БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени и переподготовки руководящих работников и специалистов

В трех частях

Часть 1

Гомель 2021

УДК 330.42
ББК 65в631
Э 40

Авторы-составители: Т. А. Заяц, ст. преподаватель;
О. И. Еськова, канд. техн. наук, доцент;
М. А. Грибовская, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензенты: Г. Н. Казимиров, канд. физ.-мат. наук, доцент Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;
Л. П. Авдашкова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 1 от 9 октября 2018 г.

Э 40 **Эконометрика** и экономико-математические методы и модели : пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени и переподготовки руководящих работников и специалистов. В 3 ч. Ч. 1 / авт.-сост. : Т. А. Заяц, О. И. Еськова, М. А. Грибовская. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2021. – 96 с.
ISBN 978-985-540-552-9

Издание предназначено для студентов всех специальностей и слушателей системы переподготовки руководящих работников и специалистов.

УДК 330.42
ББК 65в631

ISBN 978-985-540-564-2 (ч. 1)
ISBN 978-985-540-552-9

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данное пособие подготовлено в соответствии с программой курса «Эконометрика и экономико-математические методы и модели». В пособии рассматриваются общесистемные прикладные модели по следующим темам:

– Основы моделирования социально-экономических систем. Комплексный анализ эффективности работы экономических объектов.

– Сетевое планирование и управление.

– Модели теории игр.

– Модели управления товарными запасами.

– Задачи математического (линейного) программирования.

Первая тема посвящена общим вопросам и понятиям моделирования. В ней определяются предмет, метод и цель данного курса, раскрываются понятия модели и моделирования, адекватности модели и другие основные определения. Рассматриваются типовые этапы разработки и использования экономико-математических моделей, обсуждаются вопросы погрешности моделирования, классификация экономико-математических моделей и методов. Приводится пример решения задачи «Комплексный анализ эффективности работы экономических объектов» как простейшей математической модели.

Во второй теме практикума рассматриваются методы сетевого планирования и управления, применяемые при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ. Приводятся правила и методика построения сетевого графика, а также способы оценки временных параметров этого графика. Обсуждается задача оптимизации критического срока проекта путем перераспределения ресурсов между работами.

Третья тема посвящена моделям теории игр. Применение этих моделей позволяет планировать деятельность организации в условиях конкурентной борьбы, рыночных отношений и в других конфликтных ситуациях, характеризующихся неопределенностью при принятии решений. Практическая работа посвящена решению игр с природой на основании различных критериев.

В теме «Модели управления товарными запасами» описывается научное управление запасами. Рассматривается простейшая модель Уилсона по определению оптимальной партии поставки товара и модель с учетом неудовлетворенных требований, т. е. с дефицитом.

Большое внимание в практикуме уделяется моделям математического программирования, их видам и методам решения. Рассматривается начальный этап решения – формализация задач линейного программирования.

В начале каждой практической работы в практикуме приводятся сведения по теории в объеме, необходимом для решения задач. Затем следуют примеры решения типовых задач, после чего предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце каждой темы предложены вопросы для контроля и закрепления пройденного материала.

Числовые данные в задачах в основном носят условный характер.

ВВЕДЕНИЕ

Постоянно усложняющиеся экономические процессы потребовали создания и совершенствования особых методов их изучения и анализа. Широкое распространение получило использование математического моделирования и количественного анализа. В связи с этим можно выделить такие направления экономических исследований, как экономико-математические методы (ЭММ) и эконометрика.

Эконометрика – это научная дисциплина, входящая в комплекс ЭММ, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей.

Формально эконометрика означает «измерения в экономике». Однако область исследований данной дисциплины гораздо шире.

В эконометрике решаются задачи описания данных (в том числе усреднения), оценивания, проверки гипотез, установления зависимостей, классификации объектов и признаков, прогнозирования, принятия статистических решений и др. Одним из важнейших направлений эконометрики является построение прогнозов по различным экономическим показателям.

Экономические процессы развиваются во времени, поэтому большое место в эконометрике занимают вопросы анализа и прогнозирования временных рядов, в том числе многомерных.

Эконометрика как научная дисциплина зародилась и получила развитие на основе слияния экономической теории, математической экономики, экономической и математической статистики.

Эконометрика позволяет найти количественное подтверждение либо опровержение того или иного экономического закона либо гипотезы. Например, экономическая теория утверждает, что спрос на товар с ростом его цены убывает. Но при этом практически не исследованным остается вопрос, как быстро и по какому закону происходит это убывание. Эконометрика решает эту задачу для каждого конкретного случая. При этом используются реальные числовые данные, полученные из опыта, наблюдений (эмпирические данные).

Изучение экономических процессов (взаимосвязей) в эконометрике осуществляется через математические эконометрические модели. С помощью таблиц, графиков и диаграмм эти модели представляются в наглядной форме. Использование такого инструментария роднит эконометрику с экономической статистикой.

Мощным инструментом эконометрических исследований является аппарат математической статистики. В связи с тем, что большинство экономических показателей носит характер случайных величин, предсказать точные значения которых практически невозможно, использование методов математической статистики в эконометрике естественно и обосновано. Однако в силу специфики получения статистических данных в экономике (например, в экономике невозможно проведение управляемого эксперимента) эконометристам приходится использовать и собственные наработки, и специальные приемы анализа, которые в математической статистике не встречаются.

Экономико-математические методы – это комплекс экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.

В комплексе ЭММ можно выделить следующие дисциплины:

– *Эконометрика*. Одно из важнейших направлений эконометрики – это анализ временных рядов и построение прогнозов.

– *Экономическая кибернетика* – наука об управлении экономикой. Выделяют такие разделы этой дисциплины, как теория экономической информации, теория управляющих систем.

– *Математическая экономика*. Для нее характерен системный подход, т. е. экономика рассматривается как совокупность ее функциональных подсистем (производственной, финансово-кредитной, потребительской). Основными разделами являются теория производственных функций, теория спроса и потребления, межотраслевые балансы.

– *Методы исследования операций* в экономике. Методы исследования операций дают обоснование выбора оптимальной стратегии с учетом ограничений. Основные разделы – это математическое программирование, теория игр, сетевое планирование и управление.

– *Экспериментальные методы* (имитационное моделирование, деловые игры и др.). Имитационное моделирование позволяет построить на ЭВМ алгоритмическую модель некоторого экономического процесса и производить на ней эксперименты. Такой подход позволяет исследовать системы практически любой степени сложности.

Объектом исследования всех ЭММ являются социально-экономические системы. Под *социально-экономическими системами* понимают такие системы, в которых рассматриваются экономические, социальные, организационные или управленческие процессы.

Любая система обладает *свойством целостности*, т. е. ее свойства не сводятся к сумме свойств составляющих ее элементов. Таким образом, социально-экономическая система обладает такими свойствами, которых нет у каждого из ее элементов.

Можно выделить также следующие особенности этих систем, которые делают сложной задачу их исследования:

– процессы в этих системах являются динамическими, т. е. изменяются во времени;

– элементами системы являются люди, поведение которых трудно формализовать;

– на систему в значительной мере влияют внешние факторы, поэтому экономическую систему трудно изолировать от окружающей среды и исследовать в чистом виде;

– события в системе чаще всего носят случайный характер, и некоторые параметры системы не определены;

– количество переменных, которые описывают систему, очень велико;

– экономические явления и процессы носят массовый характер, поэтому выявление закономерностей требует большого числа наблюдений.

Целью исследования социально-экономических систем является решение следующих практических задач:

– анализ экономических объектов и процессов;

– экономическое прогнозирование, т. е. предвидение развития экономических процессов;

– выработка оптимальных управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Для сравнения управленческих решений необходимо ввести понятие «критерия оптимальности». *Критерий оптимальности* – это экономический показатель, на основании которого осуществляется выбор лучшего управленческого решения. Критерии оптимальности бывают натуральные и стоимостные, максимизируемые и минимизируемые. Например, к максимизируемым критериям относятся валовая, конечная, чистая продукция, прибыль, рентабельность; к минимизируемым – себестоимость, общие затраты и т. д. В моделях критерий оптимальности записывается в виде целевой функции.

Основным методом исследования социально-экономических систем является метод моделирования. *Моделированием* называется способ изучения реального объекта через рассмотрение подобного ему и более простого объекта, т. е. его модели. Таким образом, моделирование предполагает разработку модели, исследование этой модели и перенос результатов исследования на реальный объект.

Модель – это образ реального объекта, отражающий существенные свойства этого объекта и замещающий его в ходе исследования. Модель может быть материальной (образец, макет) или идеальной (описание, схема, график и т. д.).

Математической моделью называется формализованное на языке математики описание объекта или процессов, в нем протекающих. Математические модели имеют вид функций, уравнений, неравенств и их систем.

Сложность социально-экономических систем делает невозможным создание полной модели, учитывающей все без исключения факторы. Поэтому модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта и замещает оригинал в строго ограниченном смысле. В зависимости от целей моделирования для исследования одного и того же объекта могут использоваться различные модели.

Под *адекватностью модели* понимается ее соответствие исследуемым чертам и свойствам исходного объекта. Критерием адекватности является совпадение результатов моделирования и результатов эксперимента на реальном объекте.

Единой системы классификации моделей не существует. Имеются несколько признаков классификации. Рассмотрим некоторые из них:

1. ***По общему целевому назначению*** различают *теоретико-аналитические модели*, используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов, и *прикладные модели*, применяемые в решении конкретных экономических задач анализа, прогнозирования и управления.

2. ***По степени агрегирования объектов моделирования*** модели подразделяются на макроэкономические и микроэкономические. *Макроэкономические модели* отражают функционирование экономики как единого целого, а *микроэкономические модели* связаны, как правило, с такими звеньями экономики, как организации и фирмы.

3. ***По учету фактора времени*** выделяют *статические модели*, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени, и *динамические модели*, описывающие экономические системы в развитии.

4. ***По учету фактора неопределенности*** модели подразделяются на *детерминированные* и *стохастические*. Детерминированными называются модели объектов, состояние которых однозначно определяется через параметры, входную информацию и начальные условия. Если же состояние объекта зависит и от некоторых случайных величин, то модель является стохастической.

5. ***По типу математического аппарата***, используемого в модели, различают следующие виды моделей:

– *модели межотраслевого баланса* (*МОБ*), используемые для анализа и планирования обмена продукцией между отраслями народного хозяйства;

– *модели прогнозирования*, основная цель которых состоит в том, чтобы сделать прогноз, т. е. предсказать значение некоторого экономического показателя в момент времени, относящийся к будущему;

– *модели массового обслуживания*, которые позволяют выработать рекомендации по рациональному построению систем, предназначенных для обслуживания потока заявок (примерами таких систем являются магазины, организации бытового обслуживания, сети связи и т. д.);

– *модели управления запасами*, используемые для определения размера создаваемого запаса и момента времени его пополнения, при которых суммарные затраты склада были бы минимальными;

– *модели задач математического программирования*, которые предназначены для отыскания оптимального управленческого решения при наличии ряда ограничений;

– *модели сетевого планирования и управления*, используемые при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ;

– *модели теории игр*, применяемые для исследования конфликтных ситуаций, возникающих в условиях неопределенности.

Тема 1. КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

1.1. Основные теоретические сведения

Пусть имеется m торговых или промышленных объектов, деятельность которых необходимо оценить с точки зрения эффективности их работы. Каждый из них характеризуется значениями n экономических показателей $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Например, имеется четыре предприятия ($m = 4$), по каждому из которых имеются данные о товарообороте (X_1), охвате доходов населения (X_2), уровне издержек (X_3) и оборачиваемости капитала (X_4), т. е. всего $n = 4$ показателя (таблица 1).

Оценить деятельность торговых объектов сразу по всем показателям сложно: по товарообороту лучше всех работает один объект, по уровню издержек – другой и т. д. Поэтому для такой оценки используют следующий прием: рассчитывают *комплексные суммарные показатели работы* каждого торгового объекта (Q_i), которые учитывают влияние всех данных показателей. Считается, что наиболее эффективно работает тот торговый объект, у которого суммарный комплексный показатель наибольший.

Таблица 1 – **Показатели работы четырех предприятий**

Номера предприятий	Показатели			
	X_1, млн р.	X_2, %	X_3, %	X_4, дней
1-е	740	60	5,0	70
2-е	500	75	6,5	50
3-е	800	75	6,0	90
4-е	620	90	7,0	60

Однако, чтобы рассчитать комплексный суммарный показатель, нельзя просто просуммировать значения всех натуральных показателей, так как они имеют различный экономический смысл и свои единицы измерения (например, товарооборот измеряется в млн р., оборачиваемость – в днях и т. д.). Поэтому от каждого натурального показателя x_{ij} $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ переходят к безразмерному показателю Y_{ij}. Данный показатель не имеет единиц измерения и принимает значения от 0 до 1. Для перехода к *безразмерному показателю* используется одна из следующих формул:

$$Y_{ij} = \frac{x_{ij} - A_j}{B_j - A_j} \tag{1}$$

или

$$Y_{ij} = \frac{B_j - x_{ij}}{B_j - A_j}, \tag{2}$$

где i – номер объекта;

j – номер показателя;

A_j – минимальное значение для любого j-го показателя среди всех i объектов $(A_j = \min\limits_i x_{ij})$;

B_j – максимальное значение для любого j-го показателя среди всех i объектов $(B_j = \max\limits_i x_{ij})$.

Формула (1) выбирается для перехода к безразмерному показателю, когда по экономическому смыслу «чем больше значение показателя X_j, тем лучше», а формула (2) – когда «чем меньше значение показателя X_j, тем лучше».

Например, для перехода к безразмерному показателю для натурального показателя «товарооборот» будет применяться формула (1), потому что по экономическому смыслу «чем больше товарооборот, тем лучше». В результате применения этой формулы тот объект, который имеет наибольшее значение показателя X_j (т. е. работает лучше всех), получает значение $Y_{ij} = 1$. А тот объект, для которого X_j наименьшее (хуже всех работает), получает значение $Y_{ij} = 0$. Остальные объекты получают значения безразмерного показателя от нуля до единицы соответственно уровню относительного успеха их работы.

Для показателя «уровень издержек» будет применяться формула (2), потому что по экономическому смыслу «чем меньше уровень издержек, тем лучше». В результате применения этой формулы тот объект, который имеет наименьший уровень издержек (а значит, работает лучше всех по этому показателю), получит значение $Y_{ij} = 1$. Значение безразмерного показателя, равное 0, получит тот объект, у которого издержки были наибольшие.

Таким образом, безразмерный показатель не только позволяет обойти вопрос с единицами измерения, но и обеспечивает однозначное понимание того, какое значение является лучшим: для Y_{ij} лучше то значение, которое больше.

Далее находится суммарный комплексный показатель для каждого торгового объекта как сумма его безразмерных показателей:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \qquad (i = \overline{1, m}). \tag{3}$$

Иногда требуется проанализировать работу торговых объектов по нескольким натуральным показателям, причем важность каждого из них в анализе не одинакова. Для решения данной задачи каждому натуральному показателю назначается приоритет за счет введения *весовых коэффициентов* $P_j\,(j = \overline{1, n})$ (ранги, баллы и т. п.), которые принимают значение от 0 до 1. Чем больше весовой коэффициент, тем важнее считается показатель.

Например, товарооборот является наиболее важным показателем при анализе, следующий по важности – уровень издержек, а охват доходов населения и оборачиваемость капитала имеют гораздо меньшее значение. В этом случае можно назначить следующие весовые коэффициенты: $P_1 = 1$ (для товарооборота), $P_3 = 0{,}9$ (для уровня издержек) и $P_2 = P_4 = 0{,}7$ (для охвата доходов и оборачиваемости средств).

Суммарный комплексный показатель для каждого объекта в случае учета весовых коэффициентов находится по формуле

$$Q_i^* = \sum_{j=1}^{n} P_j Y_{ij} \qquad (i = \overline{1, m}). \tag{4}$$

Чем больше значение Q_i или Q_i^*, тем лучше оценивается работа объекта.

1.2. Пример решения задачи

Необходимо оценить торговую деятельность четырех предприятий ($m = 4$). Для оценки предлагается взять четыре показателя ($n = 4$):

– товарооборот (X_1), млн р.;
– охват доходов (X_2), %;
– уровень издержек (X_3), %;
– оборачиваемость (X_4), дней.

Исходные данные приведены в таблице 1.

Следует также учесть весовые коэффициенты показателей: $P_1 = 1$, $P_2 = 0{,}7$, $P_3 = 0{,}9$, $P_4 = 0{,}7$.

Порядок выполнения работы

Рассчитаем безразмерные показатели. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – **Комплексный анализ системы четырех предприятий**

Предприятия, i	Показатели, j								
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Q
1-е	740	60	5	70	0,8	0	1	0,5	2,3
2-е	500	75	6,5	50	0	0,5	0,25	1	1,75
3-е	620	90	7	60	0,4	1	0	0,75	2,45

Окончание таблицы 2

Предприятия, i	Показатели, j								
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Q
4-е	800	70	6	90	1	0,33	0,5	0	1,83
A = min	500	60	5,0	50	–	–	–	–	–
B = max	800	90	7,0	90	–	–	–	–	–
$B - A$	300	30	2,0	40	–	–	–	–	–

При переходе к безразмерным показателям для товарооборота (X_1) используем формулу (1), так как он по экономическому смыслу «чем больше, тем лучше»:

$A_1 = \min \{740, 500, 620, 800\} = 500;$
$B_1 = \max \{740, 500, 620, 800\} = 800;$
$B_1 - A_1 = 800 - 500 = 300;$
$Y_{11} = (740 - 500) : 300 = 0{,}8;$
$Y_{21} = (500 - 500) : 300 = 0;$
$Y_{31} = (620 - 500) : 300 = 0{,}4;$
$Y_{41} = (800 - 500) : 300 = 1.$

Для охвата доходов населения (X_2) также используем формулу (1), поскольку охват доходов «чем больше, тем лучше»:

$A_2 = \min \{60, 75, 90, 70\} = 60;$
$B_2 = \max \{60, 75, 90, 70\} = 90;$
$B_2 - A_2 = 90 - 60 = 30;$
$Y_{12} = (60 - 60) : 30 = 0;$
$Y_{22} = (75 - 60) : 30 = 0{,}5;$
$Y_{32} = (90 - 60) : 30 = 1;$
$Y_{42} = (70 - 60) : 30 = 0{,}33.$

Поскольку уровень издержек по экономическому смыслу «чем меньше, тем лучше», используем для перехода к безразмерным показателям формулу (2):

$A_3 = \min \{5, 6{,}5, 7, 6\} = 5;$
$B_3 = \max \{5, 6{,}5, 7, 6\} = 7;$
$B_3 - A_3 = 7 - 5 = 2;$
$Y_{13} = (7 - 5) : 2 = 1;$

$Y_{23} = (7 - 6{,}5) : 2 = 0{,}25;$
$Y_{33} = (7 - 7) : 2 = 0;$
$Y_{43} = (7 - 6) : 2 = 0{,}5.$

Аналогично для оборачиваемости в днях также применяется формула (2):

$A_4 = \min \{70, 50, 60, 90\} = 50;$
$B_4 = \max \{70, 50, 60, 90\} = 90;$
$B_4 - А_4 = 90 - 50 = 40;$
$Y_{14} = (90 - 70) : 40 = 0{,}5;$
$Y_{24} = (90 - 50) : 40 = 1;$
$Y_{34} = (90 - 60) : 40 = 0{,}75;$
$Y_{44} = (90 - 90) : 40 = 0.$

Найдем суммарные комплексные показатели для каждого предприятия, используя формулу (3):

$Q_1 = 0{,}8 + 0 + 1 + 0{,}5 = 2{,}3;$
$Q_2 = 0 + 0{,}5 + 0{,}25 + 1 = 1{,}75;$
$Q_3 = 0{,}4 + 1 + 0 + 0{,}75= 2{,}15;$
$Q_4 = 1 + 0{,}33 + 0{,}5 + 0 = 1{,}83.$

Анализ найденных комплексных показателей (Q_i) работы каждого предприятия показывает, что наиболее эффективно работает первое предприятие ($Q_1 = 2{,}15$).

Переоценим торговую деятельность предприятий с помощью весовых коэффициентов $P_1 = 1$, $P_2 = 0{,}7$, $P_3 = 0{,}9$, $P_4 = 0{,}7$ согласно формуле (4):

$Q_1^* = 0{,}8 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 2{,}05;$
$Q_2^* = 0 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}25 \cdot 0{,}9 + 1 \cdot 0{,}7 = 1{,}28;$
$Q_3^* = 0{,}4 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0{,}9 + 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 1{,}63;$
$Q_4^* = 1 \cdot 1 + 0{,}33 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0 \cdot 0{,}7 = 1{,}68.$

С учетом весовых коэффициентов наиболее эффективно работает первое предприятие ($Q_1^* = 2{,}05$).

1.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. С помощью суммарных комплексных показателей оцените торговую деятельность трех районных потребительских обществ по данным таблицы 3. Переоцените торговую деятельность районных потребительских обществ с помощью весовых коэффициентов $P_1 = P_4 = P_5 = 1$; $P_2 = P_3 = 0,9$; $P_6 = 0,8$.

Таблица 3 – **Торговая деятельность трех районных потребительских обществ**

Районные потребительские общества	Товарооборот на душу, р.	Производительность, тыс. р.	Охват доходов населения, %	Уровень издержек, %	Уровень прибыли, %	Фондоотдача
1-е	600	45	70	5	1,5	10
2-е	700	59	80	7	1,4	9
3-е	900	55	60	6	2	8

Вариант 2. Проанализируйте работу пяти универсамов по четырем натуральным показателям. Переоцените торговую деятельность универсамов, если заданы следующие весовые коэффициенты: $P_1 = P_3 = 1$; $P_2 = 0,9$; $P_4 = 0,8$.

Исходные данные представлены в таблице 4.

Таблица 4 – **Торговая деятельность пяти универсамов**

Универсамы	Уровень прибыли, %	Оборачиваемость, дней	Товарооборот за месяц, млн р.	Уровень издержек, %
«Любенский»	1,3	65	680	4
«Эдем»	1,2	110	750	7,2
«Ласточка»	2,2	87	800	6,1
«Сельмаш»	1,8	70	710	6,5
«Речицкий»	1,2	95	880	5,3

Вариант 3. С помощью суммарных комплексных показателей оцените деятельность четырех промышленных предприятий по четырем натуральным показателям (таблица 5). Проанализируйте, как изменятся комплексные оценки, если будут введены следующие весовые коэффициенты: $P_1 = P_3 = 1$; $P_2 = 0,9$; $P_4 = 0,8$.

Таблица 5 – **Показатели работы четырех промышленных предприятий**

Предприятия	Производительность, тыс. р.	Уровень рентабельности, %	Уровень прибыли, %	Фондоотдача
1-е	47	5,2	1,4	11
2-е	65	7,0	1,2	8
3-е	55	6,1	2,1	7
4-е	50	6,3	1,3	13

Вариант 4. Проанализируйте работу шести магазинов по трем натуральным показателям. Переоцените торговую деятельность магазинов, если заданы следующие весовые коэффициенты: $P_1 = 1$; $P_2 = 0{,}8$; $P_3 = 0{,}9$.

Исходные данные представлены в таблице 6.

Таблица 6 – **Торговая деятельность шести магазинов**

Магазины	Товарооборот за месяц, млн р.	Количество единиц ассортиментного перечня на единицу торговой площади	Уровень прибыли, %
1-й	210	70	1,3
2-й	305	80	1,2
3-й	440	65	2,1
4-й	370	68	1,7
5-й	510	72	1,4
6-й	590	76	2,0

Вариант 5. С помощью суммарных комплексных показателей оцените торговую деятельность четырех районных потребсоюзов (РПС) по данным таблицы 7. Переоцените торговую деятельность РПС с помощью весовых коэффициентов $P_1 = P_4 = 1$; $P_2 = P_3 = 0{,}9$; $P_5 = P_6 = 0{,}8$.

Таблица 7 – **Торговая деятельность четырех РПС**

РПС	Товарооборот на душу, р.	Производительность, тыс. р.	Охват доходов населения, %	Уровень издержек, %	Уровень прибыли, %	Фондоотдача
1-й	600	45	65	5,6	1,5	10,0
2-й	700	59	80	7,0	1,4	9,0
3-й	900	55	60	6,0	2,0	8,0
4-й	800	49	78	4,5	2,1	9,5

Вариант 6. Проанализируйте работу четырех супермаркетов по пяти натуральным показателям. Переоцените торговую деятельность универсамов, если заданы следующие весовые коэффициенты: $P_1 = P_3 = 1$; $P_2 = 0,9$; $P_4 = P_5 = 0,8$.

Исходные данные представлены в таблице 8.

Таблица 8 – **Торговая деятельность четырех супермаркетов**

Универсамы	Уровень прибыли, %	Оборачиваемость, дней	Товарооборот за день, млн р.	Количество единиц ассортиментного перечня на единицу торговой площади	Уровень издержек, %
«Экономаркет»	1,3	65	68	170	4,0
«Пятерочка»	1,2	110	75	180	7,2
«Росинка»	2,2	87	80	165	6,1
«Корона»	1,8	70	71	168	6,5

Вариант 7. Проанализируйте деятельность пяти промышленных предприятий по четырем натуральным показателям (таблица 9). Проанализируйте, как изменятся комплексные оценки, если будут введены следующие весовые коэффициенты: $P_1 = P_3 = 1$; $P_2 = 0,9$; $P_4 = 0,8$.

Таблица 9 – **Показатели работы пяти промышленных предприятий**

Предприятия	Производительность, тыс. р.	Энергоемкость производства, %	Уровень прибыли, %	Фондоотдача
1-е	247	5,2	1,4	11
2-е	165	7,0	1,2	8
3-е	155	6,1	2,1	7
4-е	250	6,3	1,3	13
5-е	167	4,9	2,2	12

Вариант 8. Проанализируйте работу пяти магазинов по четырем натуральным показателям. Переоцените торговую деятельность магазинов, если заданы следующие весовые коэффициенты: $P_1 = 1$; $P_2 = 0,9$; $P_3 = P_4 = 0,8$.

Исходные данные представлены в таблице 10.

Таблица 10 – **Торговая деятельность пяти магазинов**

Магазины	Товарооборот за месяц, млн р.	Количество единиц ассортиментного перечня на единицу торговой площади	Общая площадь торгового зала, $м^2$	Уровень прибыли, %
1-й	610	70	400	1,3
2-й	705	80	620	1,2
3-й	940	65	790	2,1
4-й	770	68	560	1,7
5-й	810	72	480	1,4

Вариант 9. С помощью суммарных комплексных показателей оцените торговую деятельность четырех магазинов по данным таблицы 11. Переоцените торговую деятельность магазинов с помощью весовых коэффициентов $P_1 = P_2 = P_5 = 1$; $P_3 = P_4 = 0{,}9$; $P_6 = 0{,}8$.

Таблица 11 – **Торговая деятельность четырех магазинов**

Магазины	Товарооборот, тыс. р.	Производительность, тыс. р.	Охват доходов населения, %	Уровень издержек, %	Уровень прибыли, %	Фондоотдача
1-й	600	45	70	5	1,5	10
2-й	700	59	80	7	1,4	9
3-й	900	55	60	6	2,0	8
4-й	890	48	68	6	1,2	9

Вариант 10. Проанализируйте работу четырех супермаркетов по пяти натуральным показателям. Переоцените торговую деятельность супермаркетов, если заданы следующие весовые коэффициенты: $P_1 = P_2 = 1$; $P_3 = 0{,}9$; $P_4 = 0{,}8$.

Исходные данные представлены в таблице 12.

Таблица 12 – **Торговая деятельность четырех супермаркетов**

Супермаркеты	Товарооборот за месяц, млн р.	Количество единиц ассортиментного перечня на единицу торговой площади	Общая площадь торгового зала, $м^2$	Уровень прибыли, %
1-й	810	70	890	1,3
2-й	705	80	920	1,2
3-й	940	65	1190	2,1
4-й	770	68	1260	1,7

Контрольные вопросы

1. Какой выделяют основной метод исследования сложных систем?
2. Что является целью исследования социально-экономических систем?
3. Как называется экономический показатель, на основании которого осуществляется выбор лучшего управленческого решения?
4. Что такое адекватность модели?
5. Как называется показатель Y_{ij}? Каков диапазон изменения его значений?
6. Какой показатель используется для определения лучшего объекта в комплексном анализе эффективности работы экономических объектов?
7. С какой целью учитываются весовые коэффициенты при расчете суммарных комплексных показателей?

Тема 2. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

2.1. Основные теоретические сведения

Метод сетевого планирования и управления используется при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ. Анализ сетевой модели позволяет:

– четко выявить взаимосвязь различных этапов проекта, условия начала тех или иных работ;

– определить срок выполнения проекта;

– выявить возможности задержки начала каждой работы или удлинения срока ее выполнения;

– оптимизировать время выполнения проекта или ресурсы, требуемые для его выполнения.

2.1.1. Сетевой график и правила его построения

Основой метода сетевого планирования является сетевой график – графическая модель некоторого комплекса взаимосвязанных работ (проекта или производственного процесса). Сетевой график отражает логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него работ. С математической точки зрения, сетевой график представляет собой ориентированный граф без контуров, дугам которого приписаны некоторые числовые значения.

Дугам графа соответствуют работы. ***Работой*** называется любой процесс, происходящий во времени. Различают три вида работ:

1. *Действительная работа* (————→) – это любой трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность (разработка проекта, подвоз материалов, монтаж оборудования и т. д.).

2. *Ожидание* (— · — ·→) – это процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность (затвердение бетона, сушка штукатурки, рост растений и т. д.).

3. *Фиктивная работа* (—— →) отражает логическую зависимость между действительными работами. Не требует ресурсов и имеет нулевую продолжительность.

Над дугой может быть указана числовая характеристика работы (например, время ее выполнения).

Вершинам графа соответствуют события. *Событие* означает факт окончания всех работ, в него входящих, и начала всех работ, из него исходящих. Событие не имеет продолжительности и не потребляет ресурсов. Событие в сетевом графике имеет номер. Событие, с которого начинается выполнение проекта, называется *исходным* и обозначается I. Исходное событие не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим* и обозначается S. Завершающее событие не имеет последующих работ.

Работа может обозначаться двумя способами:

– парой номеров (i, j), где i – номер начального события работы, j – номер конечного события работы;

– буквенно-числовым обозначением с номером работы: a_1, b_2 и т. д.

Продолжительность работы обозначается $t\ (i, j)$.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

– В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга.

– Не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одной дуги.

– Сетевой график не должен содержать контуров.

– Любая пара событий сетевого графика может быть соединена не более чем одной дугой. Если нужно изобразить параллельно выполняемые работы с общими начальными и конечными событиями, то рекомендуется ввести дополнительные события и соединить их с последующими фиктивными работами. Пусть, например, имеются три различные работы a_1, a_2 и a_3, которые начинаются одним событием 2 и заканчиваются одним событием 5 (рисунок 1). В этой ситуации может возникнуть путаница из-за того, что различные работы имеют одно и то же обозначение (2, 5). Чтобы избежать этого, введем фиктивные работы, как показано на рисунке 2.

– События должны быть пронумерованы так, чтобы для любой работы (i, j) номер конечного события был больше номера начального события ($j > i$).

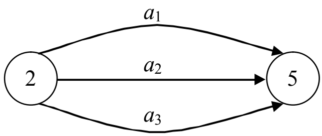


Рисунок 1 – **Фрагмент неверного сетевого графика**

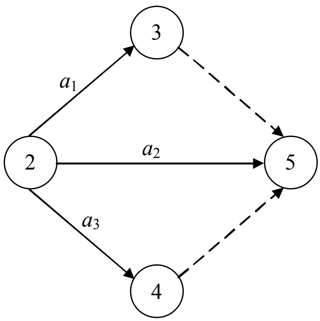


Рисунок 2 – **Правильное изображение параллельных работ**

2.1.2. Временные параметры сетевого графика

К основным параметрам сетевого графика относятся продолжительность выполнения всего проекта (критический срок), сроки свершения и резервы времени событий, сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Полный путь в сетевом графике – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих исходное и завершающее событие. Продолжительность пути равна сумме длительностей принадлежащих ему работ. ***Критическим*** называется полный путь, имеющий *наи-*

большую продолжительность во времени. Его продолжительность определяет критическое время (или критический срок) проекта $t_{кр}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего проекта. Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Критический срок, таким образом, показывает, за какое *минимальное* время может быть завершен весь проект. Очевидно, что увеличение сроков выполнения проекта больше $t_{кр}$ также невыгодно.

Временные параметры событий являются основой для расчета параметров работ. Рассмотрим один из способов определения этих параметров, основанный на методе динамического программирования.

Ранний срок свершения события – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$\begin{cases} t_p(I) = 0 \\ t_p(j) = \max\limits_{i \to j} \{t_p(i) + t(i,j)\}, \end{cases}$$

где $i \to j$ – множество работ, заканчивающихся j-м событием (дуги, входящие в вершину j);

$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i, j);

$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Ранний срок свершения завершающего события совпадает с критическим сроком: $t_{кр} = t_p(S)$.

Поздний срок свершения события – это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием, к критическому сроку:

$$\begin{cases} t_n(S) = t_p(S) = t_{кр} \\ t_n(i) = \min\limits_{i \to j} \{t_n(j) - t(i,j)\}, \end{cases}$$

где $i \to j$ – множество работ, начинающихся i-м событием (дуги, исходящие из вершины i);

$t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i, j);

$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Резерв времени события показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока свершения всего проекта. Резерв времени события равен разности между его поздним и ранним сроком свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Для событий, принадлежащих критическому пути, ранний и поздний сроки свершения совпадают. Поэтому критические события не имеют резерва времени.

Временные параметры работ определяются на основе параметров свершения событий.

Ранний срок начала работы равен раннему сроку свершения начального события работы:

$$t_{рн}(i, j) = t_p(i).$$

Ранний срок окончания работы равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности:

$$t_{po}(i, j) = t_p(i) + t(i, j).$$

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:

$$t_{no}(i, j) = t_n(j).$$

Полный резерв времени работы – это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R(i, j) = t_{no}(i, j) - t_{po}(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j).$$

Критические работы резервов времени не имеют.

2.2. Пример решения задачи

Туристская фирма готовится принять участие в выставке-ярмарке туристских услуг. Перечень работ, которые необходимо выполнить в процессе подготовки, приведен в таблице 13.

Таблица 13 – **Перечень работ туристской фирмы**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дней
Разработка дизайна проекта экспозиции	a_1	–	4
Определение рекламной стратегии	a_2	–	2
Определение количества и видов рекламно-информационных материалов	a_3	a_2	1
Заказ оборудования и рекламных материалов, оплата счетов	a_4	a_1, a_3	5
Заключение договора на участие и оплата аренды	a_5	a_2	2
Доставка оборудования, экспонатов и рекламных материалов	a_6	a_4, a_5	4
Техническое оформление стендов	a_7	a_6	5
Обучение и инструктаж персонала	a_8	a_2	3

Требуется выполнить следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.

Порядок выполнения работы

1. *Построение сетевого графика.* Обозначим номером 1 событие начала всего проекта (исходное событие). Имеется две работы (a_1 и a_2), которые не имеют предшествующих работ. Следовательно, они начинаются с началом выполнения проекта. Изобразим их в виде дуг графа (стрелочек), выходящих из вершины 1 (исходного события). Над каждой дугой будем записывать наименование работы и в скобках ее продолжительность (рисунок 3).

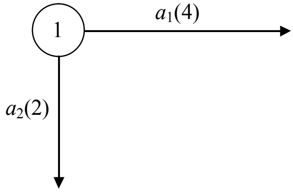


Рисунок 3 – **Шаг 1 построения сетевого графика**

Работе a_3 предшествует работа a_2. Это означает, что работа a_2 должна закончится для того, чтобы могла начаться работа a_3. Обозначим номером 2 событие окончания работы a_2. Тогда на сетевом графике работа a_3 выходит из события 2, т. е. следует непосредственно за дугой a_2 (рисунок 4).

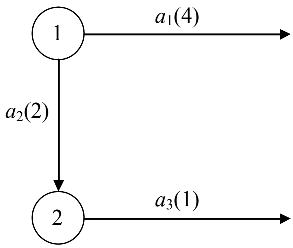


Рисунок 4 – **Шаг 2 построения сетевого графика**

Работе a_4 предшествуют две работы: a_1 и a_3. Поэтому должно существовать событие, обозначающее факт окончания этих двух работ. Дуги a_1 и a_3 направим к одной вершине и обозначим ее следующим номером 3. Дуга a_4 выходит из вершины 3. Таким образом, событие 3 обозначает факт окончания работ a_1 и a_3 и начала работы a_4 (рисунок 5).

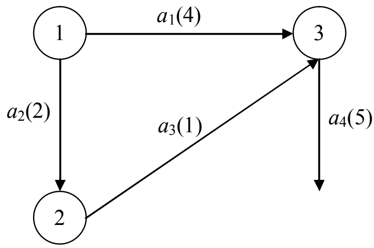


Рисунок 5 – **Шаг 3 построения сетевого графика**

Работе a_5 предшествует работа a_2. На графике уже имеется событие, обозначающее факт окончания этой работы (событие 2). Поэтому изобразим работу a_5 в виде дуги, выходящей из вершины 2 (рисунок 6).

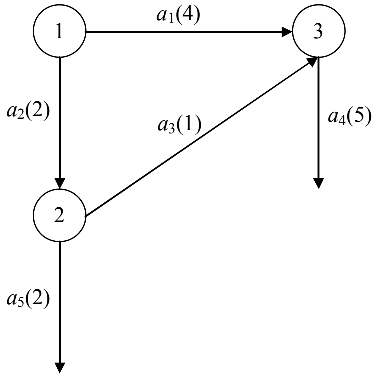


Рисунок 6 – **Шаг 4 построения сетевого графика**

Работе a_6 предшествуют две работы: a_4 и a_5. Поэтому направим дуги a_4 и a_5 к одной вершине и обозначим ее номером 4. Событие 4 обозначает факт окончания обеих работ a_4 и a_5 и начала работы a_6 (рисунок 7).

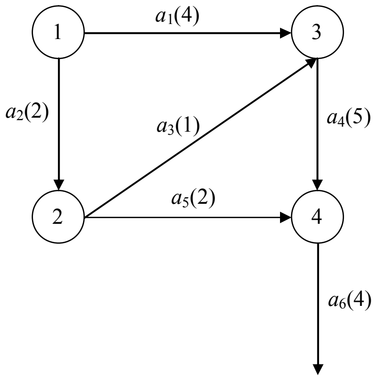


Рисунок 7 – **Шаг 5 построения сетевого графика**

Работе a_7 предшествует работа a_6. Обозначим событие окончания этой работы номером 5. Тогда дуга a_7 выходит из этого события, т. е. непосредственно следует за дугой a_6. Работе a_8 предшествует работа a_2. На сетевом графике уже имеется событие, обозначающее факт окончания работы a_2. Это событие 2. Поэтому изобразим дугу a_8 выходящей из вершины 2. Результат этих построений показан на рисунке 8.

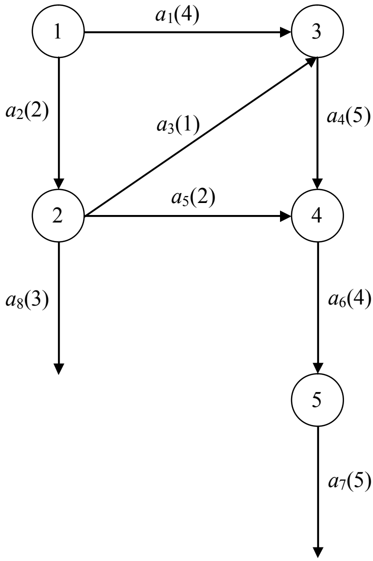


Рисунок 8 – **Шаг 6 построения сетевого графика**

Итак, на графике построены все работы, перечисленные в таблице 13. Поскольку сетевой график должен иметь только одно завершающее событие, дуги a_7 и a_8 направим к одной вершине, которой дадим номер 6. Эта вершина представляет собой факт завершения работ a_7 и a_8, а следовательно, и всего проекта (рисунок 9).

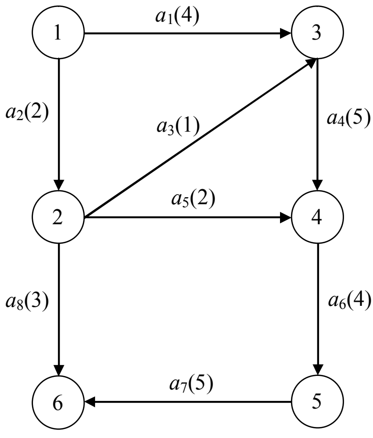


Рисунок 9 – **Итоговый сетевой график примера**

2. *Определение критического пути в сетевом графике*. Критический путь есть полный путь наибольшей продолжительности. Поэтому для его определения можно перебрать все полные пути в сетевом графике и выбрать тот, который имеет наибольшую продолжительность во времени. В нашем графике можно выделить следующие полные пути (обозначая их вершины):

$\mu_1 = (1–2–3–4–5–6)$;
$\mu_2 = (1–3–4–5–6)$;
$\mu_3 = (1–2–4–5–6)$;
$\mu_4 = (1–2–6)$.

Продолжительности этих полных путей следующие:

$t(\mu_1) = 2 + 1 + 5 + 4 + 5 = 17$;
$t(\mu_2) = 4 + 5 + 4 + 5 = 18$;
$t(\mu_3) = 2 + 2 + 4 + 5=13$;
$t(\mu_4) = 2 + 3 = 5$;

Таким образом, наибольшую продолжительность во времени, равную 18, имеет путь μ_2, который и является критическим. Критический срок проекта равен 18 дней, т. е. это минимальный срок, за который будет выполнен проект. Однако такой способ определения критического пути в сетевом графике может быть использован только тогда, когда график является достаточно простым. В случае сложного графика, с большим количеством событий и работ, можно пропустить какой-либо полный путь и получить неверный результат. Способ, основанный на определении временных параметров событий и работ, излагаемый ниже, является более универсальным.

3. *Расчет параметров событий сетевого графика*. Выполним вычисления непосредственно на графике. Каждый кружок, изображающий событие, разделим на четыре сектора (рисунок 10).

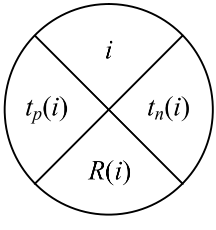


Рисунок 10 – **Представление параметров события на сетевом графике**

В верхнем секторе запишем номер события, в левом по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_p(i)$ свершения события i, в правом – поздний срок $t_n(i)$ этого события, а в нижнем – резерв времени $R(i)$ события.

Определение ранних сроков свершения событий

Ранний срок свершения исходного события 1 по определению принимается за 0. Событие 2 наступит по окончании работы a_2, которая начинается в момент времени 0 и продолжается 2 дня. Поэтому ранний срок свершения события 2 рассчитываем как момент окончания этой работы:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1, 2) = 0 + 2 = 2.$$

Событие 3 есть факт окончания двух работ: a_1 и a_3. Работа a_1 закончится в момент времени $t_p(1) + t(1, 3) = 0 + 4 = 4$, а работа a_3 закончится в момент $t_p(2) + t(2, 3) = 2 + 1 = 3$. Поскольку событие 3 наступит тогда, когда обе работы a_1 и a_3 завершатся, нужно ориентироваться на ту работу, которая закончится позже:

$$t_p(3) = \max \left\{ t_p(1) + t(1, 2); t_p(2) + t(2, 3) \right\} =$$
$$= \max\left\{ 4, 3 \right\} = 4.$$

Аналогично рассчитывается ранний срок свершения события 4, которое есть факт окончания работ a_4 и a_5:

$$t_p(4) = \max \left\{ t_p(2) + t(2, 4); t_p(3) + t(3, 4) \right\} =$$
$$= \max\left\{ 2 + 2; 4 + 5 \right\} = 9.$$

Событие 5 наступит, когда закончится работа a_6. Поэтому его ранний срок свершения

$$t_p(5) = t_p(4) + t(4, 5) = 9 + 4 = 13.$$

Ранний срок свершения события 6, в которое входят две работы a_7 и a_8, рассчитывается аналогично событиям 3 и 4:

$$t_p(6) = \max\left\{t_p(2) + t(2,6);\, t_p(5) + t(5,6)\right\} =$$
$$= \max\left\{2 + 3;\, 13 + 5\right\} = 18.$$

Таким образом, при расчете раннего срока свершения события j нужно определить максимум величин $t_p(i) + t(i, j)$ по всем входящим в соответствующую вершину дугам.

Результаты расчетов представлены в левых секторах событий на рисунке 11. Ранний срок свершения завершающего события проекта есть критический срок проекта, т. е. минимальное время, в течение которого может быть завершен проект. В нашей задаче

$$t_{кр} = t_p(6) = 18.$$

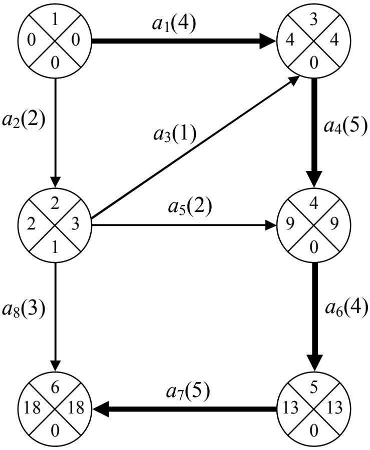


Рисунок 11 – **Параметры событий сетевого графика**

Определение поздних сроков свершения событий

Поздние сроки свершения событий рассчитываются «обратным ходом», от завершающего события к исходному. Поздний срок свершения завершающего события 6 равен его раннему сроку свершения (или критическому сроку):

$$t_n(6) = t_p(6) = t_{кр} = 18.$$

Поздний срок свершения события 5 – это такой самый поздний срок, после которого остается ровно столько времени, сколько требуется для того, чтобы следующая за событием 5 работа a_7 (выходящая из вершины 5 дуга) успела закончиться к критическому сроку. Чтобы эта работа, которая длится 5 дней, закончилась к 18-му дню, она должна начаться на 13-й день (18 – 5 = 13). Поэтому

$$t_n(5) = t_n(6) - t(5, 6) = 18 - 5 = 13.$$

За событием 4 следует работа a_6. Она должна закончится к 13-му дню для того, чтобы следующая за ней работа успела к критическому сроку. Поэтому работа a_6 должна начаться на 9-й день:

$$t_n(4) = t_n(4) - t(4, 5) = 13 - 4 = 9.$$

Аналогично для события 3, которым начинается одна работа a_4:

$$t_n(3) = t_n(3) - t(3, 4) = 9 - 5 = 4.$$

Событием 2 начинаются сразу три работы a_3, a_5 и a_8 (дуги, выходящие из вершины 2). Для событий 3, 4 и 6, означающих соответствующие моменты окончания этих работ, поздние сроки свершения уже рассчитаны. Поэтому работа a_3 должна начаться не позднее $t_n(3) - t(2, 3) = 4 - 1 = 3$ дней, работа a_5 – не позднее $t_n(4) - t(2, 4) = 9 - 2 = 7$ дней, а работа a_8 – не позднее $t_n(6) - t(2, 6) = 18 - 3 = 15$ дней. Чтобы удовлетворить эти требования для всех трех работ, нужно ориентироваться на минимальный из этих сроков. Поэтому

$$t_n(2) = \min(3; 7; 15) = 3.$$

Таким образом, при расчете позднего срока свершения события i нужно брать минимум величин $t_n(j) - t(i, j)$ по всем исходящим из данной вершины дугам.

Аналогично для события 1:

$$t_n(1) = \min\{t_n(3) - t(1, 3); t_n(2) - t(1, 2)\} = \min\{4 - 4; 3 - 2\} = 0.$$

При правильных расчетах поздний срок исходного события должен получиться равным 0, а поздний срок свершения события никогда не должен быть меньше раннего.

Результаты расчетов показаны на графике в правых секторах событий (см. рисунок 11).

Определение резервов времени событий

Резерв времени события определяется как разность между поздним и ранним сроками свершения этого события:

$R(1) = t_n(1) - t_p(1) = 1 - 1 = 0;$
$R(2) = t_n(2) - t_p(2) = 3 - 2 = 1$ и т. д.

Резервы времени событий показаны в нижних секторах событий на рисунке 11.

4. *Определение критического пути на основании временных параметров событий*. Как известно, критические события не имеют резерва времени. Поэтому критический путь пройдет по событиям 1, 3, 4, 5, 6. Сумма продолжительности критических работ должна быть равна критическому сроку проекта. Проверим это:

$$t(1, 3) + t(3, 4) + t(4, 5) + t(5, 6) = 4 + 5 + 4 + 5 = 18 = t_{кр}.$$

Критический путь выделен на сетевом графике.

5. *Определение параметров работ*. Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют. Поэтому будем рассматривать только некритические работы. Расчеты полного резерва времени и других параметров для некритических работ приведены в таблице 14.

Таблица 14 – **Параметры некритических работ примера**

Работы	$t_{рн}(i,j)$	$t_{ро}(i,j)$	$t_{по}(i,j)$	$R(i,j)$
(1, 2)	0	2	3	1
(2, 3)	2	3	4	1
(2, 4)	2	4	9	5
(2, 6)	2	5	18	13

Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком свершения начального события работы:

$t_{рн}(1, 2) = t_р(1) = 0;$
$t_{рн}(2, 3) = t_р(2) = 2$ и т. д.

Ранний срок окончания работы рассчитывается как сумма раннего срока начала и продолжительности работы:

$t_{ро}(1, 2) = t_{рн}(1, 2) + t(1, 2) = 0 + 2 = 2;$
$t_{ро}(2, 3) = t_{рн}(2, 2) + t(2, 3) = 2 + 1 = 3$ и т. д.

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения конечного события работы:

$t_{по}(1, 2) = t_п(2) = 3;$
$t_{по}(2, 3) = t_п(3) = 4$ и т. д.

Резерв времени работы равен разности между поздним и ранним сроками ее окончания:

$R(1, 2) = t_{по}(1, 2) – t_{ро}(1, 2) = 3 – 2 = 1;$
$R(2, 3) = t_{по}(2, 3) – t_{ро}(2, 3) = 4 – 3 = 1$ и т. д.

Итак, данный проект может быть выполнен за 18 дней. При этом работы a_1, a_4, a_6 и a_7 являются критическими, т. е. должны быть выполнены точно в срок. Работы a_2, a_3, a_5 и a_8 имеют резервы времени, т. е. они могут быть начаты позже или выполняться дольше, чем их объявленная продолжительность, на величину этого резерва. При этом срок выполнения всего проекта не изменится.

2.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Торговая фирма рассматривает возможность перевода одного из своих магазинов на самообслуживание. Перечень необходимых работ приведен в таблице 15.

Таблица 15 – **Работы по переводу магазина на самообслуживание**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Составление сметы	a_1	–	5
Приобретение оборудования	a_2	a_1	10

Окончание таблицы 15

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Подбор кадров	a_3	a_1	6
Монтаж оборудования	a_4	a_2	6
Подготовка кадров	a_5	a_3	3
Оформление торгового зала	a_6	a_4	8
Доставка товаров	a_7	a_1	6
Заказ и получение ценников	a_8	a_1	8
Заказ и получение форменной одежды	a_9	a_3	14
Выкладка товаров	a_{10}	a_7, a_6	2
Заполнение ценников	a_{11}	a_8	4
Открытие магазина	a_{12}	a_9, a_{10}, a_{11}	3

Необходимо сделать следующее:
1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.
Ответ: $t_{кр} = 34$.

Вариант 2. Фирма «Астра» запланировала реконструкцию своего офиса. Перечень работ, которые необходимо для этого выполнить, приведен в таблице 16.

Таблица 16 – **Работы по реконструкции офиса**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Определение объема реконструкции	a_1	–	5
Выбор проекта реконструкции	a_2	a_1	5
Составление сметы затрат	a_3	a_1	10
Выбор строительной организации	a_4	a_3	3
Получение финансового обеспечения	a_5	a_3	5
Экономическое обоснование проекта	a_6	a_2	4
Привязка проекта к условиям фирмы	a_7	a_6	5

Окончание таблицы 16

Содержание работ	Обозначение	Предшест-вующие работы	Продолжи-тельность, дней
Составление договора на выполнение работ	a_8	a_4, a_7	3
Работа по реконструкции	a_9	a_5, a_8	25

Необходимо сделать следующее:
1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.

Ответ: $t_{кр} = 47$.

Вариант 3. Предприятие рассматривает предложение о строительстве новой турбазы. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, приведены в таблице 17.

Таблица 17 – **Работы по строительству новой турбазы**

Содержание работ	Обозначение	Предшест-вующие работы	Продолжи-тельность, дней
Определить место строительства	a_1	–	3
Разработать первоначальный проект	a_2	a_1	8
Получить разрешение на строительство	a_3	a_1	15
Выбрать архитектурную мастерскую	a_4	a_2	3
Заключить договор с архитектурной мастерской	a_5	a_3, a_4	5
Разработать смету затрат на строительство	a_6	a_1	4
Закончить разработку проекта	a_7	a_5	5
Получить финансовое обеспечение	a_8	a_6	3
Нанять подрядчика	a_9	a_7, a_8	2

Необходимо сделать следующее:
1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.

Ответ: $t_{кр} = 30$.

Вариант 4. Процесс организации поставки товаров покупателю на оптовой базе райпотребсоюза может быть представлен в виде некоторого комплекса работ (таблица 18).

Таблица 18 – **Работы по поставке товара покупателю на оптовой базе райпотребсоюза**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, ч
Отбор товаров	a_1	–	2
Подготовка к отправке	a_2	a_1	3
Выписка накладных	a_3	a_1	1
Проверка цен	a_4	a_3	1
Оформление отчета	a_5	a_3	1
Таксировка	a_6	a_2, a_4	1
Заказ автомашины и погрузка товаров	a_7	a_2, a_4	5
Отправление счета в банк и покупателю	a_8	a_5, a_6	1
Оплата счета	a_9	a_8	25
Перевозка товаров	a_{10}	a_7	10
Выгрузка и сверка с документами	a_{11}	a_9, a_{10}	4

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого процесса.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требуемое на поставку товара.

Ответ: $t_{кр} = 36$.

Вариант 5. В таблице 19 приведен перечень работ по организации выставки образцов продукции.

Таблица 19 – **Работы по организации выставки**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Отбор образцов	a_1	–	5
Изготовление рекламных материалов	a_2	a_1	3
Изготовление стендов	a_3	a_1	10
Доставка образцов в выставочный зал	a_4	a_1	2

Окончание таблицы 19

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Доставка стендов в выставочный зал	a_5	a_3	2
Монтаж стендов	a_6	a_5	5
Установка образцов на стендах	a_7	a_4, a_6	3
Оформление зала рекламными материалами	a_8	a_7, a_2	2
Репетиция открытия выставки	a_9	a_8	1

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого комплекса работ.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требуемое для организации выставочного зала.

Ответ: $t_{кр} = 28$.

Вариант 6. Иванова А. И. собирается отметить с друзьями и сослуживцами свой 60-летний юбилей. Перечень работ по организации праздника приведен в таблице 20.

Таблица 20 – **Работы по организации юбилея**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, ч
Составление списка приглашенных	a_1	–	1
Выбор помещения	a_2	a_1	5
Рассылка приглашений	a_3	a_1	2
Составление меню	a_4	a_1	4
Подготовка музыкального сопровождения	a_5	a_1	3
Подготовка помещения для проведения праздника	a_6	a_2	6
Уточнение списка приглашенных	a_7	a_3	1
Покупка продуктов	a_8	a_4	8
Приготовление ужина	a_9	a_8	7
Сервировка стола	a_{10}	a_7, a_6, a_9	3

Необходимо сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на подготовку праздника.

Ответ: $t_{кр} = 23$.

Вариант 7. Университет рассматривает проект открытия нового дисплейного класса. Перечень работ приведен в таблице 21.

Таблица 21 – **Работы по открытию нового дисплейного класса**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Выбор помещения	a_1	–	2
Покупка мебели	a_2	–	5
Покупка ПК	a_3	–	4
Ремонт помещения	a_4	a_1	15
Доставка мебели	a_5	a_2	3
Монтаж сетевого оборудования	a_6	a_4	6
Доставка ПК	a_7	a_3	2
Установка мебели	a_8	a_5, a_6	8
Установка ПК	a_9	a_7, a_8	10

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на реализацию проекта.

Ответ: $t_{кр} = 41$.

Вариант 8. На мебельной фабрике предполагается организовать производство новой модели мягкой мебели. Перечень необходимых для этого работ приведен в таблице 22.

Таблица 22 – **Состав работ по организации производства мягкой мебели**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Разработка эскиза	a_1	–	6
Разработка лекал и чертежей	a_2	a_1	10

Окончание таблицы 22

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Настройка оборудования для производства новой модели	a_3	a_1	7
Покупка материалов	a_4	a_2	3
Изготовление деталей каркаса	a_5	a_3, a_4	4
Раскрой обивочной ткани	a_6	a_3, a_4	1
Раскрой поролона	a_7	a_3, a_4	1
Сборка каркаса	a_8	a_5	1
Пошив чехлов	a_9	a_6	5
Сборка изделия	a_{10}	a_7, a_8, a_9	2

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на организацию производства новой модели.

Ответ: $t_{кр} = 27$.

Вариант 9. Фирма планирует перевести один из своих магазинов на самообслуживание. Перечень работ приведен в таблице 23.

Таблица 23 – **Работы по переводу магазина на самообслуживание**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Составление сметы	a_1	–	5
Покупка оборудования	a_2	a_1	10
Подбор кадров	a_3	a_1	6
Установка оборудования	a_4	a_2	6
Подготовка кадров	a_5	a_3	3
Подготовка торгового зала	a_6	a_4	8
Доставка товаров	a_7	a_1	6
Получение ценников	a_8	a_1	8
Получение форменной одежды	a_9	a_3	14
Выкладка товаров	a_{10}	a_7, a_6	2
Заполнение ценников	a_{11}	a_8	4
Открытие магазина	a_{12}	a_9, a_{10}, a_{11}	3

Необходимо сделать следующее:
1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.
Ответ: $t_{кр} = 34$.

Вариант 10. Смирнов К. С. собирается отметить с коллективом свой юбилей. Перечень работ по организации праздника приведен в таблице 24.

Таблица 24 – **Организация юбилея**

Содержание работ	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, ч
Составление перечня приглашенных	a_1	–	1
Выбор помещения	a_2	a_1	5
Рассылка пригласительных	a_3	a_1	2
Составление меню	a_4	a_1	4
Подготовка музыкальной программы	a_5	a_1	3
Оформление помещения для проведения праздника	a_6	a_2	6
Уточнение списка приглашенных	a_7	a_3	1
Закупка продуктов	a_8	a_4	8
Приготовление блюд	a_9	a_8	7
Сервировка стола	a_{10}	a_7, a_6, a_9	3

Необходимо сделать следующее:
1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на подготовку праздника.
Ответ: $t_{кр} = 23$.

Контрольные вопросы

1. Какие практические задачи могут быть решены с помощью метода сетевого планирования?

2. Что собой представляет сетевой график? Моделями чего являются его элементы и график в целом?

3. Какие бывают виды работ? Как они изображаются на сетевом графике?

4. Что такое событие? Какие события называются исходными и завершающими?

5. Как обозначаются события, работы и продолжительности работ?

6. Каковы правила построения сетевых графиков?

7. Что такое критический путь? Какую роль он играет в методе сетевого планирования?

8. Какие бывают временные параметры событий? Каково их смысловое определение? В чем заключается методика расчета?

9. Какие бывают временные параметры работ? Как они могут быть рассчитаны?

Тема 3. МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

3.1. Основные теоретические сведения

Ситуация называется конфликтной, если в ней участвуют стороны, интересы которых не совпадают. Конфликт может возникнуть также из-за различия целей, которые отражают многосторонние интересы одного и того же лица.

Результат конфликта зависит от действий каждой из сторон. Так как ни один из участников не знает действий, которые могут предпринять остальные участники, то решения принимаются в условиях неопределенности. Неопределенность исхода конфликтной ситуации может зависеть не только от сознательных действий участников, но и от действий некоторых сил непознанной природы, стечения обстоятельств.

Конфликтные ситуации в экономике:

– взаимоотношения между поставщиком и спросом потребителей;

– взаимоотношения между покупателем и продавцом;

– взаимоотношения между банком и клиентом.

Конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать решения, которые в наибольшей степени реализуют поставленные цели. При принятии решения каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения партнера.

Игрой называется модель конфликтной ситуации, проводимой в условиях неопределенности.

Игроками называются участники конфликта.

Модель игры строится на основе *правил игры* – системы допустимых действий каждого из игроков и результатов, к которым приводит каждая совокупность действий.

Теория игр – математическая теория, которая разрабатывает научно обоснованные методы рационального решения задач с конфликтными ситуациями.

Математической моделью игры называется формализованное представление игры.

Стратегией игрока называется действие игрока, допустимое правилами игры. Стратегии игроков могут быть:

– осознанными – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре);

– случайными – это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды).

Платежом называется количественная оценка результата игры при применении игроками их определенных стратегий. Платеж равен выигрышам одних игроков и проигрышам других.

Если игра повторяется более одного раза, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш во всех партиях.

Когда говорят о результате, или среднем результате, игры, то предполагают, что этот результат выражается определенным числом. Но так бывает не всегда. Например, в шахматах результат игры выражается словами «выигрыш», «проигрыш», «ничья». Но их можно перевести в числовую форму, например, выигрышу приписать значение +1, проигрышу – –1, ничьей – 0.

В теории игр предполагается, что в любом конфликте выигрыш (проигрыш) каждого из игроков выражается числом. Тогда *основную задачу теории игр* можно сформулировать так: «Как должен вести себя (какую стратегию применить) разумный игрок в конфликте с разумным противником (или противниками), чтобы обеспечить себе в среднем наибольший возможный выигрыш?»

Платежной функцией называется функция, которая каждому возможному упорядоченному набору стратегий игроков ставит в соответствие значение платежа.

Оптимальными стратегиями игроков называются стратегии, обладающие свойством устойчивости: любому из игроков невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии в игре.

Ценой игры называется средний платеж, на который вправе рассчитывать игроки, если они будут придерживаться своих оптимальных стратегий.

Решить игру, или найти решение игры, означает определить оптимальную стратегию для каждого игрока и цену игры.

В зависимости от количества игроков игра может быть:

– парной, если в ней участвуют два игрока;

– множественной, если число игроков больше двух.

В зависимости от характера выигрыша игра может быть:

– с нулевой суммой, если сумма платежей игроков равна нулю (проигрыш рассматривается как отрицательный выигрыш); в случае парной игры это означает, что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого;

– с ненулевой суммой, если сумма платежей игроков не равна нулю, например, при организации лотереи часть общего взноса участников не участвует в формировании призового фонда, а идет организатору лотереи.

В зависимости от способа выбора игроками своих стратегий игра может быть:

– стратегической, в которой оба участника сознательно стремятся выбрать вариант поведения для получения ими наилучшего результата; в такой игре при выборе оптимальных стратегий предполагается, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов;

– статистической, или игрой с природой, в которой один из участников безразличен к результату игры и его поведение носит случайный характер.

В зависимости от числа стратегий игра может быть:

– конечной, если у каждого игрока есть конечное число стратегий;

– бесконечной – в противном случае.

В зависимости от возможности предварительных переговоров между игроками игра может быть:

– кооперативной, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимно обязывающие соглашения о своих стратегиях;

– некооперативной, если игроки не могут координировать свои стратегии.

Например, все стратегические игры могут служить примером некооперативных игр. Примером кооперативной игры может служить ситуация образования коалиций в парламенте для принятия решения путем голосования.

Рассмотрим парную стратегическую конечную игру с нулевой суммой.

В игре участвуют два игрока, каждый из которых имеет конечное число своих стратегий и осознанно применяет их в игре. Требуется определить цену игры и оптимальные стратегии игроков, позволяющие получить наилучший результат для каждого из них.

Математическая модель игры состоит из перечня игроков, списка их стратегий и платежной функции, заданной платежной матрицей.

Пусть игрок A располагает m стратегиями A_1, A_2, …, A_m, а игрок B – n стратегиями B_1, B_2, …, B_n. Игрок A может выбрать любую стратегию $A_i\,(i=\overline{1,m})$, а игрок B может выбрать любую стратегию $B_j\,(j=\overline{1,n})$. Пара стратегий (A_i, B_j) однозначно определяет результат игры – платеж a_{ij} (выигрыш игрока A или проигрыш игрока B) при условии, что игрок A придерживается своей стратегии A_i, а игрок B – стратегии B_j. Так как известны стратегии каждого игрока и для каждой пары (A_i, B_j) стратегий игроков известны значения платежа a_{ij}, то правила игры можно представить в виде рисунка 12, который является математической моделью игры.

Стратегии игроков	B_1	…	B_n
A_1	a_{11}	…	a_{1n}
…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}

Рисунок 12 – **Платежная матрица парной стратегической конечной игры с нулевой суммой**

3.2. Решение парной стратегической конечной игры с нулевой суммой в чистых стратегиях (принцип минимакса)

Решить матричную игру означает определить наилучшую стратегию игрока A, а также наилучшую стратегию игрока B. В стратегической парной игре предполагается, что противники одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока A. Выбирая стратегию A_i, игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на нее той из своих стратегий B_j, для которой выигрыш игрока A будет минимальным. Таким образом, найдем минимальное число a_{ij} в каждой строке матрицы:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \, (i = \overline{1, m}).$$

Это гарантированный минимальный выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i при выборе любой стратегии игроком B. Значения α_i обычно записываются в правом столбце платежной матрицы (рисунок 13).

	B_1	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	…	a_{1n}	α_1
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1		β_n	

Рисунок 13 – **Платежная матрица игры в принципе минимакса**

Однако, желая выиграть больше, игрок A должен выбрать ту стратегию, для которой гарантированный выигрыш α_i максимален: $\alpha = \max_i \alpha_i$. Величина $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$ есть гарантированный выигрыш, который игрок A может получить в игре, и называется ***нижней ценой игры***, или ***максимином***. Стратегия, обеспечивающая игроку A получение нижней цены игры, называется ***максиминной стратегией***.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены по поводу действий игрока B. Предполагая, что игрок A выберет стратегию с наибольшим выигрышем, игрок B должен для стратегии B_j рассмотреть свой максимальный проигрыш при любой стратегии игрока A:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Это гарантированный максимальный проигрыш игрока B при применении им стратегии B_j. Значения β_j записываются в дополнительной строке платежной матрицы. Желая уменьшить проигрыш, игрок B должен выбрать ту стратегию, при которой проигрыш минимален: $\beta = \min_j \beta_j$. Величина $\beta = \min_j \beta_i = \min_j \max_i a_{ij}$ ***называется верхней ценой игры (минимаксом)***, а соответствующая ей чистая стратегия B_j – ***минимаксной***.

Максимин не превосходит минимакс, т. е. $\alpha \le \beta$. Если в игре нижняя цена равна верхней ($\alpha = \beta$), то говорят, что игра имеет седловую точку (A_i^*, B_i^*), состоящую из чистых стратегий A_i^*, B_i^*, и ***чистую цену игры*** $\gamma = \alpha = \beta = a_{ij}^*$. Стратегии A_i^* и B_i^*, образующие седловую точку, являются оптимальными. Значения A_i^*; B_i^*; γ называют ***решением игры***.

Принцип минимакса. Пара чистых стратегий (A_i^*, B_i^*) дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий элемент a_{ij}^* является одновременно минимальным в i-й строке и максимальным в j-м столбце, причем $\gamma = \alpha = \beta = a_{ij}^*$ – цена игры.

Игрокам рекомендуется применять свои чистые стратегии. При этом игрок A выиграет не менее чистой цены игры, а игрок B проиграет не более чистой цены игры. Пара оптимальных стратегий удовлетворяют свойству устойчивости решения: если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии, то игроку B заведомо невыгодно отступать от своей оптимальной стратегии. И наоборот, если игрок B придерживается своей оптимальной стратегии, то игроку A заведомо невыгодно отступать от своей оптимальной стратегии.

3.3. Пример решения задачи

В игре принимают участие два игрока. Каждый из игроков может записать независимо от другого цифру 4, 5 или 6. Если разность между цифрами, записанными игроками A и B положительна, то игрок A выигрывает количество очков, равное этой разности. Если разность отрицательна, то выигрывает игрок B. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью. Необходимо составить платежную матрицу и найти решение игры.

Решение

Составим платежную матрицу игры. Чистыми стратегиями игрока A будут: A_1 – записать число 4; A_2 – записать число 5; A_3 – записать число 6. У игрока B чистыми будут аналогичные стратегии. Элемент матрицы $a_{11} = 0$, так как в ситуации (A_1; B_1) оба игрока записывают цифру 4 и выигрыш игрока A равен $4 - 4 = 0$. В ситуации (A_1; B_2) выигрыш игрока A составит $a_{12} = 4 – 5 = –1$. Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы (рисунок 14).

	B_1 (4)	B_2 (5)	B_3 (6)	α_i
A_1 (4)	0	–1	–2	–2
A_2 (5)	1	0	–1	–1
A_3 (6)	2	1	0^*	0
β_j	2	1	0	

Рисунок 14 – **Платежная матрица игры**

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

Определим минимальные гарантированные выигрыши игрока A, равные $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ при выборе им стратегий A_i. Так, если игрок A записал цифру 4, то его минимальный выигрыш при выборе данной стратегии составит $\alpha_1 = \min(0; –1; –2) = –2$. Аналогично находим $\alpha_2 = \min(1; 0; –1) = –1$, если игрок A записал цифру 5 и $\alpha_3 = \min(2; 1; 0) = 0$, если им записана цифра 6. Найдем нижнюю цену игры игрока A, воспользовавшись «принципом максимина», т. е. $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$. Нижняя цена игры для игрока A составит $\alpha = \max(–2; –1; 0) = 0$. Таким образом, максиминному выбору игрока A будет отвечать третья стратегия, гарантирующая выигрыш, равный нулю.

Для игрока B значения элементов $\beta_j = \max_i a_{ij}$ составят соответственно $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$. Верхняя чистая цена игры для игрока B по «принципу минимакса» составит $\beta = \min(2; 1; 0) = 0$. Следовательно, минимаксному выбору игрока B будет отвечать третья стратегия, гарантирующая минимальный проигрыш, равный нулю.

Так как $\alpha = \beta$, то данная игра имеет седловую точку, т. е. третья чистая стратегия игрока A и третья чистая стратегия игрока B образуют седловую точку со значением 0 и данная матричная игра имеет решение (A_3; B_3; 0).

3.4. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Две бригады в составе четырех человек каждая производят штукатурные работы в гаражах и квартирах. Производительность каждого работника одной бригады составляет 12 м^2 в день в гараже и 8 м^2 в квартире. Если на объекте работает более одного человека этой бригады, то производительность каждого уменьшается на 2 м^2. Производительность работников другой бригады составляет по 10 м^2 в день в гараже и в квартире. Если на объекте работает более одного человека, то производительность каждого штукатура этой бригады уменьшается на 1 м^2. В среднем производительность труда каждого работника двух бригад одинаковая на двух объектах. На объекте должен работать хотя бы один работник.

Премия начисляется бригаде, которая выполнила больший объем работы. Размер премии зависит от объема работ, на который одна бригада выполнила больше, чем другая. Каждая бригада стремится получить премию. Определите, каким образом бригадам лучше распределить работников по объектам.

Вариант 2. Ежемесячно страховая компания *A* страхует 100 объектов фирмы *B*. Каждый объект страхуется на 1 тыс. р. Страховщик забирает себе 10% от страховой суммы при заключении контракта. В следующем году страховщик намерен увеличить свой доход путем повышения ставки на 1, 2 или 3%. Страхующаяся фирма не намерена увеличивать расходы на страхование, поэтому готова уменьшить количество страхующихся объектов на 5, 10 или 15 шт.

Смоделируйте дальнейшее сотрудничество страховой компании со страхователем, построив ее матрицу выигрышей. Определите, при каких условиях оно остается выгодным для страховщика.

Вариант 3. Налоговая инспекция может контролировать доходы налогоплательщика и в этом случае взимает с него:

– налог в размере *T*, если доход заявлен и соответствует действительному;

– налог в размере *T* и штрафа в размере *W*, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего дохода.

Вместе с тем, налоговая инспекция может не контролировать доходы налогоплательщика.

В свою очередь, налогоплательщик может:

– заявить о действительном доходе;

– заявить доход, меньший действительного, и, следовательно, налог C с заявленного дохода будет меньше T;

– скрыть доход, тогда не надо будет платить налог.

Смоделируйте взаимодействия налогоплательщика с налоговой инспекцией. Укажите оптимальное поведение налогоплательщика.

Вариант 4. Две фирмы A и B проводят рекламную кампанию на предполагаемых рынках сбыта в каждом из двух соседних городов. У фирмы A имеются средства, чтобы оплатить в двух городах всего четыре способа проведения рекламной кампании, у фирмы B – средства на три способа. Победу каждой фирмы (для определенности – фирмы A) в каждом из городов будем оценивать в условных единицах (очках) следующим образом:

– если у фирмы A больше способов рекламы, чем у противника, то в качестве выигрыша она получает число очков, равное числу способов рекламы, примененных противником в данном городе с добавлением одного очка за победу;

– если у фирмы A меньше способов рекламы, чем у противника, то она проигрывает число очков, равное числу способов рекламы, примененных ею в данном городе, и минус одно очко за проигрыш;

– если число способов рекламы в городе у обеих фирм одинаковое, то каждая из них получает ноль очков.

В качестве общих выигрышей каждой из фирм принимаем суммы ее очков по двум городам в различных ситуациях. Представьте модель конфликта в виде матричной игры, составив матрицу выигрышей фирмы A.

3.5. Решение статистической игры

В экономической практике нередко приходится моделировать ситуации, придавая им игровую схему, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют статистическими, или играми с природой, понимая под термином «природа» всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решение.

В играх с природой степень неопределенности при принятии решения сознательным игроком возрастает. Объясняется это тем, что, если в стратегических играх каждый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то природа, будучи безразличной в отношении выигрыша, может предпринимать такие ответные действия, которые выгодны сознательному игроку.

Поскольку игры с природой являются частным случаем парных матричных игр, то вся теория стратегических игр переносится и на игры с природой. Однако игры с природой обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, так как она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно это игроку A или нет. Другая особенность состоит в том, что решение достаточно найти только для игрока A, поскольку природа наши рекомендации воспринять не может. И еще одна важная особенность, в играх с природой смешанные стратегии имеют ограниченное (главным образом теоретическое) значение: не всегда можно для них найти форму, удобную для использования в реальной обстановке. Смешанные стратегии приобретают смысл при многократном повторении игры.

Игра с природой задается платежной матрицей, в которой строки соответствуют стратегиям игрока, а столбцы – состояниям природы (рисунок 15).

	$П_1$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	…	a_{1n}
…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}
β_j	β_1	…	β_n

Рисунок 15 – **Платежная матрица игры с природой**

Кроме платежной матрицы, для игры с природой часто составляют матрицу рисков, которая во многих случаях позволяет более глубоко понять неопределенную ситуацию. *Риском* называется разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i в тех же условиях. Максимальный выигрыш в j-м столбце обозначим через β_j, т. е. $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ (величина β_j характеризует благоприятность состояния природы). Риск игрока при применении им стратегии A_i в условиях $П_j$ обозначим через r_{ij}. Тогда риск равен

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \qquad (r_{ij} \geq 0).$$

Определение наилучшей стратегии сознательного игрока A в игре с природой основано на применении некоторых критериев для принятия решений. Применяются две группы критериев:

– Критерии, основанные на известных вероятностях состояний природы. К этой группе относятся критерии Байеса и Лапласа.

– Критерии, используемые в условиях полной неопределенности. Ко второй группе критериев относятся критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Критерий Байеса

Если на основе данных статистических наблюдений можно определить вероятности состояний природы q_j ($q_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$), то пользуются критерием Байеса. Согласно этому критерию оптимальной считается та чистая стратегия A_i, которая соответствует максимальному среднему значению (математическому ожиданию) выигрыша:

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{\alpha}_i = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}.$$

Аналогично можно выбрать стратегию, которая обеспечивает минимальное среднее значение риска:

$$\overline{r} = \min_i \overline{r}_i = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \right\}.$$

Критерий Лапласа

Если игроку A представляются в равной мере правдоподобными все состояния Π_j природы, то полагают $q_1 = \ldots = q_n = 1/n$ и, учитывая «принцип недостаточного основания» Лапласа, оптимальной считают чистую стратегию A_i, обеспечивающую максимальный средний выигрыш:

$$\overline{\alpha} = \max_i \overline{a}_i = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

Если вероятности q_j состояний природы совсем неизвестны и нельзя сделать о них никаких предположений, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Максиминный критерий Вальда

Согласно критерию Вальда оптимальной считается та стратегия игрока A, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Критерий Вальда выражает позицию *крайнего пессимизма*, и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска)

Выбирается та стратегия, которая в наихудших условиях дает наименьший риск:

$$r = \min_i \max_j r_{ij} ,$$

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} ,$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} .$$

Критерий минимаксного риска Сэвиджа также является критерием крайнего пессимизма.

Критерий обобщенного максимума Гурвица

Оптимальной по критерию Гурвица считается чистая стратегия A_i, найденная из условия

$$s = \max_i (\lambda \min_j \; a_{ij} + (1-\lambda) \; \max_j a_{ij}) ,$$

где λ – коэффициент пессимизма, принимающий значения $0 \le \lambda \le 1$.

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (критерий «крайнего пессимизма»), а при $\lambda = 0$ – в критерий «крайнего оптимизма», когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш. В связи с этим критерий Гурвица называют критерием «*пессимизма – оптимизма*».

Величина λ выбирается из опыта и здравого смысла. Чем ответственнее ситуация, чем больше стремление подстраховаться в ней и не рисковать без должных оснований, тем ближе к единице выбирается коэффициент пессимизма.

3.6. Пример решения задачи

Туристическая фирма «Топ-тур» реализует туристические путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 6 до 9 ед. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то фирма может заказать недостающее количество. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 5 усл. ед. за каждую новую путевку. А если количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованную путевку составят 6 усл. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 усл. ед.

Требуется определить, какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

Порядок выполнения работы

В данном примере первым игроком является руководство туристической фирмы, которое может принять одно из решений:

– A_1 – заказать 6 путевок;
– A_2 – заказать 7 путевок;
– A_3 – заказать 8 путевок;
– A_4 – заказать 9 путевок.

Потребительский спрос выступает в качестве второго игрока, природы, стратегии которой определяются данными спроса:

– стратегия $П_1$ – «купят 6 путевок»;
– стратегия $П_2$ – «купят 7 путевок»;
– стратегия $П_3$ – «купят 8 путевок»;
– стратегия $П_4$ – «купят 9 путевок».

Построим платежную матрицу игры (рисунок 16).

	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$
$A_1 = 6$	60	65	70	75
$A_2 = 7$	54	70	75	80
$A_3 = 8$	48	64	80	85
$A_4 = 9$	42	58	74	90

Рисунок 16 – **Платежная матрица задачи**

Рассчитаем элементы a_{ij} платежной матрицы игры.

Выигрыш игрока A (руководства фирмы), если он заказал шесть путевок ($A_1 = 6$), а спрос оказался равным также шести ($П_1 = 6$), будет равен

$$a_{11} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ усл. ед.},$$

где $6 \cdot 10$ – прибыль от реализации шести путевок.

Выигрыш игрока A, когда заказано $A_1 = 6$ путевок, а спрос $П_2 = 7$ путевок, составит

$$a_{12} = 7 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 70 - 5 = 65 \text{ усл. ед.},$$

где $7 \cdot 10$ – прибыль от реализации семи путевок;
$1 \cdot 5$ – затраты, связанные с заказом дополнительной путевки.

Аналогично рассчитаем элемент a_{13}, когда заказано $A_1 = 6$ путевок, а спрос составил $П_3 = 8$ путевок:

$$a_{13} = 8 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 80 - 10 = 70 \text{ усл. ед.},$$

где $8 \cdot 10$ – прибыль от реализации восьми путевок;
$2 \cdot 5$ – затраты, связанные с заказом двух дополнительных путевок.

Когда заказано $A_1 = 6$ путевок, а спрос $П_4 = 9$ путевок, выигрыш игрока A составит

$$a_{14} = 9 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 90 - 15 = 75 \text{ усл. ед.}$$

Рассчитаем элемент a_{21}, когда заказано $A_2 = 7$ путевок, а спрос составил $П_1 = 6$ путевок:

$$a_{21} = 6 \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 60 - 6 = 54 \text{ усл. ед.},$$

где $6 \cdot 10$ – прибыль от реализации шести путевок;
$1 \cdot 6$ – потери за одну невостребованную путевку.

Остальные элементы платежной матрицы вычисляются аналогично:

$a_{22} = 7 \cdot 10 = 70$ усл. ед.;
$a_{23} = 8 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 80 - 5 = 75$ усл. ед.;
$a_{24} = 9 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 90 - 10 = 80$ усл. ед.;
$a_{31} = 6 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 60 - 12 = 48$ усл. ед.;
$a_{32} = 7 \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 70 - 6 = 64$ усл. ед.;
$a_{33} = 8 \cdot 10 = 80$ усл. ед.;
$a_{34} = 9 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 90 - 5 = 85$ усл. ед.;
$a_{41} = 6 \cdot 10 - 3 \cdot 6 = 60 - 18 = 42$ усл. ед.;
$a_{42} = 7 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 70 - 12 = 58$ усл. ед.;
$a_{43} = 8 \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 80 - 6 = 74$ усл. ед.;
$a_{44} = 9 \cdot 10 = 90$ усл. ед.

Так как вероятности состояния спроса заранее нам не известны, использовать критерии Байеса и Лапласа невозможно. Найдем решение игры по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,7$).

Критерий Вальда

Найдем элементы $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ (минимальный выигрыш, соответствующий стратегии A_i) и запишем их в дополнительный столбец матрицы игры (рисунок 17). Максимальная из этих величин равна $\alpha_1 = 60$, следовательно, оптимальной является стратегия A_1, т. е. необходимо заказать шесть путевок.

	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$	α_i
$A_1 = 6$	60	65	70	75	60
$A_2 = 7$	54	70	75	80	54
$A_3 = 8$	48	64	80	85	48
$A_4 = 9$	42	58	74	90	42
β_j	60	70	80	90	

Рисунок 17 – **Платежная матрица**

Критерий Сэвиджа

Пересчитаем платежную матрицу в матрицу рисков. Для этого найдем максимальный элемент по каждому столбцу (β_j) и из него последовательно вычтем каждый элемент этого столбца (см. рисунок 17).

$r_{11} = 60 – 60 = 0;$
$r_{21} = 60 – 54 = 6;$
$r_{31} = 60 – 48 = 12;$
$r_{41} = 60 – 42 = 18;$

$r_{13} = 80 – 70 = 10;$
$r_{23} = 80 – 75 = 5;$
$r_{33} = 80 – 80 = 0;$
$r_{43} = 80 – 74 = 6;$

$r_{12} = 70 – 65 = 5;$
$r_{22} = 70 – 70 = 0;$
$r_{32} = 70 – 64 = 6;$
$r_{42} = 70 – 58 = 12;$

$r_{14} = 90 – 75 = 15;$
$r_{24} = 90 – 80 = 10;$
$r_{34} = 90 – 85 = 5;$
$r_{44} = 90 – 90 = 0.$

Получим матрицу рисков (рисунок 18).

	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$	r_i
$A_1 = 6$	0	5	10	15	15
$A_2 = 7$	6	0	5	10	10
$A_3 = 8$	12	6	0	5	12
$A_4 = 9$	18	12	6	0	18

Рисунок 18 – **Матрица рисков**

Затем найдем максимальный риск при выборе игроком *А* той или иной стратегии (максимальный элемент строки) и поместим его в правом добавочном столбце матрицы рисков (столбец r_i):

$$r_i = \max_j r_{ij} .$$

Найдем минимальную из величин r_i, которая равна 10.

Следовательно, по критерию Сэвиджа оптимальной является стратегия A_2, т. е. заказать семь путевок.

Критерий Гурвица

Добавим в платежную матрицу три дополнительных столбца:

– $\min_j a_{ij}$ – столбец минимальных выигрышей игрока *А* при выборе им той или иной стратегии;

– $\max_j a_{ij}$ – столбец максимальных выигрышей игрока *А* при выборе им той или иной стратегии;

– *Критерий* – столбец, элементы которого рассчитываются по формуле

$$s_i = \lambda \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij} ,$$

где $\lambda = 0{,}7$.

Из столбца *Критерий* (рисунок 19) выбираем наибольшее значение. Таким является число 6,45, соответствующее стратегии A_1. Следовательно, по критерию Гурвица, оптимальной является первая стратегия игрока *А* – заказать шесть путевок.

	$П_1 = 6$	$П_2 = 7$	$П_3 = 8$	$П_4 = 9$	$\min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	Критерий
$A_1 = 6$	60	65	70	75	60	75	6,45
$A_2 = 7$	54	70	75	80	54	80	6,18
$A_3 = 8$	48	64	80	85	48	85	5,91
$A_4 = 9$	42	58	74	90	42	90	5,64

Рисунок 19 – **Платежная матрица**

Итак, в результате применения критериев Вальда, Сэвиджа и Гурвица оптимальной считается первая стратегия, так как она являлась наилучшей при применении двух критериев из трех. Согласно первой стратегии нужно заказать шесть путевок.

Критерий Байеса

Если предположить, что вероятности состояний природы (в нашем случае спроса) известны и равны $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}3$; $q_4 = 0{,}1$ соответственно, то можно воспользоваться критерием Байеса.

Для каждой строки, соответствующей стратегии сознательного игрока A, найдем сумму произведений вероятностей состояний природы q_i на элементы соответствующих столбцов:

$$\alpha_1 = 0{,}4 \cdot 60 + 0{,}2 \cdot 65 + 0{,}3 \cdot 70 + 0{,}1 \cdot 75 = 65{,}5;$$
$$\alpha_2 = 0{,}4 \cdot 54 + 0{,}2 \cdot 70 + 0{,}3 \cdot 75 + 0{,}1 \cdot 80 = 66{,}1;$$
$$\alpha_3 = 0{,}4 \cdot 48 + 0{,}2 \cdot 64 + 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}1 \cdot 85 = 64{,}5;$$
$$\alpha_4 = 0{,}4 \cdot 42 + 0{,}2 \cdot 58 + 0{,}3 \cdot 74 + 0{,}1 \cdot 90 = 59{,}6.$$

Затем выберем максимальное значение α_i. Это значение находится во второй строке (66,1). Следовательно, по критерию Байеса оптимальной является вторая стратегия игрока A – заказать семь путевок.

Для расчета среднего выигрыша можно воспользоваться пакетом MS Excel (рисунки 20 и 21).

	A	B	C	D	E	F
1		**П1=6**	**П2=7**	**П3=8**	**П4=9**	**Среднее**
2	**А1=6**	60	65	70	75	=СУММПРОИЗВ(B2:E2;$B$6:$E$6)
3	**А2=7**	54	70	75	80	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;$B$6:$E$6)
4	**А3=8**	48	64	80	85	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;$B$6:$E$6)
5	**А4=9**	42	58	74	90	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;$B$6:$E$6)
6	**q_i**	0,4	0,2	0,3	0,1	

Рисунок 20 – **Формулы расчета по критерию Байеса в MS Excel**

	A	B	C	D	E	F
1		**П1=6**	**П2=7**	**П3=8**	**П4=9**	**Среднее**
2	**А1=6**	60	65	70	75	65,5
3	**А2=7**	54	70	75	80	66,1
4	**А3=8**	48	64	80	85	64,5
5	**А4=9**	42	58	74	90	59,6
6	**q_i**	0,4	0,2	0,3	0,1	

Рисунок 21 – **Результаты решения по критерию Байеса в MS Excel**

Затем в столбце *Среднее* выберем максимальное значение. Это значение находится во второй строке (66,1). Следовательно, по критерию Байеса оптимальной является вторая стратегия игрока *A* – заказать семь путевок.

Критерий Лапласа

Если известно, что все состояния спроса равновероятны, то можно применить критерий Лапласа. Согласно этому критерию, нужно вычислить средний выигрыш как среднее арифметическое по строке:

$\overline{\alpha}_1 = (60 + 65 + 70 + 75) / 4 = 67{,}5;$
$\overline{\alpha}_2 = (54 + 70 + 75 + 80) / 4 = 69{,}75;$
$\alpha_3 = (48 + 64 + 80 + 85) / 4 = 69{,}25;$
$\alpha_4 = (42 + 58 + 74 + 90) / 4 = 66.$

Наибольший средний выигрыш составит

$$\alpha = \max_i \overline{\alpha}_i = \max\{67{,}5;\ 69{,}75;\ 69{,}25;\ 66\} = 69{,}75\ .$$

Таким образом, и в этом случае предпочтение следует отдать второй стратегии.

Следовательно, по критерию Лапласа оптимальной является вторая стратегия игрока *A* – заказать семь путевок.

3.7. Задания для самостоятельной работы[1]

Вариант 1. После 15 лет эксплуатации промышленное оборудование в количестве 10 ед. может оказаться в одном из следующих состояний:

– требуется незначительный ремонт;

– необходимо заменить отдельные детали;

– дальнейшая эксплуатация возможна только после капитального ремонта.

Установите, какое решение может принять руководство в зависимости от сложившейся ситуации:

[1] Для критерия Гурвица принимать во всех вариантах $\lambda = 0{,}7$.

– произвести ремонт своими силами, что потребует затрат, равных 2, 6 и 10 усл. ед. за каждую единицу оборудования в зависимости от состояния оборудования;

– произвести ремонт при помощи специалистов-ремонтников, что вызовет затраты 10, 4 и 8 усл. ед. за единицу оборудования;

– заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 14, 12 или 6 усл. ед. за единицу оборудования, используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Ответ: произвести ремонт своими силами.

Вариант 2. На технологическую линию поступает сырье с малым, большим количеством примесей и совсем без примесей. Линия может работать в трех режимах. Доход предприятия от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья первого вида при трех режимах работы технологической линии, составляет соответственно 2, 5 и 6 усл. ед., из сырья второго вида – 4, 6 и 3 усл. ед. и из сырья третьего вида – 7, 3 и 4 усл. ед. Выясните, в каком режиме должна работать технологическая линия, чтобы доход от выпущенной продукции был возможно большим, если предприятие выпускает 120 ед. продукции.

Известно, что вероятность того, что сырье будет без примесей, равна 0,1, а вероятность появления сырья с малым количеством примесей равна 0,2.

Ответ: технологическая линия должна работать во втором режиме.

Вариант 3. Небольшая фирма производит молочную продукцию. Один из ее продуктов – творожная масса. Необходимо решить, какое количество творожной массы следует производить в течение месяца, если вероятность того, что спрос составит 100, 150 или 200 кг равна 0,2; 0,5; 0,3 соответственно. Затраты на производство 1 кг творожной массы равны 1 тыс. усл. ед. Фирма продает массу по цене 1,5 тыс. усл. ед. за 1 кг. Если масса не продается в течение месяца, то она снимается с реализации, и фирма не получает дохода.

Дайте рекомендации, сколько творожной массы следует производить фирме.

Ответ: производить 150 кг творожной массы.

Вариант 4. За некоторый промежуток времени потребление мазута на теплоэлектроцентрали в зависимости от его качества составляет 7, 8 или 9 ед. Стоимость мазута при заготовке – 3 усл. ед. Если для обеспечения заданной температуры теплоносителя в течение всего рассматриваемого промежутка времени заготовленного мазута окажется недостаточно, то придется закупить недостающее количество мазута, что потребует затрат в размере 4 усл. ед. на единицу массы мазута. Если же запас топлива превысит потребность, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 усл. ед. за единицу массы мазута. Составьте платежную матрицу и дайте рекомендации по выбору оптимальной стратегии, используя различные критерии.

Ответ: закупить 7 ед. мазута.

Вариант 5. Магазин может закупить для реализации 10, 15 или 20 ед. скоропортящегося товара по цене 3 усл. ед. за единицу товара. В зависимости от уровня спроса (пониженный, умеренный или повышенный) в день реализации может быть продано 10, 15 или 20 ед. товара по цене 5 усл. ед. за единицу. Предполагается, что остаток товара будет реализован на следующий день по сниженной цене 2 усл. ед. за единицу товара. Используя игровой подход, составьте платежную матрицу и дайте рекомендации по выбору оптимальной стратегии, используя различные критерии.

Ответ: закупить 10 ед. товара.

Вариант 6. Для отопления коттеджа в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 6 усл. ед., в мягкую зиму – 6,5 усл. ед., в обычную – 7 усл. ед., а в холодную – 7,5 усл. ед. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную – 7 т, а в холодную расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества угля, запасенного им летом.

При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести зимой. Кроме того, надо учесть, что хранение остатка неиспользованного угля обходится домовладельцу в 1 усл. ед. за 1 т.

Вероятности того, что зима будет мягкой, средней или холодной, равны 0,2; 0,5 и 0,3 соответственно.

Составьте платежную матрицу и дайте рекомендации по выбору оптимальной стратегии.

Ответ: закупить летом 6 т угля.

Вариант 7. Для обеспечения однократной зимовки небольшой экспедиции требуется доставить к месту зимовки вместе с другими грузами запас топлива. В случае нормальной зимы достаточно 16 т, но при мягкой или суровой зиме эти цифры составляют 11 и 20 т. Если запасаться топливом летом, то оно будет стоить 12 усл. ед. за 1 т. Если придется доставлять топливо зимой дополнительно, то это обойдется в нормальную и суровую зиму соответственно на 1 и 4 усл. ед. за 1 т дороже, чем летом. Обратная транспортировка неизрасходованного топлива по окончании зимовки обходится в 1 усл. ед. за 1 т, а его стоимость не возмещается.

Определите, какова оптимальная стратегия руководителя экспедиции, если данные метеорологов показывают, что в данной местности вероятности мягкой, нормальной и суровой зимы одинаковы.

Ответ: доставить летом к месту зимовки 11 т топлива.

Вариант 8. За некоторый период времени потребление исходного сырья на предприятии в зависимости от его качества составляет 10, 11 или 12 ед. Если для выпуска запланированного объема основной продукции исходного сырья окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 усл. ед. на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 усл. ед. на единицу сырья. Составьте платежную матрицу и дайте рекомендации по выбору оптимальной стратегии, используя различные критерии. Стоимость исходного сырья – 3 усл. ед. за единицу сырья.

Ответ: закупить 10 ед. сырья.

Вариант 9. Фирма занимается реализацией новогодних игрушек. Спрос на елочные гирлянды может составить 200, 120, 140 или 160 шт. Фирма закупает гирлянды по 2 денеж. ед. за 1 шт., а реализует по 3 денеж. ед. Непроданные к Новому году гирлянды реализуются оптом по сниженной цене 1,8 денеж. ед. за 1 шт. Определите оптимальную стратегию поведения фирмы.

Вариант 10. Кафетерий «Мечта» реализует кондитерские изделия собственного производства. Спрос на пирожные может составить 100, 120, 140 или 160 шт. в день с вероятностью 0,2, 0,3, 0,4, 0,1 соответственно. Затраты на производство одного пирожного составляют 70 денеж. ед., а цена реализации – 100 денеж. ед. Если пирожные не продаются в течение дня, они портятся, и магазин несет убытки. Определите, какое количество пирожных следует выпекать.

Контрольные вопросы

1. Что такое игра? Какие бывают виды игр?
2. Что такое чистая стратегия, исход игры и платежная матрица?
3. Что значит «решить матричную игру»?
4. В чем заключается принцип минимакса? Каковы нижняя и верхняя цена игры?
5. Когда существует решение игры в чистых стратегиях? Что такое седловая точка матричной игры?
6. Как можно упростить платежную матрицу игры? Какие стратегии называются заведомо невыгодными?
7. Что такое игра с природой и в чем ее особенности?
8. Какие критерии применяются в случае, когда известны вероятности состояний природы?
9. Какой критерий применяется в случае, когда известны вероятности состояний природы и их значения одинаковы?
10. В чем суть и условия применения критериев Байеса и Лапласа?
11. Какие критерии используются в условиях полной неопределенности?
12. В чем суть и условия применения критериев Вальда, Сэвиджа и Гурвица?
13. Что такое риск в теории матричных игр? Как рассчитывается матрица рисков?
14. В каком из критериев применяется матрица рисков?

Тема 4. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ

4.1. Основные теоретические сведения

Под *запасом* понимается все то, на что имеется спрос и что исключено временно из потребления. Запасы подразделяются на запасы средств производства, предназначенные для производственного потребления (сбытовые, производственные, государственные резервы и незавершенное производство), и запасы предметов потребления, предназначенные для использования в непроизводственной социально-экономической сфере и для удовлетворения потребностей людей (товарные, запасы предметов коллективного и индивидуального потребления и государственные резервы).

Основные причины образования запасов следующие:

– необходимость бесперебойного удовлетворения спроса потребителей;

– периодичность их производства;

– особенности транспортировки;

– несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

При обосновании уровня запасов нужно исходить прежде всего из равновесия между затратами на их создание и содержание и потерями из-за нехватки нужного товара (дефицит). Наиболее предпочтительным будет такой уровень запаса, который обеспечивает минимум издержек или затрат. Существует три вида затрат:

– по завозу товара (увеличиваются при уменьшении интервала между поставками и уменьшении размера партии);

– на хранение запасов (увеличиваются при увеличении этих же параметров);

– связанные с дефицитом.

Задача управления запасами состоит в определении величины партии товаров, которая позволяет минимизировать издержки, связанные с заказом, хранением запасов и потерями от дефицита.

Модель задачи управления товарными запасами строится по следующим данным:

– интенсивность спроса;

– затраты на выполнение одного заказа;

– издержки хранения товара;

– издержки, связанные с дефицитом.

Требуется определить оптимальный объем заказываемой партии товара и время между поставками, при которых издержки минимальны.

4.2. Простейшая модель оптимального размера партии поставки

Эта модель позволяет определить такой размер заказываемой партии, который минимизирует расходы на организацию заказа и содержание его на складе в единицу времени. Экономичная партия поставки вычисляется при следующих допущениях:

– Уровень запасов снижается равномерно с интенсивностью M (спрос).

– В момент, когда все запасы исчерпаны, подается заказ на поставку новой партии размером Q ед.

– Заказ выполняется мгновенно, т. е. время доставки заказа пренебрежимо мало и уровень запасов восстанавливается до максимального значения.

– Накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине K.

– Издержки содержания единицы товара на складе в единицу времени равны h.

– На складе не происходит систематического накопления или перерасхода запасов.

– Срыв поставок недопустим.

– Дефицит недопустим.

Процесс изменения уровня запасов показан на рисунке 22.

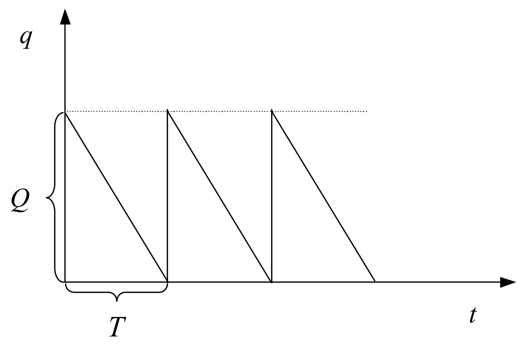


Рисунок 22 – **График работы идеального склада (по модели Уилсона)**

Через T обозначим время между двумя последовательными поставками, тогда обязательно выполнение равенства $Q = MT$.

Расход запаса происходит с постоянной скоростью M, поэтому средний уровень запаса за интервал T равен $\frac{Q}{2}$, а общие затраты, связанные с хранением и заказом товара, равны

$$Z_T(Q) = K + hT\frac{Q}{2}. \quad (5)$$

При поставке запасов разными партиями общие затраты могут сильно отличаться друг от друга. Например, партия в объеме 50 шт.

поставляется один раз в неделю (7 дней). Стоимость поставки – 12 усл. ед., издержки хранения составляют 0,5 усл. ед. в день за одну штуку товара. Общие затраты в таком случае составят

$$Z_T(50) = 12 + 0{,}5 \cdot 7 \cdot 50 : 2 = 99{,}5 \text{ усл. ед.}$$

При поставке того же товара партией в 100 шт. и той же интенсивности потребления увеличивается период поставки до двух недель (14 дней). Общие затраты за период поставки составят

$$Z_T(100) = 12 + 0{,}5 \cdot 14 \cdot 100 : 2 = 362 \text{ усл. ед.}$$

Товар поставлялся партиями разного объема с разным периодом поставки. Соответственно, общие издержки будут разными. В таком случае выбор партии поставки становится проблематичным.

Поэтому для сравнения общих издержек при разных партиях поставки необходимо сравнить их в одинаковую единицу времени: день, месяц и т. д. Для рассмотренного примера издержки в день составят:

– в первом случае 99,5 : 7 = 14,2 усл. ед.;

– во втором 362 : 14 = 25,8 усл. ед.

В первом варианте поставки среднесуточные расходы меньше, чем во втором, следовательно, он лучше.

Найдем затраты, связанные с работой склада за единицу времени. Разделим функцию (5) на постоянную величину T. С учетом равенства $Q = MT$ получим выражение для величины затрат на пополнение и хранение запасов, приходящихся на единицу времени:

$$Z_1(Q) = \frac{Z_T(Q)}{T} = \frac{K}{T} + \frac{hQ}{T} = K\frac{M}{Q} + h\frac{Q}{2}, \tag{6}$$

где $K\dfrac{M}{Q}$ – среднесуточные накладные расходы;

$h\dfrac{Q}{2}$ – среднесуточные издержки хранения.

Это и будет целевой функцией, минимизация которой позволит указать оптимальный режим работы склада.

При увеличении партии Q среднесуточные затраты по завозу товара расходы уменьшаются, а среднесуточные издержки хранения увеличиваются. Графически данная закономерность представлена на рисунке 23.

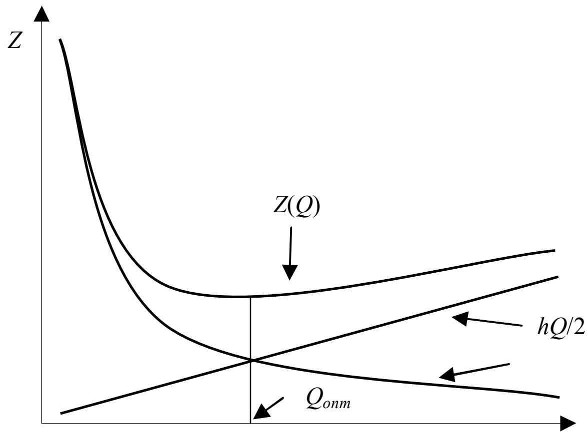


Рисунок 23 – **Издержки работы**

Найдем объем заказываемой партии $Q_{опт,}$ при котором минимизируется функция средних затрат склада за единицу времени, т. е. функция $Z_1(Q)$. На практике величины Q часто принимают дискретные (целочисленные) значения, в частности, из-за использования транспортных средств определенной грузоподъемности. В этом случае оптимальное значение $Q_{опт}$ находят перебором допустимых значений Q. Будем считать, что ограничений на принимаемые значения Q нет, тогда задачу на минимум функции $Z_1(Q)$ можно решить методами дифференциального исчисления. Нужно приравнять к нулю первую производную по Q, т. е. решить следующее уравнение:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial Q} = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0,$$

отсюда находится точка минимума $Q_{опт}$:

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} .$$

Эту формулу называли формулой Уилсона в честь английского ученого-экономиста, который вывел ее в 20-х гг. XX в.

Оптимальный размер партии, рассчитываемый по формуле Уилсона, обладает характеристическим свойством: размер партии Q оптимален тогда и только тогда, когда издержки хранения за время цикла T равны накладным расходам K, т. е. минимальное значение функции Z_{min} достигается при значении Q, при котором равны значения двух других функций, ее составляющих (см. рисунок 23):

$$K\frac{M}{Q} = h\frac{Q}{2}.$$

Зная оптимальный объем партии поставки, можно вычислить оптимальный период поставки по следующей формуле:

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M}.$$

Суммарные затраты по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени высчитываются по формуле

$$Z_{опт} = \sqrt{2KMh}.$$

4.3. Пример решения задачи

На склад доставляется на барже цемент партиями по 500 т. В сутки со склада потребители забирают 50 т цемента. Накладные расходы по доставке партии цемента равны 2 000 р. Издержки хранения 1 т цемента в течение суток равны 0,1 р. Требуется определить следующее:

– период поставки, среднесуточные издержки;

– оптимальный размер заказываемой партии, оптимальный период поставки и среднесуточные издержки в оптимальном режиме.

Порядок выполнения работы

Параметры работы склада следующие: M = 50 т/сут; K = 2 000 р.; h = 0,1 р./т сут; Q = 500 т.

1. Длительность цикла равна

$$T = \frac{Q}{M} = \frac{500}{50} = 10 \text{ сут.}$$

Среднесуточные издержки равны (по формуле 6):

$$Z_1(Q) = 2\,000\frac{50}{500} + 0{,}1\frac{500}{2} = 225 \text{ р./сут.}$$

2. Оптимальный размер заказываемой партии по формуле Уилсона вычисляется следующим образом:

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1\,414 \text{ т.}$$

Оптимальная периодичность пополнения запасов равна

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \frac{1\,414}{50} \approx 28 \text{ сут.}$$

Среднесуточные издержки в оптимальном режиме равны

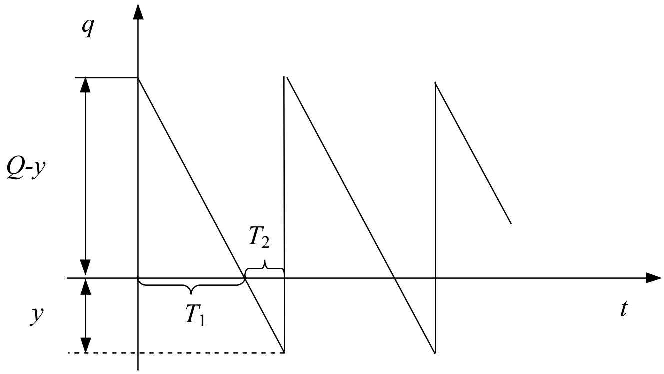
$$Z_{отп} = \sqrt{2 \cdot 2\,000 \cdot 50 \cdot 0{,}1} = 141{,}42 \text{ р./сут.,}$$

т. е. при работе склада в оптимальном режиме среднесуточные издержки уменьшаются.

4.4. Модель с учетом неудовлетворенных требований

Пусть выполняются допущения для модели пункта 4.2, но дефицит допускается и неудовлетворенные требования берутся на учет.

При поступлении очередной партии вначале удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Изменение запаса в такой системе показано на рисунке 24.



Условные обозначения:

y – максимальная величина задолженного спроса;

Q-y – максимальная величина наличного запаса;

T_1 – время существования наличного запаса;

T_2 – время дефицита

Рисунок 24 – **Модель с учетом неудовлетворенных требований**

Через d обозначим убытки, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени.

Издержки работы системы в единицу времени вычисляются по формуле

$$Z_1(Q) = \frac{KM}{Q} + h\frac{(Q-y)^2}{2Q} + d\,\frac{y^2}{2Q}.$$

Рассмотрим, как рассчитываются оптимальные параметры работы системы.

Величина оптимальной партии рассчитывается по формуле

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{d}}\ .$$

Максимальная величина задолженного спроса вычисляется следующим образом:

$$y_{макс} = \frac{h}{d} \cdot \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}}\ .$$

Оптимальный период возобновления заказа равен

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \sqrt{\frac{2K}{hM}} \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{d}}\ .$$

Составляющие оптимального периода возобновления заказа равны

$$T_{1опт} = \sqrt{\frac{2K}{hM}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}},$$

$$T_{2опт} = \frac{h}{d} \cdot \sqrt{\frac{2K}{hM}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}},$$

Минимальные издержки в единицу времени высчитываются по формуле

$$Z_{опт} = \sqrt{2KMh} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}}\ .$$

4.5. Пример решения задачи

Спрос на продукцию инструментального цеха составляет 6 200 ед. в год. Стоимость хранения, включая потери, связанные с моральным старением, составляет 496 усл. ед. за единицу в год. Издержки размещения заказа равны 1 296 усл. ед. в год. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита составляют 3 600 усл. ед. за нехватку единицы продукции в течение года.

Найти оптимальную партию поставки, максимальную величину задолженного спроса, интервал возобновления поставки и годовые потери функционирования системы.

Порядок выполнения работы

Параметры работы склада следующие:
M = 6 200 ед./год;
K = 1 296 усл. ед.;
h = 496 усл. ед./год;
d = 3 600 усл. ед./год.

Оптимальная партия поставки равна

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1296 \cdot 6200}{496}} \cdot \sqrt{1 + \frac{496}{3600}} = 192 \text{ ед.}$$

Максимальная величина задолженного спроса высчитывается по формуле и равна

$$y_{макс} = \frac{h}{d} \cdot \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}} = \frac{496}{3600} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1296 \cdot 6200}{496}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{46}{3600}}} = 23 \text{ ед.}$$

Интервал возобновления поставки равен

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \frac{192}{6200} \approx 0{,}0309 \text{ год или } 0{,}0309 \cdot 365 = 11 \text{ сут.}$$

Среднесуточные издержки в оптимальном режиме равны

$$Z_{опт}=\sqrt{2KMh}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{h}{d}}}=\sqrt{2\cdot 1296\cdot 6200\cdot 496}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{496}{3600}}}=83700.$$

4.6. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Компания поставляет заказчику принтеры. Средняя потребность в них составляет 49 шт. в год. Стоимость размещения одного заказа – 30 усл. ед., издержки содержания составляют 15 усл. ед. в год.

Определите оптимальную партию поставки, период пополнения заказа, годовые затраты.

Вариант 2. Годовая потребность фирмы в пиломатериалах составляет 4 000 м^3, затраты на хранение 1 м^3 в год – 4 усл. ед. Затраты на подготовительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны 80 усл. ед.

Найдите оптимальную партию поставки, период пополнения заказа, годовые затраты. Сравните полученные затраты с затратами в случае отклонений от оптимальной партии в любом направлении в два раза.

Вариант 3. Потребность станко-сборочного цеха в заготовках определенного типа составляет 32 тыс. шт. в год. Издержки размещения заказа – 50 усл. ед., издержки содержания одной заготовки в год равны 5 усл. ед.

Найдите оптимальную партию поставки, период пополнения заказа, годовые затраты. Сравните полученные затраты с затратами в случае увеличения издержек на размещение заказа до 70 усл. ед. и уменьшения издержек содержания до 3 усл. ед.

Вариант 4. На склад поступают материалы, годовой объем поставок которых равен 810 шт. Издержки завоза одной партии составляют 40 усл. ед., издержки хранения единицы запаса в сутки – 0,2 усл. ед. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита составляют 0,3 усл. ед. за нехватку единицы продукции в течение дня.

Найдите оптимальную партию поставки, максимальную величину задолженного спроса, интервал возобновления поставки и годовые потери функционирования системы.

Вариант 5. Годовая потребность магазина в телевизорах – 900 шт. Затраты, связанные с содержанием одного телевизора, составляют 40 усл. ед. в год, а затраты, связанные с оформление каждого заказа, – 500 усл. ед. Если в момент обращения покупателя в магазин нет нужного товара, то требование ставится на учет и удовлетворяется по мере поступления. Издержки дефицита, включающие затраты, связанные с учетом неудовлетворенных требований, составляют в год 40 усл. ед.

Определите оптимальную партию поставки, оптимальный интервал возобновления заказа, период дефицита и среднегодовые издержки.

Вариант 6. Магазин радиотоваров реализует музыкальные центры. Средняя потребность в них составляет 3 шт. в месяц. Стоимость организации заказа – 28 усл. ед. Содержание его в течение месяца обходится в 14 усл. ед.

Определите оптимальную партию поставки, оптимальный интервал возобновления заказа, среднегодовые издержки.

Вариант 7. Магазин ежедневно продает 10 телевизоров. Накладные расходы на поставку партии телевизоров в магазин оцениваются в 30 усл. ед. Стоимость хранения одного телевизора на складе магазина составляет 0,85 усл. ед. в день. При перевозке телевизоры можно устанавливать друг на друга не более чем три штуки.

Определите оптимальный объем партии телевизоров, оптимальные среднесуточные издержки на хранение и пополнение запасов телевизоров на складе. Подберите партию поставки телевизоров, обеспечивающую наименьшее отклонение от оптимального режима.

Вариант 8. В магазине спрос покупателей на сок составляет 25 упаковок в день. Затраты на заказ и доставку одной партии составляют 3 000 усл. ед. Среднесуточные издержки хранения одной упаковки равны 0,4 усл. ед.

Определите оптимальную партию поставки, период поставки и общие среднесуточные издержки склада на доставку и хранение сока в оптимальном режиме. Подберите партию поставки сока, учитывая, что магазину выгодно возить число упаковок, кратное 100.

Вариант 9. В течение смены в санатории отдыхают 83 чел. Ежедневно каждый из отдыхающих должен получить 200 г кефира. Его хранение в холодильниках санатория обходится в среднем в 12 к. за 1 л в сутки. Стоимость оформления и доставки заказа составляет 54 р.

Укажите объем партии поставки кефира с молокозавода, интервал между поставками и издержки санатория в день, связанные с заказом и хранением кефира.

Определите, если руководство санатория желает использовать кефир высокого качества, срок годности которого составляет пять дней, то как это решение повлияет на размер издержек.

Вариант 10. Объем продажи некоторого магазина составляет в год 500 упаковок супа в пакетах. Величина спроса равномерно распределяется в течение года. За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 10 р. По оценкам специалистов, издержки хранения в год составляют 40 к. за один пакет.

Определите следующее:

– количество пакетов, которое должен заказывать владелец магазина для одной поставки;

– интервал времени между заказами;

– издержки магазина в единицу времени.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные причины образования запасов?
2. Какие существуют виды затрат, связанные с организацией запаса? Как они зависят от размера партии?
3. Какие допущения делаются в модели Уилсона?
4. Почему для выбора оптимальной партии поставки рассматриваются общие издержки за единицу времени?
5. Как определить оптимальный объем партии в модели Уилсона? Как рассчитать при этом минимальные общие издержки?
6. Каким свойством обладает размер партии, найденный по формуле Уилсона?
7. Как в моделях управления товарными запасами учитывается дефицит? Как изменяется уровень запаса?
8. Каковы параметры работы системы при наличии дефицита?

Тема 5. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО (ЛИНЕЙНОГО) ПРОГРАММИРОВАНИЯ

5.1. Основные теоретические сведения

Одной из основных целей применения экономико-математических методов является выработка наилучших (оптимальных) управленческих решений. Такие решения должны, с одной стороны, максимально соответствовать основной цели управления (например, получения максимальной прибыли), а с другой – учитывать возможности реализации этой цели (имеющиеся запасы ресурсов и применяемые технологии производства, спрос на готовую продукцию, плановые задания и т. д.). Другими словами, задача оптимального управления – это задача на экстремум некоторой функции при наличии ограничений. Изучением такого класса задач и методов их решения занимается математическое программирование.

Общая постановка задачи математического программирования

В самом общем виде задача математического программирования имеет вид, описанный ниже.

Найти неизвестные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, доставляющие экстремум функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max (\min)$$

при условии выполнения следующих ограничений:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \{\le, =, \ge\} b_i \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{7}$$

где n – количество переменных;

m – количество ограничений.

Запись $\{\le, =, \ge\}$ в ограничениях означает, что возможен один из указанных знаков.

Величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *переменными задачи*. Их экономический смысл может быть различным. Например, если предприятие выпускает три вида продукции, и нужно найти оптимальный план производства, то x_1, x_2, x_3 – количество продукции каждого вида, которое необходимо производить. Если в задаче необходимо найти наилучший состав рациона, в который могут входить несколько компонентов (например, сено и силос в рационе коров), то x_1 и x_2 – количество каждого компонента, которое нужно включить в рацион (в данном случае – количество сена и силоса).

Система ограничений (7) вытекает из ограниченности доступных материальных и трудовых ресурсов, технологических требований или же из здравого смысла. Для задачи составления рациона ограничения заключаются в необходимости того, чтобы рацион был полноценным (содержал питательные вещества, витамины и микроэлементы, необходимые для жизнедеятельности животных).

Очень часто в систему ограничений экономических задач включаются условия неотрицательности переменных: $x_j \geq 0, \ (j = \overline{1, n})$. Например, совершенно очевидно, что объем производимой продукции не может быть отрицательной величиной.

Набор значений переменных $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий всем ограничениям, называется *допустимым решением,* или *планом.* Совокупность всех планов задачи образует *область допустимых решений* (*ОДР*).

Для того, чтобы выбрать оптимальный (т. е. наилучший) план, нужно определить, что будет лежать в основе этого выбора, т. е. определить критерий оптимальности. *Критерий оптимальности* – это экономический показатель, на основании которого сравниваются управленческие решения и осуществляется выбор лучшего из них. Критерии оптимальности бывают натуральные и стоимостные, максимизируемые и минимизируемые. Например, максимизируемые критерии – это прибыль, рентабельность, валовой объем продукции, минимизируемые критерии – это себестоимость, затраты производства, издержки обращения.

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *целевой функцией* (*ЦФ*) и представляет собой математический вид критерия оптимальности.

План (допустимое решение), при котором целевая функция принимает экстремальное значение, называется *оптимальным.* Оптимальные значения переменных обычно обозначаются надстрочным знаком «*».

Оптимальных планов в задаче может быть несколько, возможно также бесконечное множество оптимальных планов.

В зависимости от вида целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функций системы ограничений $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ среди задач математического программирования можно выделить следующие:

1. *Задачи линейного программирования*, в которых целевая функция и ограничения линейны относительно переменных x_j (нет степеней, произведений переменных и других нелинейных функций). К этому типу обычно приводятся задачи планирования выпуска продукции, составления смесей, раскроя материалов, планирования грузопотоков, распределения финансирования.

2. *Задачи нелинейного программирования*, в которых целевая и (или) хотя бы одна из функций системы ограничений нелинейны. К задачам такого типа относятся задача определения экономически выгодной партии поставки товара, многие задачи проектирования. Не существует единого метода решения задач нелинейного программирования, решение каждой конкретной задачи ориентируется на ее особенности. Среди задач нелинейного программирования выделяют задачи выпуклого программирования (целевая функция является выпуклой, а *ОДР* есть выпуклое замкнутое множество), квадратичного программирования (*ЦФ* есть квадратичная функция, а система ограничений линейна), дробно-линейного программирования (*ЦФ* есть отношение двух линейных функций, а ограничения линейны) и т. п.

3. *Задачи дискретного*, в частности *целочисленного программирования*, в которых на все или некоторые переменные наложено условие дискретности или целочисленности. Дискретность означает, что переменная может принимать не все возможные значения на числовой прямой, а только некоторые. Например, пусть переменная есть масса некоторой вещи, которую можно положить в рюкзак. Всего имеется четыре вещи, масса которых – 1,5, 2, 2,7 и 3,1 кг. При таких условиях переменная может принимать только одно из этих значений. А если, например, переменная есть количество людей, которое можно назначить на работу, то эта переменная – целочисленная и принимает значения 0, 1, 2, 3 и т. д. К этому типу относятся задачи о назначениях, контейнерных перевозках, задача коммивояжера и др.

4. *Задачи динамического программирования*, процесс решения которых носит многошаговый характер. На каждом шаге выбирается какое-либо решение, от которого зависит выигрыш не только на дан-

ном шаге, но и всей операции в целом. Как правило, в таких задачах целевая функция имеет один из двух видов:

– аддитивный: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$;

– мультипликативный: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot ... \cdot f_n(x_n)$.

Если параметры целевой функции или ограничений изменяются во времени, то в таких задачах заложена многошаговость, и они являются задачами динамического программирования. Например, задачи распределения капиталовложений, замены оборудования, о контейнерных перевозках и др.

5. *Задачи стохастического программирования*, в которых параметры целевой функции или ограничений являются случайными величинами. Эти задачи также возникают и в условиях неполной, недостоверной информации.

5.2. Задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования (*ЗЛП*) называется такая задача математического программирования, целевая функция которой имеет линейный вид, а ограничения заданы в виде линейных уравнений или неравенств. Методы решения таких задач являются наиболее разработанными. Начало линейной оптимизации было положено в 1939 г., когда вышла в свет работа профессора Ленинградского университета Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». Академик Л. В. Канторович за разработку методов решения оптимизационных задач был удостоен звания лауреата Ленинской (1965) и Нобелевской (1975) премий.

Рассмотрим примеры экономических задач, решаемых при помощи методов линейного программирования:

– задача производственного планирования;
– задача о смесях (планирование состава продукции);
– задача о рюкзаке;
– транспортные задачи (перемещение грузов, задача о назначениях).

Задача производственного планирования

Предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуется m различных видов ресурсов (сырья, материалов, рабочего времени и т. п.). Ресурсы ограничены, их запасы в планируемый период составляют b_1, b_2, ..., b_m усл. ед. соответственно.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые показывают, сколько единиц i-го ресурса требуется для производства единицы изделия j-го вида ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$).

Доход, получаемый предприятием при реализации одного изделия j-го вида, равен c_j.

В планируемом периоде значения величин a_{ij}, b_i и c_j остаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого выгода предприятия была бы наибольшей.

Задача о смесях (планирование состава продукции)

Необходимо определить в смеси количество каждого из n данных исходных материалов, содержащих в своем составе m различных компонентов в определенных количествах. При этом смесь должна быть наиболее дешевой и содержание в смеси суммарного количества каждого из компонентов должно удовлетворять заданным условиям.

Задача о рюкзаке

В общем виде задачу можно сформулировать так: из множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес» требуется выбрать такой набор, чтобы получить максимальную суммарную стоимость при одновременном соблюдении ограничения на суммарный вес.

Задачи транспортного типа

Под задачами транспортного типа понимают целый ряд задач, имеющих определенную специфическую структуру. Наиболее простыми транспортными задачами являются задачи о перевозках некоторого однородного продукта из пунктов отправления в пункты назначения с минимальными затратами при известных затратах (тарифах) на перевозку единицы груза из каждого пункта отправления к каждому пункту назначения, а также при известных объемах продукта в пунктах отправления и потребностях в продукте в пунктах назначения.

Задача о назначениях

Эта задача также относится к задачам транспортного типа. Имеются n различных работ и такое же количество исполнителей. В задаче требуется найти вариант назначения n исполнителей на такое же количество работ, чтобы общие затраты были наименьшими при известных затратах c_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$), связанных с выполнением работы j исполнителем i (каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, а каждая работа поручена только одному исполнителю).

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод. Автоматизировать решение этим методом можно с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel. В случае двух переменных задача линейного программирования может быть решена графическим методом, для автоматизации которого используется пакет MathCad.

Общая постановка задачи линейного программирования

Математическая постановка задачи линейного программирования – найти значения переменных x_j $(j = \overline{1, n})$, доставляющих экстремум целевой функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{8}$$

удовлетворяющих основным ограничениям

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, s), \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = s+1, \ldots, k), \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad (i = k+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{9}$$

и граничным условиям

$$d_j \le x_j \le D_j. \tag{10}$$

Частный случай граничных условий – условия неотрицательности переменных:

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n}). \tag{11}$$

При этом a_{ij}, b_i, c_j, d_j ($d_j \ne 0$), D_j ($i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$) – заданные постоянные величины, *параметры* ЗЛП.

Задача состоит в нахождении оптимального плана (x_1, x_2, …, x_n), доставляющего целевой функции (8) оптимальное (экстремальное) значение и удовлетворяющего основным ограничениям (9), граничным условиям (10) и условиям неотрицательности (11).

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (9)–(11), называется *допустимым решением (планом)* ЗЛП.

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при котором функция (8) достигает своего максимального (минимального) значения, называется *оптимальным планом*.

При формализации задачи, т. е. разработке математической модели задачи линейного программирования, следует придерживаться приведенной ниже схемы, состоящей из трех шагов:

1-й шаг – выбор переменных, заданием числовых значений которых однозначно определяется состояние исследуемого объекта;

2-й шаг – количественное выражение выбранного критерия оптимальности в виде целевой функции, формулировка требования достижения экстремума целевой функцией;

3-й шаг – выражение ограничений на рост или уменьшение целевой функции в виде уравнений или неравенств, которые образуют систему ограничений.

Приведем примеры формализации задач и построения математической модели.

5.3. Примеры решения задач

Пример 1. Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5 м^2 стандартных ДСП, 1 м^2 листового стекла и 1 чел.-день трудозатрат. На тумбу – 1м^2 ДСП, 2 м^2 листового стекла и 1 чел.-день трудозатрат.

Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200 усл. ед., от 1 тумбы – 100 усл. ед. Материальные и трудовые ресурсы ограничены. В цехе работают 150 рабочих, в день нельзя израсходовать больше 350 м^2 ДСП и более 240 м^2 стекла.

Требуется определить, какое количество шкафов и тумб должен выпускать цех за день, чтобы прибыль была максимальной, составить математическую модель задачи.

Решение

Представим условие задачи в виде таблицы 25.

Таблица 25 – **Данные о нормах затрат, запасах ресурсов и прибыли от производства шкафов и тумб**

Ресурсы	Шкаф	Тумба	Запасы
ДСП, м^2	3,5	1	350
Стекло, м^2	1	2	240
Трудовые, чел.-дней	1,2	0,7	150
Прибыль, усл. ед.	200	100	

Решаем задачу с применением пошаговой схемы формирования линейной модели.

1-й шаг. Введем следующие переменные:

x_1 – количество шкафов,

x_2 – количество тумб, которые нужно производить за день.

2-й шаг. Запишем целевую функцию. В задаче ее экономический смысл – ежедневная прибыль цеха, которую требуется максимизировать. Поскольку прибыль от всех производимых шкафов составит $200x_1$, а прибыль от всех производимых тумб равна $100x_2$, то общая ежедневная прибыль цеха выражается в виде следующей функции:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max.$$

3-й шаг. Имеются ограничения на объем доступных ресурсов. Так, в цехе работают 150 рабочих. Каждый рабочий за день может произвести либо 1 шкаф, либо 1 тумбу. Поэтому если на производство шкафа требуется 1,2 чел.-дней, то на производство x_1 шкафов потребуется

$1{,}2x_1$ чел.-дней, на производство x_2 тумб – $0{,}7x_2$ чел.-дней. Поэтому на производство мебели по плану потребуется $1{,}2x_1 + 0{,}7x_2$ чел.-дней. Объем трудовых ресурсов, требуемых для производства мебели, по плану не должен превышать имеющегося в запасе ресурса, т. е. 150 чел.-дней:

$$1{,}2x_1 + 0{,}7x_2 \le 150.$$

Количество ДСП, затрачиваемых на все шкафы, составляет $3{,}5x_1$, а количество ДСП, затрачиваемых на все тумбы, – x_2. Общий расход ДСП за день равен $3{,}5x_1 + x_2$. Этот расход не должен превышать имеющегося запаса ДСП. Следовательно, получаем нижеприведенное ограничение:

$$3{,}5x_1 + x_2 \le 350.$$

Аналогично строится ограничение для расхода стекла в виде неравенства

$$x_1 + 2x_2 \le 240.$$

По смыслу переменных $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ (количество шкафов и тумб не может быть отрицательным). Кроме того, количество шкафов и тумб должно быть целым.

Таким образом, получаем следующую модель:

$$F = 200x_1 + 100x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350; \\ x_1 + 2x_2 \le 240; \\ 1{,}2x_1 + 0{,}7x_2 \le 150; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \\ x_1, x_2 - \text{целые}. \end{cases}$$

Пример 2. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее 30 кормовых ед., 1 000 г белка, 100 г кальция и 80 г фосфора.

В таблице 26 приведены данные о содержании указанных питательных веществ в 1 кг каждого корма и себестоимости этих кормов. Необходимо определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости, составить математическую модель.

Таблица 26 – **Данные о содержании питательных веществ в кормах и об их себестоимости**

Корм	Содержание в 1 кг				Себестоимость, усл. ед./кг
	кормовых ед.	белка, г	кальция, г	фосфора, г	
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Решение

Решаем задачу с применением пошаговой схемы формирования линейной модели.

1-й шаг. Введем следующие переменные:

x_1 – количество сена в рационе;

x_2 – количество силоса.

2-й шаг. Наилучшим считается тот рацион, себестоимость которого будет наименьшей, т. е. критерием оптимальности в данной задаче является себестоимость выбираемого рациона. Сено в количестве x_1 (кг) будет стоить $1{,}2x_1$ (усл. ед.), а силос в количестве x_2 (кг) – $0{,}8x_2$ (усл. ед.). Общая стоимость рациона, которая должна быть минимальна, представима в виде функции

$$F = 1{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \to \min.$$

3-й шаг. Чтобы рацион был полноценным, он должен содержать не менее 30 кормовых ед. Во всем сене, включаемом в рацион, содержится $0{,}5x_1$ кормовых ед., а во всем силосе – $0{,}5x_2$ кормовых ед. Общее количество кормовых единиц в рационе выражается суммой этих величин, поэтому получаем ограничение следующего вида:

$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \geq 30.$$

В 1 кг сена содержится 40 г белка, а в x_1 кг сена – $40x_1$ г. Во всем силосе, включаемом в рацион, содержится $10x_2$ г белка. Общее содержание белка в рационе составляет $40x_1 + 10x_2$, и оно должно быть не менее 1000 г. Таким образом, получаем следующее ограничение:

$$40x_1 + 10x_2 \geq 1000.$$

Аналогично можно записать ограничения по кальцию и фосфору:

$$1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 \geq 100,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 80.$$

Количество сена и силоса не может быть отрицательным:

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0.$$

Так как сена в рационе должно быть не более 50 кг, а силоса не более 85 кг, то получаем граничные условия:

$$x_1 \leq 50;$$

$$x_2 \leq 85.$$

Итак, математическая модель данной задачи имеет следующий вид:

$$F = 1{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \geq 30; \\ 40x_1 + 10x_2 \geq 1000; \\ 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 \geq 100; \\ 2x_1 + x_2 \geq 80; \\ x_1 \leq 50; \\ x_2 \leq 85; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

5.4. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Цех выпускает изделия двух видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 ч, одной втулки – 2 ч. От реализации вала предприятие получает прибыль 80 к., а от реализации втулки – 60 к. Цех должен произвести не менее 100 шт. валов и не менее 200 шт. втулок. Определите, сколько валов и втулок должен выпустить цех, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если фонд рабочего времени производственных рабочих составляет 900 чел.-ч.

Вариант 2. Предприятие выпускает три вида изделий. Месячная программа производства составляет 2 000 изделий первого вида, 1 800 изделий второго вида и 1 500 изделий третьего вида. Для выпуска изделий используются материалы, месячный расход которых не может превысить 61 000 кг. В расчете на одно изделие первого вида расходуется 8 кг материала, второго вида – 10, третьего вида – 11 кг. Оптовая цена одного изделия первого вида – 7 р., второго и третьего – 10 и 9 р. соответственно. Определите оптимальный план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию максимум выручки.

Вариант 3. Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используются два сорта кожи. Затраты труда и материалов для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации одной единицы продукции указаны в таблице 28. Составьте план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Таблица 28 – **Информация о нормах затрат и запасах ресурсов**

Ресурсы	Запас ресурса	Норма затрат ресурсов на производство одной пары обуви по моделям			
		1-я	2-я	3-я	4-я
Рабочее время, чел.-ч	1 000	1	2	2	12
Кожа 1-го сорта, $дм^2$	500	2	1	0	20
Кожа 2-го сорта, $дм^2$	1 200	0	1	4	10
Прибыль, усл. ед.	–	2	40	10	15

Вариант 4. В суточный рацион включаются два продукта питания: $П_1$ и $П_2$ (таблица 29), причем продукта $П_1$ должно войти в днев-

ной рацион не более 200 ед. Стоимость одной единицы продукта $П_1$ составляет 0,2 к., продукта $П_2$ – 0,4 к. Определите оптимальный рацион, стоимость которого будет наименьшей, при условии, что он будет содержать необходимое количество питательных веществ *A* и *B*.

Таблица 29 – **Данные о содержании питательных веществ в продуктах и о нормах потребления**

Питательные вещества	Минимальная норма потребления, ед.	Содержание питательного вещества в одной единице продукта, усл. ед.	
		$П_1$	$П_2$
A	120	0,2	0,2
B	160	0,4	0,2

Вариант 5. Обработка деталей *A* и *B* может производиться на трех станках. Причем каждая деталь при ее изготовлении должна последовательно обрабатываться на каждом из станков. Прибыль при реализации детали *A* составляет 10 р., детали *B* – 16 р. Исходные данные для решения задачи представлены в таблице 30.

Таблица 30 – **Сведения о нормах времени на обработку детали и о времени работы на станке, ч**

Станки	Норма времени на обработку детали		Время работы станка
	A	*B*	
1-й	0,2	0,1	100
2-й	0,2	0,5	180
3-й	0,1	0,2	100

Определите производственную программу, обеспечивающую максимальную прибыль при условии, что деталей *A* нужно произвести не менее 300 ед., а деталей *B* – не более 200 ед.

Вариант 6. Торговое предприятие для продажи товаров трех видов использует следующие ресурсы: время и площадь торговых залов. Затраты ресурсов на продажу одной партии товаров каждого вида указаны в таблице 31. Прибыль, получаемая от реализации одной партии товаров первого вида, составляет 5 усл. ед.; второго – 8; третьего – 6 усл. ед. Определите оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Таблица 31 – **Информация о затратах ресурсов на продажу одной партии товаров**

Ресурсы	Вид товара			Объем ресурсов
	1-й	2-й	3-й	
Время, чел.-ч	0,5	0,7	0,6	370
Площадь, м^2	0,1	0,3	0,2	90

Вариант 7. Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск составляет 90 ед. первого изделия, 70 – второго и 60 ед. третьего изделия. Суточные ресурсы включают 780 ед. производственного оборудования (станки, машины), 850 ед. сырья и 790 ед. электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в таблице 32. Стоимость первого изделия – 8 усл. ед., второго – 7, третьего – 6 усл. ед. Укажите, сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной.

Таблица 32 – **Информация о расходе ресурсов на каждое изделие, ед.**

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	1-е	2-е	3-е
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Вариант 8. Для производства столов и стульев имеются ресурсы трех видов: доски первого типа (500 м), второго (290 м), трудовые ресурсы (440 чел.-ч). От реализации одного стола организация получает прибыль в размере 12 р., стула – 5 р. Затраты ресурсов на одну единицу изделия указаны в таблице 33.

Таблица 33 – **Данные о расходе ресурсов на производство одной единицы изделия**

Ресурсы	Стол	Стул
Доски первого типа, погон. м	5	1
Доски второго типа, погон. м	2	1
Трудовые ресурсы, чел.-ч	3	2

Составьте план выпуска продукции при максимизации прибыли.

Вариант 9. Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в пакеты. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется 1 010, 1 010 и 9 450 кг молока соответственно. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 усл. ед. Определите, сколько завод должен выпускать молока, кефира и сметаны, чтобы прибыль от реализации произведенной продукции сделать максимальной. При этом примите во внимание, что завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в пакеты. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Вариант 10. Составьте суточный рацион питания крупного рогатого скота. Рацион должен содержать 9 кг кормовых ед., 960 г перевариваемого протеина, 370 мг каротина. Рацион составляется из четырех видов кормов: сена, кукурузного силоса, концентратов и сахарной свеклы. Содержание питательных веществ в 1 кг этих кормов и цена за 1 кг кормов представлены в таблице 34.

Рацион должен быть минимальным по стоимости.

Таблица 34 – **Данные о содержании питательных веществ в одной единице корма**

Вещества	Сено	Силос кукурузный	Концентраты	Свекла
Кормовые единицы, кг	0,40	0,20	1,00	0,25
Перевариваемый протеин, г	50	10	100	12
Каротин, мг	20	15	1	0
Цена 1 кг кормов, денеж. ед.	1,0	0,5	2,0	1,5

Вариант 11. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены суммой 1000 долл. США в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл. США, а ка-

ждая минута телерекламы – 100 долл. США. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере в два раза чаще, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше объема сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить оптимальное распределение ежемесячно отпускаемых средств между радио- и телерекламой.

Вариант 12. Фирма производит два вида продукции – *A* и *B*. Объем сбыта продукции *A* составляет 60% от общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции *A* и *B* используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 кг. Расход сырья на единицу продукции *A* составляет 2 кг, а на единицу продукции *B* – 4 кг. Цены продукции *A* и *B* равны 20 и 40 усл. ед. соответственно. Определить оптимальное распределение сырья для изготовления продукции *A* и *B*.

Контрольные вопросы

1. Как классифицируются задачи математического программирования в зависимости от вида целевой функции и функций системы ограничений?
2. Что значит формализовать экономическую задачу? Каковы основные компоненты математической модели задачи линейного программирования?
3. Что является искомыми величинами задачи?
4. Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены?
5. Какова цель решения задачи? Какой параметр задачи служит критерием оптимальности решения?
6. Что такое область допустимых решений задачи линейного программирования?
7. Каковы этапы формализации задачи, т. е. разработки математической модели задачи линейного программирования?
8. Что такое допустимый план задачи линейного программирования?
9. Что такое оптимальный план задачи линейного программирования?

10. Какой математический метод используется для решения задач линейного программирования?

11. Какое средство пакета MS Excel используется для автоматизации решения задач этим методом?

12. Каким математическим методом может быть решена задача линейного программирования в случае поиска двух переменных?

13. Какое программное средство используется для автоматизации решения задач линейного программирования графическим методом?

14. Может ли задача линейного программирования не иметь решения?

15. Может ли задача линейного программирования иметь бесконечное множество решений?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Бродецкий, Г. Л. Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации : учеб. / Г. Л. Бродецкий, Д. А. Гусев. – М. : Академия, 2014. – 288 с.

Еськова, О. И. Экономико-математические методы и модели : курс лекций / О. И. Еськова. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп., 2006. – 168 с.

Красс, М. С. Математические методы и модели для магистрантов и экономики : учеб. пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2006. – 496 с.

Кузнецов, В. П. Экономико-математические методы и модели : конспект лекций / В. П. Кузнецов. – Минск : МИУ, 2001. – 131 с.

Математические методы и модели исследования операций : учеб. / под ред. В. А. Колемаева. – М. : ЮНИТИ, 2008. – 592 с.

Минюк, С. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Минск : ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

Орехов, Н. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / Н. А. Орехов, А. Г. Левин, Е. А. Горбунов. – М. : ЮНИТИ, 2004. – 302 с.

Попов, А. М. Экономико-математические методы и модели. Высшая математика для экономистов : учеб. / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. А. М. Попова. – М. : Юрайт, 2011. – 479 с.

Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под ред. А. В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999. – 412 с.

Юферева, О. Д. Экономико-математические методы и модели : сб. задач / О. Д. Юферева. – Минск : БГЭУ, 2002. – 103 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I ступени и переподготовки руководящих работников и специалистов

В трех частях

Часть 1

Авторы-составители:
Заяц Татьяна Александровна
Еськова Оксана Ивановна
Грибовская Марал Атаевна

Редактор Любошенко М. П.
Компьютерная верстка Л. Ф. Барановская

Подписано в печать 08.02.21. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 5,80. Тираж 120 экз.
Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/138 от 08.01.2014.
Просп. Октября, 50, 246029, Гомель.
http://www.i-bteu.by