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов a и b таких, что $a \le b$ следует $f(a) \le f(b)$.

- S – класс *самодвойственных* функций.

Булева функция f^* называется *двойственной* к функции f, если $f^*(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$. Булева функция f называется *самодвойственной*, если она совпадает с двойственной, т. е. $f=f^*$.

- L – класс *линейных* функций.

Булева функция f называется *линейной*, если ее полином Жегалкина имеет вид $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \cdots \oplus a_nx_n$.

С классами Поста связан второй алгоритм определения полноты системы.

Теорема Яблонского – Поста. Для того чтобы множество N булевых функций было полной системой, необходимо и достаточно найти для каждого из пяти классов Поста T_0, T_1, M, S, L функцию из N, которая ему не принадлежит.

Пример 4.4. Рассмотрим систему из одной функции – штрих Шеффера ($N = \{|\}$). Покажем, что это полная система.

Решение

Составим таблицу истинности функции $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$:

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	Треугольник Паскаля	
0	0	1	1 1 1 0	1
0	1	1	0 0 1	x_2
1	0	1	0 1	x_1
1	1	0	1	$x_1 x_2$

.

Так как $f(0{,}0) = 1 \neq 0$, то функция *не сохраняет ноль*, т. е. $f \notin \grave{O}_0$.

Так как $f(1{,}1) = 0 \neq 1$, то функция *не сохраняет единицу*, т. е. $f \notin \grave{O}_1$.

Проверим, является ли функция *самодвойственной*. Если да, то на «противоположных» наборах она должна принимать «противоположные» значения. Так как на «противоположных» наборах (0,1) и (1,0) функция принимает одно и то же значение $f = 1$, то штрих Шеффера не является самодвойственной функцией, $f \notin S$.

Чтобы функция была *монотонной*, необходимо чтобы на «больших» наборах переменных она принимала большие (или, по крайней мере, не меньшие) значения. Так как (1,1) > (0,0), но $f(1{,}1) = 0 < 1 = f(0{,}0)$, то функция монотонной не является, $f \notin M$.

Для того чтобы узнать является ли штрих Шеффера *линейной* функцией, надо построить его полином Жегалкина. Воспользуемся для этого треугольником Паскаля. Очевидно, что полином Жегалкина имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = 1 \oplus x_1 x_2 .$$

Так как в записи содержится произведение переменных, то функция линейной не является, $f \notin L$.

Таким образом, штрих Шеффера не принадлежит ни одному из замкнутых классов Поста, а значит, в силу теоремы Яблонского – Поста, система функций $N = \{|\}$ *является полной*.

Вернемся теперь к *стандартному базису*

$$M = \{\cdot, \vee, \bar{\ }\} = \{f_1 = x_1 \cdot x_2,\ f_2 = x_1 \vee x_2,\ f_3 = \bar{x}\}$$

и покажем, что эта система также полна.

Напомним таблицы истинности каждой из функций.

x_1	x_2	$f_1 = x_1 \cdot x_2$	$f_2 = x_1 \vee x_2$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

x	$f_3 = \bar{x}$
0	1
1	0

.

Проведя те же рассуждения, что и при решении предыдущего примера, получим следующие результаты, которые оформим в виде так называемой критериальной таблицы:

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	+	+	–	+	–
f_2	+	+	–	+	–
f_3	–	–	+	–	+

.

Очевидно, что для каждого из классов Поста в системе $M = \{\cdot, \vee, \bar{\ }\}$ нашлась функция, которая ему не принадлежит, а значит, по теореме Яблонского – Поста, система M является полной. Более того, по таблице можно заметить, что если исключить из системы какую-либо из функций $f_1 = x_1 \cdot x_2$ или $f_2 = x_1 \vee x_2$, то полученная система все равно останется полной.

4.4. Нормальные формы

Любая формула вида x или $\bar{x}$, где x – произвольная переменная называется *литералом*. Используют следующее обозначение: $x^{\sigma} = x$, если $\sigma = 1$ и $x^{\sigma} = \bar{x}$, если $\sigma = 0$.

Формула вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется *элементарной конъюнкцией*. Формула вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i = \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется *элементарной дизъюнкцией*.

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ).

Например,

$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_3 \wedge x_2) \vee \bar{x}_3$ – ДНФ;

$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge x_2$ – КНФ;

$(x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)) \wedge x_3$ – не ДНФ, не КНФ.

Теорема. Для любой булевой функции можно найти ее ДНФ и КНФ.

Замечание. Фактически представление в виде ДНФ или КНФ означает возможность представления любой булевой функции в стандартном базисе $M = \{\cdot, \vee, \bar{\ }\}$.

Привести функцию, заданную аналитически, к ДНФ и КНФ можно с помощью элементарных преобразований.

Пример 4.5. Привести функцию $f(x,y,z) = (x \oplus y) \wedge (z \Rightarrow x)$ к ДНФ и КНФ.

Решение

Напомним, что сумма Жегалкина $\oplus$ определяется как «антиэквивалентность», а значит, $x \oplus y = \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})}$, а импликация $z \Rightarrow x = \bar{z} \vee x$. Имеем

$$f(x,y,z) = (x \oplus y) \wedge (z \Rightarrow x) = \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})} \wedge (\bar{z} \vee x) =$$
$$= (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{z} \vee x).$$

Это и есть КНФ нашей функции.

Раскроем скобки и приведем функцию к ДНФ.

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge(x\vee y)\wedge(\bar{z}\vee x)=\big((\bar{x}\wedge y)\vee(x\wedge\bar{y})\big)\wedge(\bar{z}\vee x)=$$
$$=(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(\bar{x}\wedge y\wedge x)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge x).$$

Так как $x\wedge x=x$ и $\bar{x}\wedge x=0$, окончательно получаем:

$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y})$ – ДНФ.

Замечание. Можно получить и другую ДНФ этой же функции, если, например, к полученной нами ДНФ (к последним двум ее слагаемым) применить закон поглощения $(x\wedge y)\vee x=x$. Получим, $f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge y\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y})$.

Таким образом, у одной и той же булевой функции может существовать не одна, а несколько ДНФ и КНФ, т. е. представление функции в виде ДНФ (КНФ) неоднозначно. Кроме того, чтобы выполнить преобразования и привести функцию к ДНФ (КНФ), необходимо чтобы функция уже была задана в виде формулы. Если же булева функция задана, например, в виде таблицы истинности, то такой способ приведения к ДНФ (КНФ) применить нельзя. Поэтому особое место среди нормальных форм занимают совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) относительно переменных $x_1,x_2,...,x_n$ называется ДНФ вида $K_1\vee K_2\vee\cdots\vee K_m$, в которой в каждую элементарную конъюнкцию K_i каждый литерал x_j^σ ($j=\overline{1,n}$) входит ровно один раз.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) относительно переменных $x_1,x_2,...,x_n$ называется КНФ вида $D_1\cdot D_2\cdot...\cdot D_k$, в которой в каждую элементарную дизъюнкцию D_i каждый литерал x_j^σ ($j=\overline{1,n}$) входит ровно один раз.

Теорема. Всякая булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ не равная тождественно нулю (единице), представима в виде СДНФ (СКНФ), причем единственным образом.

СДНФ (СКНФ) можно построить с помощью элементарных преобразований, если функция задана аналитически. Но практический интерес представляет возможность построения СДНФ (СКНФ) с помощью таблицы истинности (рисунок 7).

СДНФ	***СКНФ***
1. Выбираем в таблице истинности наборы переменных $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{in}$, на которых функция принимает значения 1. 2. Для каждого такого набора строим элементарную конъюнкцию $K_i = x_1^{\sigma_{i1}} x_2^{\sigma_{i2}} ... x_n^{\sigma_{in}}$. 4. Записываем дизъюнкцию всех K_i: $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_m$	1. Выбираем в таблице истинности наборы переменных $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, ..., \sigma_{in}$, на которых функция принимает значения 0. 2. Для каждого такого набора строим элементарную дизъюнкцию $D_i = x_1^{\overline{\sigma}_{i1}} \vee x_2^{\overline{\sigma}_{i2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{\sigma}_{in}}$. 3. Записываем конъюнкцию всех D_i: $D_1 \cdot D_2 ... D_k$

Рисунок 7 – **Алгоритмы построения *СДНФ, СКНФ***

Пример 4.6. Для функции голосования найти СДНФ, СКНФ.

Решение

Таблица истинности функции голосования имеет вид:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

.

Для построения СДНФ в результирующем столбце выбираем строки, где формула принимает значение, равное единице.

СДНФ: $(x^0 \wedge y^1 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^0 \wedge z^1) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^0) \vee (x^1 \wedge y^1 \wedge z^1) =$
$= \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

Для построения СКНФ выбираем наборы, на которых функция равна нулю.

СКНФ: $(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \wedge (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) \wedge (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}) \wedge (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) =$
$= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)$.

4.5. Минимизация булевых функций

Форму записи булевой функции, в которой использовано наименьшее число элементарных операций по сравнению с другими формами записи этой же функции, называют *абсолютно минимальной*. Задачу поиска наиболее простой записи булевой функции называют *задачей минимизации*.

Так как наиболее распространенной формой представления булевой функции является ДНФ, то задачу упрощения булевых функций обычно формулируют в классе ДНФ.

Пусть имеется ДНФ булевой функции:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s,$$

где K_i, $i = \overline{1, s}$ – элементарные конъюнкции.

Число s называется *длиной* ДНФ.

ДНФ булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется *кратчайшей*, если она содержит наименьшее число s элементарных конъюнкций по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Рассмотрим некоторую элементарную конъюнкцию $K = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_r^{\sigma_r}$.

Число r переменных в конъюнкции называется ее *рангом*. Тогда ДНФ можно охарактеризовать числом $R = r_1 + r_2 + .. + r_s$, которое называется *суммарным рангом ДНФ* булевой функции.

ДНФ булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется *минимальной*, если ей соответствует наименьший суммарный ранг R по сравнению с другими ДНФ этой же функции.

Булеву функцию g назовем *импликантом* булевой функции f, если для любых наборов значений аргументов этих функций, из равенства $g = 1$ следует равенство $f = 1$.

Если отбрасывание любой переменной импликанта приводит к тому, что полученная функция перестает быть импликантом, то такой импликант называется *простым*.

Если функция g представима в форме ДНФ, то в качестве имплицирующей функции f может выступать любая элементарная конъюнкция из ДНФ.

Например, для функции $f(x,y,z)=(01100100)$ СДНФ f = $=\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}z$. Функция $g_1=\bar{x}y\bar{z}$ – простой импликант функции f, а $g_2=x\bar{y}z$ – импликант, не являющийся простым (т. к. при отбрасывании в функции g_2 переменной x, мы снова получим импликант $\bar{y}z$ функции f).

Сокращенная ДНФ функции f есть дизъюнкция всех простых импликантов функции f.

Теорема. Всякая булева функция реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой булевой функции, не равной тождественно нулю, существует единственная сокращенная ДНФ.

Существуют различные методы построения сокращенной ДНФ: табличный, геометрический, Блейка, Нельсона и т. д. Однако все они основаны на выполнении двух операций: склеивания ($xA\vee\bar{x}A=A$) и поглощения ($A\vee A\wedge B=A$). Различие в методах состоит в способе исходного представления булевой функции и организации нахождения всех простых импликантов.

ДНФ, из которой нельзя удалить ни одного импликанта, называется *тупиковой*.

Теорема. Любая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

Однако не всякая тупиковая ДНФ является минимальной.

Для минимизации булевых функций трех-четырех переменных наиболее наглядным способом является использование *карт Карно*. Карта Карно для функции трех переменных $f(x_1,x_2,x_3)$ представляет собой прямоугольную таблицу следующего вида:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0				
x_3	1				

.

Карта Карно функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет вид:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	00				
$\bar{x}_3 x_4$	01				
$x_3 x_4$	11				
$x_3\bar{x}_4$	10				

.

Это фактически модификация таблицы истинности булевой функции. Каждая клетка задается своим набором значений переменных. В клетках, соответствующих наборам переменных, на которых функция принимает значение, равное единице, ставится 1, остальные клетки остаются пустыми. Карты Карно устроены так, что наборы, определяющие две соседние клетки, различаются в точности в одной позиции (т. е. отличаются значениями ровно одной компоненты), причем «соседними» в этом смысле считаются также клетки левого и правого края, а также верхнего и нижнего края. Это можно представить себе так, что карта «закручивается» в цилиндр по обоим направлениям, т. е. в тор.

Процесс склейки на карте Карно выглядит так: любые две *соседние* клетки, содержащие единицу, обводятся, и «поглотивший» их прямоугольник представляется словом вида 0×1 (× – знак зачеркивания на месте переменной, по которой произведена склейка). Например, для функции голосования процесс построения минимальной ДНФ с помощью карты Карно будет выглядеть следующим образом:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$	
		00	01	11	10	
$\bar{x}_3$	0			1		$x_1 x_2$
x_3	1		1	1	1	
			$x_2 x_3$		$x_1 x_3$	

По этим слагаемым мы получаем ДНФ: $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$. Так как мы «покрыли » все единицы, и никакой из прямоугольников не содержится в другом, то нами получена минимальная ДНФ.

Если мы можем покрыть прямоугольник с единицами площади 4, 8,…,2^k клеток, то мы делаем это, и тогда меньшие, поглощаемые им прямоугольники, уже не рассматриваются. Чем большая площадь покрывается прямоугольником, тем короче будет минимальная ДНФ.

Например, в следующей карте можно было бы покрыть единицы двумя прямоугольниками площади 2 клетки, но эти прямоугольники «поглощаются» прямоугольником площади 4 клетки:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0	1	1		
x_3	1	1	1		

.

$\bar{x}_1$

Таким образом, минимальная ДНФ данной функции будет равна $\bar{x}_1$.

Так же поступают и в случае функции четырех переменных:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	00	1			1
$\bar{x}_3 x_4$	01	1			1
$x_3 x_4$	11	1			1
$x_3\bar{x}_4$	10	1			1

.

$\bar{x}_2$

Можно было бы покрыть клетки двумя прямоугольниками площади 4 и получить ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2$, но минимальную ДНФ ($\bar{x}_2$) мы получим, если «склеим» клетки крайнего правого и левого рядов.

Пусть булева функция частично (не всюду) определена, т. е. не для всех наборов указаны значения функции.

Склейка производится таким образом, что выделяются прямоугольники, каждая клетка которых содержит либо единицу, либо *, причем существует по крайней мере одна единичная клетка.

Пример 4.7. Построить минимальную ДНФ функции $f = (1110{*}{*}01)$.

Решение

Для наглядности запишем сначала таблицу истинности нашей функции

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	*
1	0	1	*
1	1	0	0
1	1	1	1

.

Теперь изобразим карту Карно согласно описанным выше правилам:

		$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$	$x_1\bar{x}_2$
		00	01	11	10
$\bar{x}_3$	0	1	1		*
x_3	1	1		1	*

.

Очевидно, этой карте Карно будет соответствовать ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2$, которая и будет являться минимальной.

Упражнения

Упражнение 1. Установить, являются ли булевы функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ монотонными, линейными, сохраняющими 0, сохраняющими 1, самодвойственными. Образуют ли они полную систему?

а) $f_1(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge \bar{x}_2$;

б) $f_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \wedge x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$;

в) $f_1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2$, $f_2(x_1, x_2) = \bar{x}_2 \Rightarrow x_1$;

г) $f_1(x_1, x_2) = (1010)$, $f_2(x_1, x_2) = (0111)$.

Упражнение 2. Выяснить, полно ли множество булевых функций F:

а) $F=\{f_1=\bar{x},\ f_2=x\wedge(y\sim z)\sim y\wedge z,\ f_3=x\oplus y\oplus z\}$;

в) $F=\{f_1=(0110),\ f_2=(11000011),\ f_3=(10010110)\}$;

г) $F=\{f_1=x\vee y,\ f_2=(1001101111110110)\}$.

Упражнение 3. Для заданных булевых функций найти ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ с помощью равносильных преобразований и сделать проверку с помощью таблицы истинности.

а) $(\bar{x}\Rightarrow\bar{y})\Rightarrow(y\wedge z\Rightarrow x\wedge z)$;

б) $(x\oplus y)\Rightarrow(y\wedge z)$;

в) $\overline{x\wedge y\Rightarrow x}\vee x\wedge(y\vee z)$;

г) $(x\Rightarrow(y\downarrow z))\Rightarrow(x\vee y)$.

Упражнение 4. Найти минимальные ДНФ для функций:

а) $f=(01101001)$;

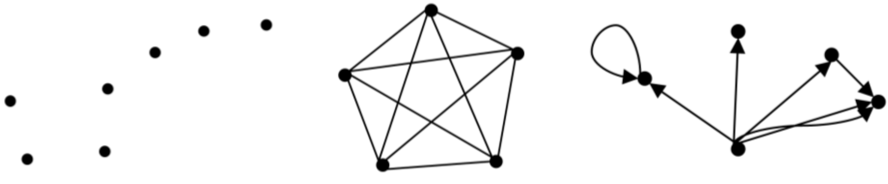
б) $f=(01111110)$.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

5.1. Графы и их типы

Граф представляет собой непустое конечное множество вершин V и набор E неупорядоченных или упорядоченных пар вершин; обозначается граф через $G(V,E)$. Неупорядоченная пара вершин называется *ребром*, упорядоченная – *дугой*. Граф, содержащий только ребра, называется *неориентированным* (неографом); граф, содержащий только дуги – *ориентированным* (орграфом).

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек (рисунок 8).



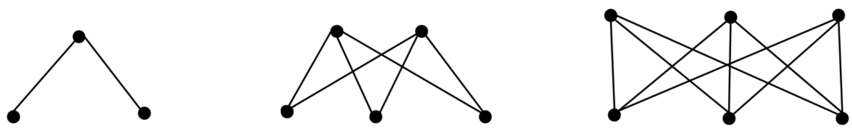
а *б* *в*

Рисунок 8 – **Примеры графов**

Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами (дугами одного направления). Такие ребра (дуги) называют *кратными*. Если ребро (дуга) начинается и заканчивается в одной и той же точке, то оно называется *петлей*. Граф, в котором допускаются кратные ребра, назовем *мультиграфом*, а в котором допускаются кратные ребра и петли – *псевдографом* (рисунок 8в). Далее под графом будем понимать граф без петель и кратных ребер.

Вершины, соединенные ребром или дугой, называются *смежными*. Ребра, имеющие общую вершину, также называются *смежными*. Ребро (дуга) и любая из двух его вершин называются *инцидентными*. Вершина, не принадлежащая ни одному ребру, называется *изолированной*. Граф, состоящий только из изолированных вершин, называют *нуль-графом* (рисунок 8а).

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены одним и только одним ребром (рисунок 8б). Полный граф с n вершинами обозначается через K_n. Если множество V вершин графа можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 так, что в каждом подмножестве нет смежных вершин, а любые две вершины $u \in V_1$ и $v \in V_2$ смежны, то граф называется *полным двудольным* и обозначается $K_{m,n}$, где m и n – число элементов множеств V_1 и V_2 соответственно (рисунок 9).



$K_{1,2}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Рисунок 9 – **Примеры полных двудольных графов**

Более распространенными способами описания графа, пригодными для практических вычислений с использованием ЭВМ, являются матрицы.

Граф (неориентированный или ориентированный) может быть представлен в виде матрицы B размерности $n \times m$, где n – число вершин, m – число ребер (или дуг). Для неориентированного графа элементы этой матрицы задаются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если i-ая вершина инцидентна j-му ребру} \\ 0, \textit{ иначе}. \end{cases}$$

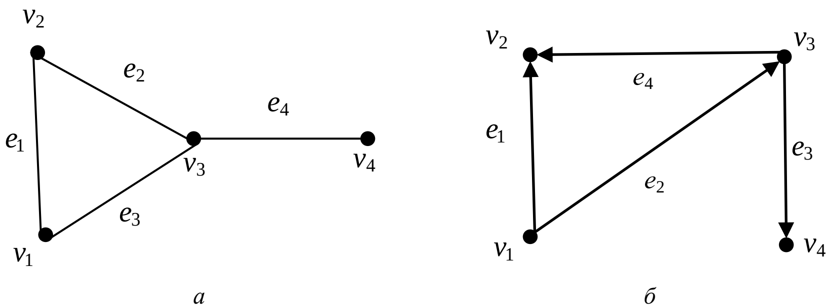
Для ориентированного графа элементы матрицы задаются так:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если для i-ой вершины j-ая дуга выходящая}, \\ -1, \textit{ если для i-ой вершины j-ая дуга заходящая}, \\ 0, \textit{ иначе}. \end{cases}$$

Матрицу (b_{ij}), определенную указанным образом, называют *матрицей инцидентности* (или *матрицей инциденций*).

Пример 5.1. Для неориентированного графа и орграфа, изображенных на рисунке 10, матрицы инцидентности будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ соответственно}$$



а *б*

Рисунок 10 – **Неориентированный графы**

Если граф содержит петли, то элементы матрицы инцидентности, соответствующие дугам, образующим петли, одновременно равны 1 и –1, что приводит к неоднозначности матрицы инцидентности. Кроме того, в каждом столбце матрицы находятся только два ненулевых элемента, что делает такой способ представления неэкономным при большом количестве вершин.

Другой матричной структурой, представляющей граф, является *матрица смежности* вершин. Это квадратная матрица A порядка n, элементы которой определяют следующим образом:

для неориентированного графа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если } i\textit{-ая и } j\textit{-ая вершины смежные}, \\ 0, \textit{ иначе}. \end{cases}$$

для ориентированного графа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если из } i\textit{-ой вершины в } j\textit{-ую ведет дуга}, \\ 0, \textit{ иначе}. \end{cases}$$

Пример 5.2. Матрицы смежности графов, изображенных на рисунке 10, имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ соответственно.}$$

Матрица смежности является достаточно эффективным способом представления графа, но эту матрицу удобно строить по графу, уже заданному каким-либо образом, например, рисунком. Во многих задачах граф создается динамически, т. е. в процессе решения меняется множество вершин и множество ребер. В этом случае эффективным способом машинного представления графа являются *списки смежности*. Задать для любой вершины v ее список смежности $L(v)$ означает поместить в произвольном порядке в данные элементов списка номера тех вершин u, для которых в графах есть дуга (ребро) из v в u.

Пример 5.3. Граф на рисунке 10а может быть задан списками смежности $L(v_1)=\{v_2, v_3\},\ L(v_2)=\{v_1, v_3\},\ L(v_3)=\{v_1, v_2, v_4\},\ L(v_4)=\{v_3\}$. Для графа на рисунке 10б списки смежности имеют вид $L(v_1)=\{v_2, v_3\},\ L(v_2)=\varnothing,\ L(v_3)=\{v_2, v_4\},\ L(v_4)=\varnothing$.

5.2. Операции над графами

Язык теории множеств очень удобен как для выделения частей графа, так и для ввода операций над ними.

Граф $G'(V', E')$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$, если $V' \subseteq V,\ E' \subseteq E$ и множество ребер E' графа G' образовано теми и только теми ребрами графа G, обе концевые вершины каждого из которых принадлежат множеству V'. Подграф G' называется *собственным*, если он отличен от самого графа G. Подграф G' называется *остовным*, если $V' = V,\ E' \subseteq E$.

На рисунке 11 изображен граф G, его собственный подграф G' и остовной подграф G''.

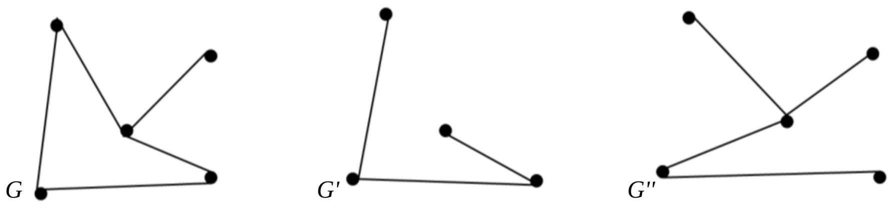


Рисунок 11 – **Граф и его подграфы**

На графах выполняются основные теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, разность, дополнение, разностная сумма.

Пример 5.4. Для графов G_1 и G_2, изображенных на рисунке 12, построить пересечение $G_1 \cap G_2$, объединение $G_1 \cup G_2$, дополнение $\overline{G_1}$.

Рисунок 12 – **Графы для примера 5.4**

Решение

Операции над графами представлены на рисунке 13.

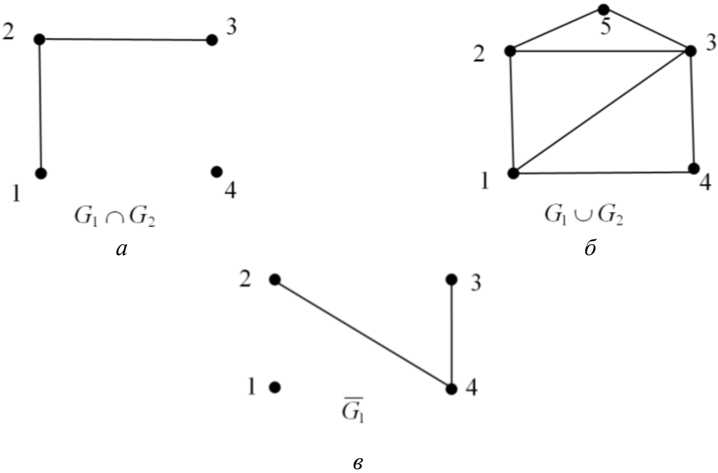


Рисунок 13 – **Операции над графами**

На графах определяют и некоторые другие операции, используемые при разработке алгоритмов: композицию, удаление вершины, удаление ребра, стягивание ребра. Так, операция *удаления вершины v* *v* из графа G приводит к построению графа $G'(V', E') = G \setminus \{v\}$, где $V' = V \setminus \{v\}$, а множество ребер E содержит те и только те ребра, которые не инцидентны вершине *v*.

Операция *стягивания ребра* состоит в удалении ребра между вершинами $x, y \in V$ и отождествлении этих вершин в одну, например, в вершину v; множество ребер, инцидентных вершинам x и y, в новом графе полагают инцидентными вершине v; остальные вершины и ребра в результирующем графе остаются такими же, как в исходном графе.

Степенью вершины v (обозначается $\deg(v)$) в неориентированном графе называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Вершина v называется четной, если $\deg(v)$ – четное число, и нечетной, если $\deg(v)$ – нечетное число. Граф называется *однородным степени* n, если степень любой его вершины равна n.

Теорема («лемма о рукопожатиях»). В графе сумма степеней всех вершин есть число четное, равное удвоенному количеству ребер графа.

Следствие. Количество нечетных вершин графа четно.

Теорема. В любом графе с n вершинами ($n \geq 2$) всегда найдутся по меньшей мере 2 вершины с одинаковыми степенями.

Теорема. Если в графе с n вершинами ($n \geq 3$) в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.

В ориентированном графе различают полустепень захода и полустепень выхода. *Полустепенью захода* вершины v в ориентированном графе называют число $\deg^{-}(v)$ заходящих в нее дуг, а *полустепенью выхода* вершины v – число $\deg^{+}(v)$ исходящих из нее дуг. *Степень вершины* определяется как сумма полустепеней захода и выхода:

$$\deg(v) = \deg^{+}(v) + \deg^{-}(v).$$

Маршрутом M в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер

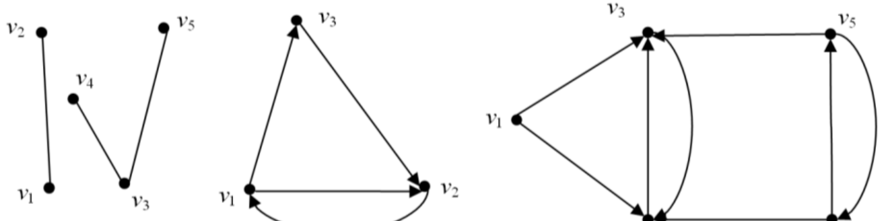
$M = \{v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}\}$ такая, что $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Иногда маршрут задают либо только последовательностью составляющих его ребер, либо только последовательностью вершин, через которые он проходит. Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз. *Длиной* маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.

Если в маршруте нет совпадающих ребер, то он называется *цепью*, а если различны как ребра, так и вершины, то *простой цепью*. Замкнутая цепь ненулевой длины, в которой совпадают начальная и конечная вершины, называется *циклом*. В ориентированном графе цепь называют также *путем*, а цикл – *контуром*.

Граф $G(V, E)$ называется *связным*, если между любыми двумя его различными вершинами существует маршрут. *Компонентой связности* (или просто *компонентой*) графа G называется любой его максимальный связный подграф, т. е. подграф, который сам является связным и не содержится ни в каком связном собственном подграфе графа G.

Компоненты неориентированного графа не пересекаются, а компоненты орграфа могут пересекаться.

Пример 5.5. На рисунке 14а изображен несвязный неориентированный граф, имеющий две компоненты связности $K_1 = \{v_1, v_2\}$ и $K_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Граф, изображенный на рисунке 14б, является связным орграфом и состоит из одной компоненты $K = \{v_1, v_2, v_3\}$. Ориентированный граф на рисунке 14в не является связным, так как из вершины v_1 нельзя попасть, например, в вершину v_4. Этот граф имеет две компоненты связности, $K_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $K_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, причем эти компоненты пересекаются, $K_1 \cap K_2 = \{v_2, v_3\}$.



а *б* *в*

Рисунок 14 – **Графы для примера 5.5**

Для ориентированного графа можно определить понятия сильной и слабой связности.

Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если между любыми двумя различными вершинами u и v существуют пути из u в v и из v в u. *Бикомпонентой* орграфа G называется его максимальный сильно связный подграф.

Неориентированный граф $G'(V', E')$ называется *ассоциированным* с орграфом $G(V, E)$, если $V' = V$, а пара (u, v) образует ребро графа G' тогда и только тогда, когда $u \neq v$ и в графе G существует дуга (u, v) или (v, u).

Орграф называется *слабо связным*, если ассоциированный с ним граф связный. Так, граф на рисунке 14б является сильно связным, а граф на рисунке 14в – слабо связным. Он содержит три бикомпоненты: $B_1 = \{v_1\}$, $B_2 = \{v_2, v_3\}$ и $B_3 = \{v_4, v_5\}$.

Граф называется *планарным* (*плоским*), если он может быть изображен на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались ни в каких других точках, кроме вершин. *Гранью* плоского графа называется максимальный участок плоскости, такой, что любые две точки этого участка могут быть соединены кривой, не пересекающей ребро графа. Внешняя часть графа также является гранью.

Пример 5.6. На рисунке 15 изображен полный граф K_4 и его плоское представление.

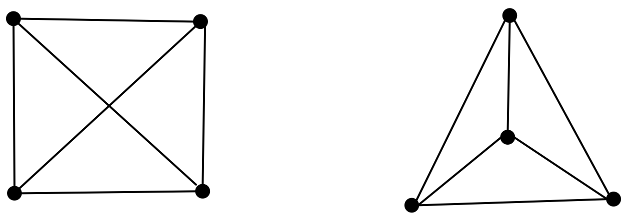


Рисунок 15 – **Граф K_4 и его плоское представление**

Теорема (***формула Эйлера***). Если G – связный плоский граф, содержащий B вершин, P ребер и $\tilde{A}$ граней, то справедливо равенство: $\hat{A} - Đ + \tilde{A} = 2$.

Следствие. Для связного планарного графа с количеством вершин $B \geq 3$ справедливо неравенство: $P \leq 3B - 6$.

Упражнения

Упражнение 1. Изобразите графы K_3, K_4, $K_{2,2}$, $K_{1,5}$.

Упражнение 2. Сколько ребер имеет полный граф с n вершинами?

Упражнение 3. Задать графы, изображенные на рисунке 16, матрицами смежности:

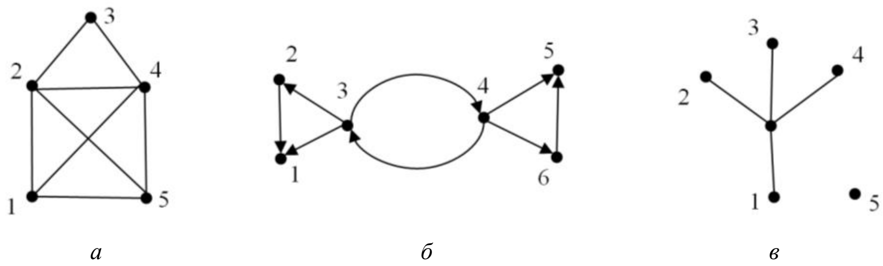


Рисунок 16 – **Графы для упражнения 3**

Упражнение 4. По заданной матрице смежности изобразить граф:

$$
\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Упражнение 5. Для графов G_1 и G_2, заданных матрицами смежности A и B соответственно, построить их объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическую разность и записать матрицы смежности полученных графов. Сделать вывод.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Упражнение 6. Изобразить однородный граф степени 3 с шестью вершинами.

Упражнение 7. Найдется ли граф с 5 вершинами, у которого одна вершина изолирована, а другие – степени 4?

Упражнение 8. Существует ли граф, у которого есть вершины степеней 7, 4, 3, 2 и нет вершин других степеней? Какое наименьшее число вершин может быть в таком графе?

Упражнение 9. Расположить в пространстве пять одинаковых шаров так, чтобы каждый из них касался ровно трех других.

Упражнение 10. Может ли быть 50 дорог между населенными пунктами, если известно, что из каждого населенного пункта выходит ровно три дороги?

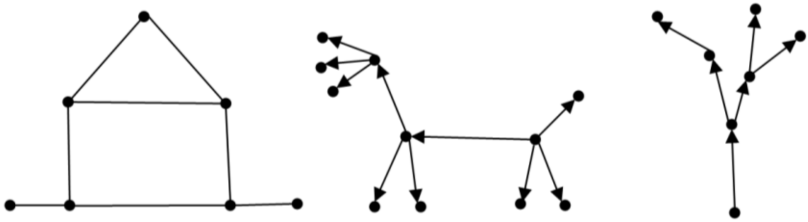
6. ДЕРЕВЬЯ

6.1. Некоторые специальные графы и алгоритмы

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов. *Ориентированным деревом* называется бесконтурный граф, у которого полустепень захода любой вершины не больше 1 и существует ровно одна вершина, называемая корнем, полустепень захода которой равна нулю. Ориентированное дерево называется *бинарным*, если полустепень выхода любой его вершины не больше 2.

Теорема. Дерево с n вершинами содержит ровно $n-1$ ребро.

Пример 6.1. Граф на рисунке 17а не является деревом, на рисунке 17б изображено дерево, а на рисунке 17в – бинарное дерево.



а *б* *в*

Рисунок 17 – **Графы для примера 6.1**

Граф, у которого каждому ребру (v_i, v_j) (дуге) сопоставлено некоторое действительное число c_{ij}, называется *взвешенным* (*размеченным*), а само число c_{ij} – *весом* ребра (дуги). Этот вес может описывать расстояние, стоимость или другие данные. *Длиной* (или *весом*, или *стоимостью*) пути S называется число $l(S)$, равное сумме длин дуг, входящих в этот путь. Матрица $C = (c_{ij})$ называется *матрицей весов*.

Остовным деревом (покрывающим деревом) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Минимальным остовным деревом называется такое остовное дерево T графа G, что вес T меньше или равен весу любого другого остовного дерева графа G.

Задачу построения минимального дерева-остова можно решить с помощью *алгоритма Краскала*. Идея метода состоит в том, чтобы формировать дерево T, выбирая ребра с наименьшим весом так, чтобы не возникал цикл.

Приведем описание алгоритма Краскала по шагам.

Шаг 1. Отсортируем ребра графа по неубыванию весов.

Шаг 2. Полагаем, что каждая вершина относится к своей компоненте связности.

Шаг 3. Проходим ребра в «отсортированном» порядке. Для каждого ребра выполняем следующую проверку:

а) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в разных компонентах связности, то объединяем эти компоненты в одну, а рассматриваемое ребро добавляем к минимальному дереву-остову;

б) если вершины, соединяемые данным ребром, лежат в одной компоненте связности, то исключаем ребро из рассмотрения, так как при включении данного ребра образуется цикл.

Шаг 4. Если есть еще нерассмотренные ребра и не все компоненты связности объединены в одну, то переходим к шагу 3, иначе алгоритм завершает работу:

а) если при этом просмотрены все ребра, но не все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа невозможно построить покрывающее дерево;

б) если просмотрены все ребра, и все компоненты связности объединены в одну, то для исходного графа построено минимальное покрывающее дерево.

Пусть $G(V,E)$ – связный взвешенный граф с матрицей весов $C=(c_{ij})$. Задача построения кратчайшего пути между заданной парой вершин $s\in V$ и $t\in V$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти путь с наименьшим весом.

Для решения задачи можно воспользоваться *алгоритмом Дейкстры*. Он основан на приписывании каждой вершине временной пометки (верхней границы). На каждой итерации ровно одна временная пометка становится постоянной (соответствующая вершина становится «окрашенной»), что означает, что пометка перестала быть верхней границей и дает уже точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Пусть $G(V,E)$ – связный граф, в котором выделены две вершины: s – источник, t – сток. Каждой дуге (x, y) графа поставлено в соответствие неотрицательное число, которое интерпретируется как максимальное количество единиц некоторого товара, которое может быть доставлено из вершины x в вершину y за единицу времени. Это число принято называть *пропускной способностью* (или *мощностью*) дуги. Такой граф называют *сетью*, а его вершины – *узлами*. Задача построения максимального потока между заданной парой вершин $s\in V$ и $t\in V$ заключается в том, чтобы из множества путей, соединяющих указанные вершины, найти такие, по которым можно пропустить максимальное количество единиц потока в единицу времени.

Задача коммивояжера – одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации. Задача заключается в отыскании самого «выгодного» гамильтонова цикла, т. е. маршрута, проходящего через указанные города ровно по одному разу и с возвратом в исходный город. В условии задачи указывается критерий выгодности (самый короткий цикл, самый дешевый и т. д.) и соответствующая матрица весов (расстояний, стоимостей).

Приведем один из способов решения этой задачи – метод ветвей и границ. Суть метода заключается в следующем: сначала для множества всех гамильтоновых контуров R определяется некоторая оценка снизу (нижняя граница) $k(R)$ длины контура. Затем множество R разбивается на два подмножества, одно из которых включает некоторую дугу (i, j) (обозначим это подмножество $R_{(i,j)}$), а второе (подмножество $R_{\overline{(i,j)}}$) ее не включает. Для $R_{(i,j)}$ и $R_{\overline{(i,j)}}$ вновь определяется оценка $k(R)$ и выбирается подмножество с меньшей нижней границей. Оно снова разбивается на два подмножества. Процесс разбиения продолжается до тех пор, пока не будет выделено подмножество, содержащее единственный гамильтонов контур.

Прежде чем приступить к описанию алгоритма, поясним некоторые термины.

Пусть имеется некоторая числовая матрица.

Привести матрицу по строкам – значит найти минимальный элемент в каждой строке и вычесть его из всех элементов соответствующей строки. Аналогично определяется операция приведения матрица по столбцам. Вычитаемые при этом минимальные элементы называются *константами приведения*. *Вес элемента* – это сумма констант приведения матрицы, полученной заменой обсуждаемого элемента на бесконечность.

Опишем алгоритм метода ветвей и границ.

Пусть R – множество всех обходов графа G с n вершинами, M – весовая матрица, причем $m_{ii} = \infty$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Шаг 1. Приведем матрицу расстояний по строкам и столбцам. Найдем нижнюю границу $k(R)$ всех гамильтоновых контуров как сумму констант приведения.

Шаг 2. Найдем самый тяжелый нуль (т. е. нуль с наибольшим весом) в приведенной матрице. Предположим, он находится в клетке (i, j).

Шаг 3. Разделим множество R на два подмножества $R_{(i,j)}$ и $R_{\overline{(i,j)}}$. Сопоставим множеству $R_{(i,j)}$ матрицу по следующему правилу:

а) заменим на ∞ число, стоящее в клетке (j,i), чтобы исключить возможность образования негамильтонова цикла;

б) в полученной матрице вычеркнем *i*-ую строку и *j*-ый столбец, сохранив нумерацию строк и столбцов;

в) приведем последнюю матрицу по строкам и столбцам и вычислим сумму констант приведения $k_{(i,j)}$. Если сокращенная матрица имеет размерность 2×2, то перейдем к шагу 6.

Шаг 4. Множеству $R_{\overline{(i,j)}}$ также сопоставим матрицу, полученную из исходной матрицы заменой элемента (i,j) на ∞ (таким образом, мы исключаем их рассмотрения дугу (i,j)). Приведем полученную матрицу и вычислим сумму констант приведения $k_{\overline{(i,j)}}$.

Шаг 5. Сравним нижние границы $k_{(i,j)}$ и $k_{\overline{(i,j)}}$ перейдем к шагу 2. Если при этом $k_{(i,j)} < k_{\overline{(i,j)}}$, то разбиению подлежит множество $R_{(i,j)}$, в противном случае – множество $R_{\overline{(i,j)}}$.

Шаг 6. Определим гамильтонов контур и его длину.

Упражнения

Упражнение 1. Решить задачу коммивояжера для графа, изображенного на рисунке 18.

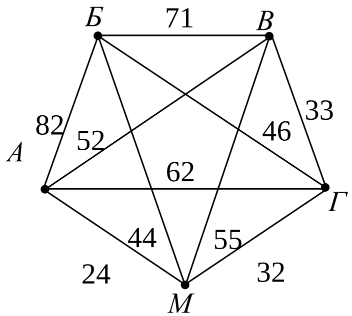


Рисунок 18 – **Граф для упражнения 1**

Упражнение 2. Решить задачу коммивояжера для графа, изображенного на рисунке 19.

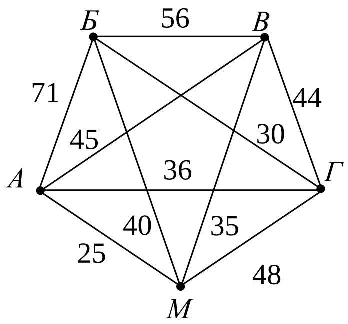


Рисунок 19 – **Граф для упражнения 2**

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тишин, В. В.** Дискретная математика в примерах и задачах / В. В. Тишин. – 2-е изд., испр. – СПб. : БХВ-Петербург, 2017. – 336 с.

2. **Бабичев, И. В.** Дискретная математика. Контролирующие материалы к тестированию : учеб. пособие. – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2013. – 160 с. : ил.

3. **Аляев, Ю. А.** Дискретная математика и математическая логика : учеб. / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 368 с.

4. **Москинова, Г. И.** Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях : учеб. пособие / Г. И. Москинова. – М. : Логос, 2004. – 240 с.

5. **Плотников, А. Д.** Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – М. : Новое знание, 2006. – 304 с.

6. **Кремер, Н. Ш.** Математика для экономистов: от арифметики до эконометрики : учеб.-справ. пособие / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под общ. ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Юрайт, 2016. – 724 с.

7. **Сборник** задач по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / под ред. А.С. Поспелова. – М. : Юрайт, 2011. – 612 с.

8. **Основы** дискретной математики : пособие. В 3 ч. Ч. 1. Элементы теории множеств / Белкоопсоюз, БТЭУ, Каф. высш. мат. ; [авт.-сост. Н. Д. Романенко]. – Гомель : БТЭУ, 2008. – 80 с.

9. **Основы** дискретной математики. В 3 ч. Ч. 2. Элементы математической логики : пособие для студ. экон. спец. : авт.-сост. Н. Д. Романенко. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп., 2009. – 76 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени

Автор-составитель
Воробей Людмила Александровна

Редактор Т. В. Гавриленко
Компьютерная верстка Л. Г. Макарова

Подписано в печать 16.03.20. Формат 60 × 84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,65. Тираж 50 экз.
Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/138 от 08.01.2014.
Просп. Октября, 50, 246029, Гомель.
http://www.i-bteu.by

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени

Гомель 2020