УДК-33
ББК 65.421-96
Э 35

Авторы-составители: В. В. Бондарева, канд. техн. наук, доцент;
Т. А. Заяц, ассистент

Рецензенты: М. И. Жадан, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики и программирования Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;
О. И. Еськова, канд. техн. наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации;
Л. А. Воробей, канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры высшей математики Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендован к изданию научно-методическим советом УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 3 от 8 февраля 2005 г.

Э 35 **Экономико**-математические методы и модели : практикум к лабораторным занятиям для студентов экономических специальностей и слушателей ОСП «Институт повышения квалификации и переподготовки кадров Белкоопсоюза». В 5 ч. Ч. 2 / авт.-сост. : В. В. Бондарева, Т. А. Заяц. – Гомель : УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2005. – 60 с.
ISBN 985-461-289-9

УДК-33
ББК 65.421-96

ISBN 985-461-289-9

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Данный практикум подготовлен в соответствии с программой курса «Экономико-математические методы и модели». В практикуме рассматриваются общесистемные прикладные модели по следующим темам:

1. Моделирование межотраслевого баланса.
2. Системы массового обслуживания.
3. Модели управления товарными запасами.

В теме «Моделирование межотраслевого баланса» рассмотрены основные понятия балансового метода в экономических исследованиях. Изучается балансовая модель в статической постановке. Описывается порядок расчета ее показателей на основании коэффициентов прямых и полных материальных затрат. В балансовой модели рассматривается включение дефицитных ресурсов.

В теме «Системы массового обслуживания» приводится описание систем массового обслуживания, классификация и формулы для расчета основных характеристик. Приводится анализ решений.

В теме «Модели управления товарными запасами» описывается научное управление запасами. Рассматривается простейшая модель Уилсона по определению оптимальной партии поставки товара и модель с учетом неудовлетворенных требований, т. е. с дефицитом.

В начале каждой темы пособия приводятся сведения по теории в объеме, необходимом для решения задач. Затем следуют примеры решения типовых задач, после чего предлагаются задачи для самостоятельного решения. В конце каждой темы предложены вопросы для контроля и закрепления пройденного материала.

Числовые данные в задачах в основном носят условный характер. При решении задач студентам предлагается использовать два пакета прикладных программ: MS Excel и Math Cad.

Тема 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Лабораторная работа 1.
Балансовая модель

1.1. Основные теоретические сведения. Понятие балансовой модели

Балансовые модели широко применяются при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе лежит балансовый метод – взаимное сопоставление имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Балансовая модель – система уравнений, которые выражают требование баланса между производимым количеством продукции и потребностью в ней.

В модели межотраслевого баланса все народное хозяйство представляется в виде совокупности n отраслей, каждая из которых рассматривается как производящая и как потребляющая (табл. 1).

Таблица 1. **Схема межотраслевого баланса**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y	Валовая продукция, X
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…		…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n

Обозначим валовую продукцию, произведенную n отраслями X_1, X_2, …, X_n. Вся продукция i-отрасли (X_i) разделяется на промежуточную или межотраслевую (x_{ij}) и конечную (Y_i), где i и j – соответственно номера отраслей производящих и потребляющих:

$$\begin{gathered} X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + Y_1, \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + Y_2, \\ \ldots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + Y_n. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Промежуточную продукцию x_{ij} все отрасли потребляют внутри себя для текущего производства конечной продукции. Конечная продукция Y_i выходит из производства в область конечного использования (на рынок, в другие внешние производства).

Основу информационного обеспечения балансовых моделей в экономике составляет технологическая матрица-таблица, составленная из коэффициентов (нормативов) прямых затрат на производство единицы продукции, имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$;

$i = \overline{1, n}$;

$j = \overline{1, n}$.

Предполагается, что для производства единицы продукции в j-й отрасли требуется определенное количество затрат промежуточной продукции i-й отрасли, равной a_{ij}. Эти затраты не зависят от объема производства в отрасли и являются стабильной величиной во времени. Величины a_{ij} называются коэффициентами прямых материальных затрат.

Коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} показывают количество продукции i-й отрасли, использованной при производстве единицы продукции j-й отрасли.

Объем промежуточной продукции x_{ij} можно выразить через коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} и объем валовой продукции X_j следующим образом:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j.$$

Тогда систему уравнений (1.1) с учетом коэффициентов прямых материальных затрат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + Y_1, \\ X_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n + Y_2, \\ &\dots \\ X_n &= a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots + a_{nn} X_n + Y_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

или

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.4}$$

Введем обозначения: X – вектор-столбец валовой продукции, Y – вектор столбец конечной продукции:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (1.3) можно записать в матричной форме:

$$X = AX + Y, \tag{1.5}$$

Система уравнений (1.3) или в матричной форме (1.5) называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса*.

С помощью балансовой модели можно выполнять три варианта расчетов:

1. Задав в модели величины валовой продукции каждой отрасли X, можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли Y по формуле

$$Y = (E - A)\,X. \tag{1.6}$$

2. Задав величины конечной продукции каждой отрасли Y, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли X следующим образом:

$$X = (E - A)^{-1}Y, \tag{1.7}$$

где E – единичная матрица размерности $n \times n$;

$(E - A)^{-1}$ – матрица, обратная* к матрице $(E - A)$.

3. Для ряда отраслей, задав величины валовой продукции X, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции Y, можно найти величины конечной продукции первых отраслей Y и объемы валовой продукции вторых отраслей X. В этом варианте расчета удобнее использовать систему линейных уравнений (1.3).

Введем обозначение $P = (E - A)^{-1}$, тогда систему уравнений в матричной форме (1.7) можно записать в следующем виде:

$$X = PY. \tag{1.8}$$

Матрица $P = \left(p_{ij}\right)_{n \times n}$ называется *матрицей коэффициентов полных материальных затрат* и включает в себя все затраты.

---

* Обратной называется матрица, которая при умножении на исходную дает в результате единичную, т. е. $(E - A) \cdot (E - A)^{-1} = (E - A)^{-1} \cdot (E - A) = E$. Если $det\ (E - A) \neq 0$, т. е. матрица невырожденная, то обратная к ней матрица существует.

Коэффициенты полных материальных затрат p_{ij} показывают, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных материальных затрат p_{ij} применяются также для определения прироста объемов валовой продукции при изменении объемов конечной продукции:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \Delta Y_j \,, \tag{1.9}$$

где ΔX_i и ΔY_j – изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

1.2. Пример решения задачи

Баланс для трех отраслей за отчетный период представлен в табл. 2.

Таблица 2. **Исходные данные для решения задачи**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	40	20	60
2	30	10	80	100
3	60	40	10	120

Найдите следующее:

1. Объемы производства валовой продукции в отчетном периоде.
2. Коэффициенты прямых материальных затрат.
3. Коэффициенты полных материальных затрат.

Определите объем валовой продукции X_1^n, X_2^n, X_3^n для планируемого периода при плане конечной продукции $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 110$, $Y_3^n = 160$.

Решение

Выполним решение с помощью приложения Excel. Заполним данными задачи лист как показано на рис. 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Распределение продукции по	Отрасли			Конечная продукция,	Валовая продукция,	Конечная продукция,	Валовая продукция,
3	отраслям	1	2	3	Yo	Xo	Yп	Xп
4	1	50	40	20	60		80	
5	2	30	10	80	100		110	
6	3	60	40	10	120		160	
7								
8								
9		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
10								
11								
12								
13								
14		E-A				Коэффициенты полных материальных затрат, P		
15								
16								
17								

Рис. 1. **Исходные данные**

1. Найдем объемы валовой продукции X каждой отрасли в ячейках F4:F6 по формуле (1.1).

Для этого в ячейку F4 запишем формулу

=СУММ(B4:E4),

а затем скопируем ее в ячейки F5 и F6. Получим: $X_1 = 170$, $X_2 = 220$, $X_3 = 230$.

2. Рассчитаем матрицу коэффициентов прямых материальных затрат в ячейках B10:D12 по формуле (1.2).

Для нахождения коэффициентов первого столбца матрицы введем в ячейку B10 формулу

=B4:$F$4,

а затем скопируем ее в ячейки F5 и F6. Коэффициенты второго и третьего столбцов матрицы рассчитываются аналогично. Получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0,29 & 0,18 & 0,09 \\ 0,18 & 0,05 & 0,35 \\ 0,35 & 0,18 & 0,04 \end{pmatrix}.$$

3. Рассчитаем матрицу коэффициентов полных материальных затрат в ячейках F15:H17 по формуле

$$P = (E - A)^{-1}.$$

В балансе рассматриваются 3 отрасли, поэтому в ячейках F10:H12 запишем единичную матрицу E размерности 3×3:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В ячейках B15:D17 рассчитаем матрицу $E - A$. Для этого в ячейку B15 введем формулу

=F10-B10,

а затем скопируем ее в остальные ячейки. Получим

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}71 & -0{,}18 & -0{,}09 \\ -0{,}18 & 0{,}95 & -0{,}35 \\ -0{,}35 & -0{,}18 & 0{,}96 \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы $E - A$ составляет 3×3, следовательно размерность матрицы P будет такой же. Для нахождения обратной матрицы используем функцию =МОБР(). Это функция массива.

Функции массивов обладают следующими особенностями:

♦ функцию массива можно изменять или удалять только для всего массива целиком, а для одной ячейки невозможно;

♦ аргументы функций можно изменять только для всего массива сразу, а не для одной ячейки;

♦ в строке формул функции массива записываются в фигурных скобках, например {=МОБР(A12:B13)}.

Для расчета матрицы коэффициентов полных материальных затрат P:

1) выделим диапазон ячеек F15:H17;

2) вызовем мастер функций и выберем из категории *Математические* функцию МОБР(), которая возвращает в качестве результата массив – обратную матрицу. В качестве аргумента функции укажем диапазон ячеек B15:D17, в котором вычислена матрица $E - A$;

3) для получения результата нажмем одновременно клавиши <Ctrl>,<Shift> и <Enter>. В ячейках F15:H17 появится результат – матрица P:

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}65 & 0{,}37 & 0{,}28 \\ 0{,}57 & 1{,}25 & 0{,}51 \\ 0{,}72 & 0{,}37 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем объемы валовой продукции планового периода по формуле (1.8). Для вычисления воспользуемся функцией =МУМНОЖ()

категории *Математические*, которая также является функцией массива. Для нахождения валовой продукции планового периода выполним следующее:

1) выделим диапазон ячеек H4:H6;

2) с помощью *Мастера функций* выберем функцию =МУМНОЖ();

3) в качестве аргументов укажем: массив 1 (матрица P) – диапазон ячеек F15:H17, массив 2 (конечная продукция планового периода Y^n) – диапазон ячеек G4:G6;

4) одновременно нажмем клавиши <Ctrl>,<Shift> и <Enter>. В ячейках H4:H6 появится результат – валовая продукция планового периода X:

$$X^n = \begin{pmatrix} 218 \\ 264 \\ 298 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для планируемого периода объем валовой продукции X_1^n = 218, X_2^n = 264, X_3^n = 298 при плане конечной продукции Y_1^n = 80, Y_2^n = 110, Y_3^n = 160. Численное решение задачи представлено на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Распределение продукции по	Отрасли			Конечная продукция,	Валовая продукция,	Конечная продукция,	Валовая продукция,
3	отраслям	1	2	3	Yо	Xо	Yп	Xп
4	1	50	40	20	60	170	80	218
5	2	30	10	80	100	220	110	264
6	3	60	40	10	120	230	160	298
7								
8								
9		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
10		0,29	0,18	0,09		1	0	0
11		0,18	0,05	0,35		0	1	0
12		0,35	0,18	0,04		0	0	1
13								
14		E-A				Коэффициенты полных материальных затрат, P		
15		0,71	-0,18	-0,09		1,65	0,37	0,28
16		-0,18	0,95	-0,35		0,57	1,25	0,51
17		-0,35	-0,18	0,96		0,72	0,37	1,25

Рис. 2. **Числовое решение задачи**

Решение задачи в режиме формул представлено на рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Распределение продукции по отраслям	Отрасли			Конечная продукция, Yо	Валовая продукция, Xо	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	=СУММ(B4:E4)	80	=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)
5	2	30	10	80	100	=СУММ(B5:E5)	110	=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)
6	3	60	40	10	120	=СУММ(B6:E6)	160	=МУМНОЖ(F15:H17;G4:G6)
7								
8								
9		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
10		=B4/$F$4	=C4/$F$5	=D4/$F$6		1	0	0
11		=B5/$F$4	=C5/$F$5	=D5/$F$6		0	1	0
12		=B6/$F$4	=C6/$F$5	=D6/$F$6		0	0	1
13								
14		E-A				Коэффициенты полных материальных затрат, P		
15		=F10-B10	=G10-C10	=H10-D10		=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)
16		=F11-B11	=G11-C11	=H11-D11		=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)
17		=F12-B12	=G12-C12	=H12-D12		=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)	=МОБР(B15:D17)

Рис. 3. **Решение задачи в режиме формул**

1.3. Задача для самостоятельной работы

Баланс для трех отраслей за отчетный период представлен в табл. 3.

Таблица 3. **Исходные данные для решения задачи**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0
	1	2	3	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	Y_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	Y_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	Y_3

Определить следующее:

1. Объемы валовой продукции.
2. Матрицы коэффициентов прямых и полных материальных затрат.
3. Объем валовой продукции для планируемого периода X_1^n, X_2^n, X_3^n при плане конечной продукции Y_1^n, Y_2^n, Y_3^n.

Решить задачу в соответствии с приведенными в табл. 4 вариантами.

Таблица 4. **Варианты для решения задачи**

Номер варианта	Отчетный период					Плановый период
	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Плановая конечная продукция, $Y^п$
		1	2	3		
1	1	10	15	20	50	65
	2	20	25	30	70	80
	3	25	30	15	40	44
2	1	50	60	40	90	96
	2	80	20	30	80	84
	3	90	50	65	95	120
3	1	50	40	60	90	96
	2	10	30	25	50	55
	3	60	40	35	70	82
4	1	60	50	80	95	114
	2	25	45	50	80	83
	3	30	40	45	60	70
5	1	50	40	70	90	100
	2	60	10	20	70	94
	3	30	50	60	80	88
6	1	20	25	45	60	62
	2	35	40	20	70	86
	3	80	50	30	60	88
7	1	50	40	20	70	72
	2	60	15	25	85	94
	3	35	30	30	60	62
8	1	80	85	90	90	128
	2	30	45	60	80	86
	3	20	50	45	90	102

Контрольные вопросы

1. Что такое валовая, конечная и промежуточная продукция?
2. Что связывает между собой конечную и промежуточную продукцию?
3. Что показывают коэффициенты прямых материальных затрат?
4. Как, зная коэффициенты прямых материальных затрат и объемы

валовой продукции каждой отрасли, определить объемы промежуточной продукции?

5. Как определить объемы конечной продукции каждой отрасли, зная объемы валовой продукции каждой отрасли и коэффициенты прямых материальных затрат?

6. Как определить объемы валовой продукции каждой отрасли, зная объемы конечной продукции каждой отрасли и коэффициенты прямых материальных затрат?

7. Что показывают коэффициенты полных материальных затрат?

8. Как в Excel вводятся формулы массива, какие правила необходимо соблюдать?

Лабораторная работа 2. Использование дефицитных ресурсов в моделях межотраслевого баланса

2.1. Основные теоретические сведения

На практике для выпуска планового объема валовой продукции X требуется использовать следующие ограниченные (дефицитные) ресурсы производства:

а) производственные фонды (основные, оборотные, заработная плата);

б) природные ресурсы (воды, ископаемые, леса);

в) трудовые ресурсы;

г) продукция других внешних систем (импорт);

д) другие виды ресурсов.

Включение дефицитных ресурсов в модель осуществляется следующим образом.

Пусть имеется m дефицитных ресурсов R_1, R_2, …, R_m и их потребление отраслями за отчетный период известно (табл. 5).

Обозначим через r_{ij} – количество i-ресурса, потребленного j-отраслью; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$:

$$\begin{aligned} R_1 &= r_{11} + r_{12} + \ldots + r_{1n}, \\ R_2 &= r_{21} + r_{22} + \ldots + r_{2n}, \\ &\ldots \\ R_m &= r_{m1} + r_{m2} + \ldots + r_{mn}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Таблица 5. **Схема межотраслевого баланса с учетом дефицитных ресурсов**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y	Валовая продукция, X
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…		…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Ресурсы						
1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}		
2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}		
…	…	…		…		
m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}		

Количество израсходованных ресурсов и объем произведенной валовой продукции связывают коэффициенты прямых затрат ресурсов, которые можно представить в виде матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots. & b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $b_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{X_j}$;

$i = \overline{1, m}$;

$j = \overline{1, n}$.

Величины b_{ij} в балансовых моделях не зависят от объема потребления ресурсов в отрасли и являются стабильной величиной во времени.

Коэффициенты прямых затрат ресурсов b_{ij} обозначают объем i-ресурса, необходимого для производства единицы продукции j-отрасли.

Пусть на планируемый период известны выделенные объемы каждого ресурса R^n. Их количество должно обеспечивать выпуск валовой продукции X^n в требуемом объеме. Зная коэффициенты прямых затрат ресурсов b_{ij}, можно рассчитать требующийся объем ресурсов каждого вида R_i^{mp}, необходимых для выпуска валовой продукции X^n в требуемом объеме:

$$R_1^{\,mp} = b_{11}\, X_1^{\,n} + b_{12}\, X_2^{\,n} + \ldots + b_{1n}\, X_n^{\,n};$$
$$R_2^{\,mp} = b_{21}\, X_1^{\,n} + b_{22}\, X_2^{\,n} + \ldots + b_{2n}\, X_n^{\,n}; \qquad (2.3)$$
$$\ldots$$
$$R_m^{\,mp} = b_{m1}\, X_m^{\,n} + b_{m2}\, X_2^{\,n} + \ldots + b_{mn}\, X_m^{\,n}.$$

Систему уравнений (2.3) можно записать в матричной форме:

$$R^{mp} = BX, \qquad (2.4)$$

где $R^{mp} = \begin{bmatrix} R_1^{\,mp} \\ R_2^{\,mp} \\ \ldots \\ R_m^{\,mp} \end{bmatrix}$ – вектор-столбец требующихся ресурсов.

Для обеспечения планируемого выпуска валовой продукции X^n необходимо выполнение следующего условия:

$$R^{mp} \le R^{n}. \qquad (2.5)$$

Формула (2.3) позволяет найти общие потребности в ресурсах при заданном объеме валовой продукции.

2.2. Пример решения задачи

Рассмотрим трехотраслевое производство. Данные по балансу продукции и затратам ресурсов за отчетный период приведены в табл. 6.

Таблица 6. **Данные о выпуске продукции и потребление ресурсов в отчетном периоде**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	40	20	60
2	30	10	80	100
3	60	40	10	120
Ресурсы				
1	30	20	50	
2	150	170	120	
3	80	60	70	

Задан план выпуска конечной продукции Y_1^n = 80, Y_2^n = 120 и Y_3^n = 150 на следующий период. Под него выделены ресурсы в следующих объемах: R_1^n = 120; R_2^n = 550; R_3^n = 265.

1. Определить, достаточно ли выделено ресурсов под план выпуска конечной продукции.

2. В случае недостаточности ресурсов рассчитать возможный план выпуска конечной продукции при выделенных объемах ресурсов.

Решение

Выполним решение с помощью приложения Excel. Заполним данными задачи лист как показано на рис. 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60		80	
5	2	30	10	80	100		120	
6	3	60	40	10	120		150	
7	Ресурсы, Ro						Ресурсы выделенные, Rп	Ресурсы требующиеся, Rт
8	1	30	20	50			120	
9	2	150	170	120			550	
10	3	80	60	70			265	
11								
12		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
13								
14								
15								
16								
17								
18		Коэффициенты полных материальных затрат, P				E-A		
19								
20								
21								
22								
23		Коэффициенты прямых затрат ресурсов, B						
24								
25								
26								

Рис. 4. **Исходные данные**

1. План выпуска конечной продукции зависит от плана выпуска валовой продукции, см. формулу (1.8). Поэтому, в первую очередь,

необходимо рассчитать план выпуска валовой продукции. Для этого выполним следующее:

♦ Найдем объем валовой продукции в отчетном периоде (см. лабораторную работу 1):

$$X = \begin{pmatrix} 170 \\ 220 \\ 230 \end{pmatrix}.$$

♦ Найдем коэффициенты прямых материальных затрат (см. лабораторную работу 1):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}18 & 0{,}09 \\ 0{,}18 & 0{,}05 & 0{,}35 \\ 0{,}35 & 0{,}18 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

♦ Найдем коэффициенты полных материальных затрат (см. лабораторную работу 1):

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}65 & 0{,}37 & 0{,}28 \\ 0{,}57 & 1{,}25 & 0{,}51 \\ 0{,}72 & 0{,}37 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

♦ Найдем объем валовой продукции в планируемом периоде в ячейках H4:H6 (см. лабораторную работу 1):

$$X = \begin{pmatrix} 219 \\ 272 \\ 289 \end{pmatrix}.$$

2. Количество ресурсов планового периода зависит от плана выпуска валовой продукции, см. формулу (2.4). Чтобы определить достаточно ли выделено ресурсов, необходимо рассчитать количество ресурсов, требующееся в плановом периоде. Для этого выполним следующее:

♦ По данным отчетного периода в ячейках B24:D26 найдем матрицу коэффициентов прямых ресурсов по формуле (2.2). Для нахождения коэффициентов первого столбца матрицы объемы ресурсов каждого вида потребленных первой отраслью разделим на объем валовой продукции первой отрасли. Введем в ячейку B24 формулу

=B8/$F$4,

а затем скопируем ее вниз по столбцу. Коэффициенты остальных столбцов матрицы рассчитываются аналогично. В результате получим следующее:

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}09 & 0{,}22 \\ 0{,}88 & 0{,}07 & 0{,}52 \\ 0{,}47 & 0{,}27 & 0{,}30 \end{pmatrix}.$$

♦ Рассчитаем необходимое количество ресурсов каждого вида в плановом периоде по формуле (2.4) в ячейках H8:H10 с помощью функции *МУМНОЖ()* (см. лабораторную работу 1). Получим следующее:

$$R^{mp} = \begin{pmatrix} 126 \\ 554 \\ 265 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для производства плановой конечной продукции в объемах $Y_1^{\,n} = 80$, $Y_2^{\,n} = 120$ и $Y_3^{\,n} = 150$ требуется $R_1^{\,mp} = 126$, $R_2^{\,mp} = 544$ и $R_3^{\,mp} = 265$ единиц ресурсов.

Численное решение задачи представлено на рис. 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Отчетный период						Плановый период	
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	170	80	219
5	2	30	10	80	100	220	120	272
6	3	60	40	10	120	230	150	289
7	Ресурсы, Ro						Ресурсы выделенные, Rп	Ресурсы требующиеся, Rт
8	1	30	20	50			120	126
9	2	150	170	120			550	554
10	3	80	60	70			265	265
11								
12		Коэффициенты прямых материальных затрат, А				Единичная матрица, Е		
13		0,29	0,18	0,09		1	0	0
14		0,18	0,05	0,35		0	1	0
15		0,35	0,18	0,04		0	0	1
16								
17								
18		Коэффициенты полных материальных затрат, Р				Е-А		
19		1,65	0,37	0,28		0,71	-0,18	-0,09
20		0,57	1,25	0,51		-0,18	0,95	-0,35
21		0,72	0,37	1,25		-0,35	-0,18	0,96
22								
23		Коэффициенты прямых затрат ресурсов, В						
24		0,18	0,09	0,22				
25		0,88	0,77	0,52				
26		0,47	0,27	0,30				

Рис. 5. **Численное решение задачи**

Решение задачи в режиме формул приведено на рис. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Отчетный период					Плановый период	
2	Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Yo	Валовая продукция, Xo	Конечная продукция, Yп	Валовая продукция, Xп
3		1	2	3				
4	1	50	40	20	60	=СУММ(B4:E4)	80	=МУМНОЖ(B19:D21;G4:G6)
5	2	30	10	80	100	=СУММ(B5:E5)	120	=МУМНОЖ(B19:D21;G4:G6)
6	3	60	40	10	120	=СУММ(B6:E6)	150	=МУМНОЖ(B19:D21;G4:G6)
7	Ресурсы, Ro						Ресурсы выделенные, Rп	Ресурсы требующиеся, Rт
8	1	30	20	50			120	=МУМНОЖ(B24:D26;H4:H6)
9	2	150	170	120			550	=МУМНОЖ(B24:D26;H4:H6)
10	3	80	60	70			265	=МУМНОЖ(B24:D26;H4:H6)
11								
12		Коэффициенты прямых материальных затрат, A				Единичная матрица, E		
13		=B4/$F$4	=C4/$F$5	=D4/$F$6		1	0	0
14		=B5/$F$4	=C5/$F$5	=D5/$F$6		0	1	0
15		=B6/$F$4	=C6/$F$5	=D6/$F$6		0	0	1
16								
17								
18		Коэффициенты полных материальных затрат, P				E-A		
19		=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)		=F13-B13	=G13-C13	=H13-D13
20		=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)		=F14-B14	=G14-C14	=H14-D14
21		=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)	=МОБР(F19:H21)		=F15-B15	=G15-C15	=H15-D15
22								
23		Коэффициенты прямых затрат ресурсов, B						
24		=B8/$F$4	=C8/$F$5	=D8/$F$6				
25		=B9/$F$4	=C9/$F$5	=D9/$F$6				
26		=B10/$F$4	=C10/$F$5	=D10/$F$6				

Рис. 6. **Решение задачи в режиме формул**

3. Проверим ограничение по ресурсам по формуле (2.5). На планируемый период были выделены ресурсы в объемах: $R_1^n = 120$, $R_2^n = 550$, $R_3^n = 265$, т. е. для реализации плана конечной продукции в объемах $Y_1^n = 80$, $Y_2^n = 120$ и $Y_3^n = 150$ ресурсов недостаточно. Предложенный план невозможно реализовать.

Уменьшим план конечной продукции. Рассмотрим новый план выпуска конечной продукции несколько занизив ее первоначальные объемы. Пусть $Y_1^n = 75$, $Y_2^n = 114$ и $Y_3^n = 145$. В ячейках G4:G6 введите новые значения плана конечной продукции. Excel автоматически пересчитает все данные задачи. Сравните новые данные по потребностям в ресурсах $R_1 = 120$, $R_2 = 527$, $R_3 = 252$ с выделенными. Неравенство (2.5) выполняется, следовательно план выпуска валовой продукции $Y_1^n = 75$, $Y_2^n = 114$ и $Y_3^n = 145$ может быть принят.

2.3. Задача для самостоятельной работы

Пусть имеется n-отраслевое производство, потребляющее m видов ресурсов. Данные по балансу продукции и затратам ресурсов за отчетный период приведены в таблице вариантов (табл. 7).

Задан план выпуска конечной продукции Y^n на следующий период. Под него выделены ресурсы R^n.

1. Определить, достаточно ли выделено ресурсов под план выпуска конечной продукции.

2. В случае недостаточности ресурсов рассчитать возможный план выпуска конечной продукции при выделенных объемах ресурсов.

Таблица 7. **Варианты для решения задачи**

Вариант 1

Отчетный период					Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3		
1	50	40	20	60	90
2	30	10	80	100	110
3	60	40	10	120	130
Ресурсы					Ресурсы
1	5	7	4		14
2	2	8	3		11

Вариант 2

Отчетный период				Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2		
1	15	20	60	70
2	60	25	70	80
Ресурсы				Ресурсы
1	3	4		8
2	5	4		12
3	6	3		14

Вариант 3

Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
1	50	40	30	10	40	45
2	30	10	20	35	50	55
3	60	40	20	15	30	40
4	20	15	45	30	50	55
Ресурсы						Ресурсы
1	5	7	2	3		20
2	2	8	5	4		22

Вариант 4

Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
1	10	20	15	10	40	45
2	15	25	20	35	50	55
3	30	25	35	15	30	40
4	40	20	33	24	56	60
Ресурсы						Ресурсы
1	5	7	2	3		20
2	2	8	5	4		22
3	3	5	1	4		15

Вариант 5

Отчетный период				Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2		
1	20	15	35	40
2	15	25	30	50
Ресурсы				Ресурсы
1	7	5		17
2	2	6		13

Вариант 6

Отчетный период					Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3		
1	50	40	30	70	80
2	50	25	35	60	65
3	60	40	15	70	80
Ресурсы					Ресурсы
1	5	3	6		15
2	4	5	8		20
3	1	5	9		17
4	3	4	2		12

Вариант 7

Отчетный период						Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2	3	4		
1	50	40	30	10	70	75
2	35	45	25	35	55	65
3	60	45	25	15	65	70
4	40	20	33	24	56	60
Ресурсы						Ресурсы
1	2	4	6	3		18
2	8	4	1	4		20
3	2	3	5	4		16

Вариант 8

Отчетный период				Плановый период
Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция, Y_0	Конечная продукция, Y^n
	1	2		
1	20	45	70	80
2	30	20	50	55
Ресурсы				Ресурсы
1	2	5		10
2	3	6		12

Контрольные вопросы

1. Какие виды ресурсов могут быть использованы для выпуска планового объема валовой продукции?

2. Что показывают коэффициенты прямых затрат ресурсов?

3. Как определить объемы ресурсов каждого вида, необходимых для выпуска плановой валовой продукции?

Тема 2. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Лабораторная работа 3.
Оценка эффективности работы систем массового обслуживания

3.1. Основные теоретические сведения

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы специфического вида. В таких системах, с одной стороны, возникают массовые запросы на выполнение каких-либо услуг, с другой – происходит удовлетворение этих запросов.

Система массового обслуживания – это система, предназначенная для обслуживания *потока заявок* (требований) специальными обслуживающими устройствами (каналами). Роль каналов в реальности могут выполнять приборы, операторы, продавцы, линии связи и др.

Каждая заявка поступает в систему *нерегулярно* и в заранее неизвестные, *случайные* моменты времени. Самообслуживание заявок также имеет *непостоянный характер*, происходит в случайные промежутки времени и зависит от многих причин.

Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обуславливает неравномерность загрузки СМО: на входе могут накапливаться необслуженные заявки (перегрузка СМО) либо заявок нет или их меньше, чем свободных каналов (недозагрузка СМО).

Структура СМО показана схематически на рис. 7.

Согласно рис. 7 основными элементами СМО являются следующие:

1 – входящий поток требований;

2 – очередь;

3 – каналы обслуживания;

4 – выходящий поток заявок (обслуженные заявки);

5 – необслуженные заявки.

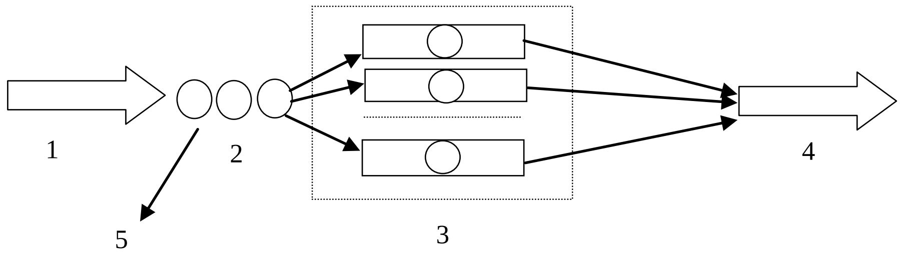

Рис. 7. **Структура СМО**

Системы массового обслуживания классифицируются следующим образом:

1) *по числу каналов*:

♦ одноканальные ($n = 1$);

♦ многоканальные ($n > 1$);

♦ многофазные (обслуживание заявки состоит из нескольких этапов, выполняемых последовательно друг за другом на разных обслуживающих устройствах).

2) *по правилам обслуживания*:

♦ СМО с отказами (нулевое ожидание или явные потери). Если нет свободных каналов, то заявка получает отказ и покидает систему (например, вызов абонента через АТС);

♦ СМО с ожиданием и неограниченной очередью. При занятости системы заявка поступает в очередь и в конце концов будет выполнена (например, торговля, сфера бытового и медицинского обслуживания);

♦ СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди (ограниченное ожидание). Имеется ограничение на длину очереди (например, сервис при обслуживании автомобилей, обслуживание в банке).

3) *по дисциплине обслуживания (способу отбора заявок на обслуживание):*

♦ системы FIFO (очередь): первым пришел – первым обслужился;

♦ системы LIFO (стек): последним пришел – первым обслужился;

♦ системы с приоритетом обслуживания.

4) *по месту нахождения источника требований*:

♦ разомкнутые, когда источник требований находится вне системы (например, ателье по ремонту телевизоров; здесь источник требований – неисправные телевизоры находятся вне системы и привозятся в ателье для ремонта);

♦ замкнутые, когда источник требований находится в самой системе (например, неисправные станки цеха завода обслуживаются бригадой наладчиков станков этого же цеха); обслуженные требования через не-которое время вновь поступают в систему (отремонтированные станки снова ломаются и отправляются на обслуживание бригадой наладчиков).

Изучением и исследованием СМО занимается *теория систем массового обслуживания*. Целью данной теории является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок.

3.2. Простейшие системы массового обслуживания

В настоящее время теоретически наиболее разработаны и удобны в практическом применении методы решения простейших систем массового обслуживания. *Простейшая система массового обслуживания* – это такая система, процесс функционирования которой является *марковским случайным процессом,* когда вероятность состояния СМО в будущем зависит только от ее состояния в настоящем и не зависит от прошлого.

Простейшая СМО имеет следующие характеристики:

1. Входной поток заявок подчиняется закону Пуассона, т. е. вероятность поступления за время t равно k требований и задается формулой

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}, \tag{3.1}$$

где t – единица времени (сек., мин, ч.);

k – количество заявок (требований), поступающих в систему;

λ – интенсивность потока или среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени.

2. Время обслуживания заявки каждым каналом имеет экспоненциальный закон распределения, т. е. вероятность того, что время обслуживания одного требования не превосходит некоторой величины t, определяется по следующей формуле:

$$F(t) = 1 - e^{\mu t}, \tag{3.2}$$

где μ – интенсивность обслуживания или среднее количество заявок, которое может обслужить канал в единицу времени:

$$\mu = \frac{1}{t_{обс}}, \tag{3.3}$$

где $t_{обс}$ – среднее время обслуживания одного требования одним каналом.

Таким образом μ – есть величина, обратная времени обслуживания.

Простейший (пуассоновский) поток заявок обладает тремя основными свойствами:

1. *Ординарности*, т. е. невозможности поступления в систему двух и более заявок одновременно.

2. *Стационарности* – среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени, постоянно. Таким образом, хотя заявки и приходят в случайные моменты времени, в среднем, поток является равномерным и параметр λ характеризует среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

3. *Отсутствием последействия,* т. е. количество заявок, уже поступивших в систему, не определяет того, сколько заявок поступит в дальнейшем.

Основной характеристикой простейшей СМО является параметр α (альфа), который показывает, какое среднее число каналов необходимо иметь, чтобы обслужить в единицу времени все поступившие заявки. Параметр α рассчитывается по следующей формуле:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{3.4}$$

СМО с n каналами будет эффективно работать, если

$$\frac{\alpha}{n} < 1, \tag{3.5}$$

т. е. $\alpha < n$. Это означает, что фактическое число обслуживающих каналов должно быть больше среднего числа каналов, необходимых для обслуживания заявок.

Для СМО с ожиданием и неограниченной очередью прежде чем рассчитывать показатели эффективности ее работы, нужно выполнить проверку условия (3.5). Если данное условие не выполняется, то работу СМО сразу следует считать неэффективной, так как система не успевает обслуживать все поступающие заявки, которые накапливаются в бесконечную очередь.

Рассмотрим ряд примеров, в которых выясним, что принять за СМО, как определить вид СМО (по правилам обслуживания и числу каналов).

Пример 1. Вызов абонента, имеющего только один телефонный номер, через АТС.

В данном примере системой массового обслуживания является АТС. Число каналов обслуживания (телефонных линий) равно единице.

Если телефонная линия абонента занята (абонент с кем-то разговаривает), то очередная поступающая заявка получает отказ в обслуживании (гудок «занято»).

Итак, получаем *одноканальную СМО с отказами.*

Пример 2. Инструментальная кладовая с тремя кладовщиками, выдающими рабочим по их требованию одинаковые наборы инструментов во время работы. Если все кладовщики заняты, то рабочий становится в очередь, число мест в которой ограничено.

Здесь кладовую следует принять за СМО, число каналов обслуживания (кладовщиков) равно трем. Если канал занят, то очередное требование становится в очередь, с ограниченным числом мест.

Итак, получаем *многоканальную СМО с ограниченной очередью.*

Пример 3. Работа телефонной справочной службы железнодорожного вокзала.

Здесь мы имеем *многоканальную СМО* (число каналов – число дежурных операторов) *с отказами* (если все каналы заняты – требование получает отказ в обслуживании).

Пример 4. В универсаме к пяти кассирам поступает поток покупателей с интенсивностью 80 человек в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя равна 1 мин.

В данном примере имеем *многоканальную СМО с неограниченной очередью.*

Пример 5. Железнодорожная станция принимает на 5 путей пассажирские поезда и электрички, которые прибывают каждые 15 мин на каждый из них и отбывают после обслуживания также по расписанию через 12 мин.

В данном случае *теория систем массового обслуживания неприменима*, поскольку входной и выходной потоки (приход и уход обслуженных поездов организован по расписанию) не являются случайными.

Таким образом, на основании приведенных примеров мы видим, что вид модели СМО зависит от числа каналов n и от допустимой длины очереди m.

Обобщим информацию и представим ее в виде табл. 8.

Таблица 8. **Классификация систем массового обслуживания**

Вид СМО	n	m
Одноканальная с отказами	1	0
Многоканальная с отказами	$n > 1$	0
Одноканальная с ограниченной очередью	1	$1 < m < \infty$
Многоканальная с ограниченной очередью	$n > 1$	$1 < m < \infty$
Одноканальная с неограниченной очередью	1	$m = \infty$
Многоканальная с неограниченной очередью	$n > 1$	$m = \infty$

3.3. Основные показатели эффективности работы системы массового обслуживания

Эффективность работы систем массового обслуживания характеризуют показатели, которые можно разбить на две группы:

1. *Показатели эффективности использования СМО*:

♦ относительная пропускная способность – вероятность того, что требование будет принято к обслуживанию (Q);

♦ абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока заявок) – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (A).

Она определяется как произведение относительной пропускной способности и среднего числа заявок, поступивших в систему в единицу времени:

$$A = \lambda \cdot Q . \tag{3.6}$$

♦ среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок (K).

2. *Показатели качества обслуживания заявок:*

♦ вероятность того, что система свободна (P_o);

♦ вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет (P_n);

♦ вероятность отказа в обслуживании ($P_{отк}$);

♦ средняя длина очереди ($L_{оч}$);

♦ среднее число заявок, находящихся в системе ($L_{сис} = L_{оч} + K$);

♦ среднее время ожидания заявки в очереди ($T_{оч}$);

♦ среднее время пребывания заявки в системе ($T_{сис}$).

3.3.1. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Пусть СМО включает только один канал обслуживания ($n = 1$) и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок (среднее число заявок, которое может обслужить канал в единицу времени) равна μ. Если канал занят, то заявка не обслуживается, т. е. длина очереди $m = 0$.

Формулы для расчета основных характеристик работы данной СМО представлены в табл. 9.

Таблица 9. **Основные характеристики работы одноканальной СМО с отказами**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \frac{1}{1+\alpha}$ или $P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = \alpha P_0 = P_1$ или $P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_1 = P_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda P_0 = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{обсл} = \frac{1}{\mu}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = T_{обс} P_0 = \frac{1}{\lambda+\mu}$

Пример 1. Телефонная АТС имеет одну линию, на которую в среднем приходит 0,8 вызова в мин. Среднее время разговора 1,5 мин. Вызов, пришедший во время разговора, не обслуживается. Считая потоки вызовов пуассоновскими, найти абсолютную и относительную пропускную способности станции, вероятность отказа в обслуживании, а также среднее время пребывания заявки в системе.

Решение

Телефонную станцию рассматриваем как одноканальную СМО с отказами. За единицу времени примем 1 мин.

Параметры системы следующие:

$$T_{обс} = \frac{1}{\mu} = 1{,}5 \text{ мин;}$$

$$\lambda = 0{,}8 \text{ вызовов/мин;}$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}67 \text{ вызовов/мин.}$$

Рассчитаем относительную пропускную способность следующим образом:

$$Q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}67}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}455,$$

т. е. в среднем обслуживается 45 % поступающих в систему заявок.

Абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока заявок) равна:

$$A = \lambda Q = 0{,}8 \cdot 0{,}455 = 0{,}364 \text{ вызовов/мин.}$$

Как видим, $A < \mu$, поскольку при расчете A учитываются еще и те заявки, которым было отказано в обслуживании.

Вероятность отказа в обслуживании рассчитывается следующим образом:

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}8}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}544,$$

т. е. в среднем 54,4 % поступивших в систему заявок получают отказ в обслуживании.

Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется следующим образом:

$$T_{сис} = \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{0{,}8 + 0{,}67} = 0{,}68 \text{ мин.}$$

3.3.2. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

Пусть СМО включает несколько каналов обслуживания ($n > 1$) и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если все каналы заняты, то заявка не обслуживается, т. е. длина очереди $m = 0$.

Формулы для расчета основных характеристик работы данной СМО приведены в табл. 10.

Таблица 10. **Основные характеристики работы многоканальной СМО с отказами**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}\right]^{-1}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!}$
Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания)	$Q = 1 - P_{отк}$
Абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока требований)	$A = \lambda Q$
Среднее время обслуживания одной заявки	$T_{обс} = \frac{1}{\mu}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = T_{обс} P_0 = Q \frac{1}{\mu}$
Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок	$K = \frac{A}{\mu} = \alpha\, Q$

Пример 2. В отделении банка на обслуживании клиентов работают 3 оператора. Среднее время обслуживания одного клиента оператором – 12 мин. В среднем за час в банк обращаются 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиенты не обслуживаются банком. Найти основные характеристики работы банка, а также вероятность того, что не менее двух каналов простаивают.

Решение

Банк можно рассматривать как многоканальную СМО с отказами. За единицу времени примем 1 час.

Параметры системы равны:

$$n = 3;$$

$$T_{обс} = 12 \text{ мин} = 0{,}2 \text{ ч};$$

$$\lambda = 15 \text{ клиентов /ч};$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{0{,}2} = 5 \text{ клиентов/ч}.$$

Рассчитаем параметр α по следующей формуле:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{5} = 3.$$

Вероятность того, что система свободна, определяется по формуле

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} \right]^{-1} = \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} \right)^{-1} = 0{,}077.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна

$$P_{отк} = P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!} = 0{,}077 \cdot \frac{3^3}{3!} = 0{,}346.$$

Относительная пропускная способность равна

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Это означает, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в банк, в среднем будут обслужены 65 клиентов. При этом абсолютная пропускная способность СМО составит следующую величину:

$$A = \lambda Q = 15 \cdot 0{,}654 = 9{,}81 \text{ клиентов/ч},$$

таким образом, банк обслуживает не 15 клиентов/ч, а меньше, что вызвано случайностью потока заявок.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок, вычисляется следующим образом:

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{9{,}81}{5} = 1{,}962 \approx 2.$$

Так как число каналов равно 3, а занято 2 канала, то это означает, что простаивает 1 канал.

3.3.3. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди

Пусть СМО включает один канал обслуживания ($n = 1$) и на ее вход подается пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой ограничено и равно m ($1 < m < \infty$).

Формулы для расчета основных характеристик работы одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди приведены в табл. 11.

Таблица 11. **Основные характеристики работы одноканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[1+\alpha+\alpha^2 \cdot \dfrac{1-\alpha^m}{1-\alpha}\right]^{-1}$
Вероятность того, что канал занят, но очереди еще нет	$P_n = P_0\alpha$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_{n+m} = P_0\alpha^{1+m}$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = \dfrac{P_0\alpha^2\left(1-\alpha^m\left(m+1-m\alpha\right)\right)}{\left(1-\alpha\right)^2}$

Пример решения задачи не приводится, так как решение аналогично решению примера 3, который приведен в пункте 3.3.4.

3.3.4. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и ограничением на длину очереди

Пусть в n-канальную СМО ($n > 1$) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой ограничено и равно m ($1 < m < \infty$).

Формулы для расчета основных характеристик работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди приведены в табл. 12.

Таблица 12. **Основные характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди**

Название показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!}\cdot\dfrac{1-\left(\alpha/n\right)^m}{n-\alpha}\right]^{-1}$
Вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет	$P_n = P_0\dfrac{\alpha^n}{n!}$

Окончание табл. 12

Название показателя	Формула расчета
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_{n+m} = P_0 \dfrac{\alpha^{n+m}}{n^m n!}$
Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания)	$Q = 1 - P_{отк}$
Абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока требований)	$A = \lambda Q$
Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок	$K = \dfrac{A}{\mu} = \alpha Q$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = P_0 \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} \cdot \left[1 - \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^m \cdot \left(1 + m - \dfrac{m\alpha}{n}\right)\right]$
Среднее число заявок, находящихся в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \dfrac{L_{сис}}{\lambda}$

Пример 3. В пункте обмена валюты работают два оператора, каждый их которых обслуживает клиента в среднем за 2,5 мин. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более 5 человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено, то очередной клиент не становится в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 мин. Найти основные характеристики работы обменного пункта.

Решение

Математической моделью данного обменного пункта является двухканальная СМО (n = 2) с ожиданием и ограничением на длину очереди (m = 3). За единицу времени примем 1 мин.

Параметры системы следующие:

$$n = 2;$$

$$m = 3;$$

$$T_{обс} = 2{,}5 \text{ мин};$$

$$\lambda = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ клиентов/мин};$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \text{ клиентов /мин.}$$

Рассчитаем параметр α следующим образом:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}5}{0{,}4} = 1{,}25.$$

Вероятность того, что система свободна (оба канала свободны) равна

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1-(\alpha/n)^m}{n-\alpha}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1{,}25}{1!} + \frac{1{,}25^2}{2!} + \frac{1{,}25^3}{2!} \cdot \frac{1-(1{,}25/2)^3}{2-1{,}25}\right]^{-1} = 0{,}249.$$

Вероятность отказа в обслуживании рассчитывается следующим образом:

$$P_{отк} = P_{n+m} = P_0 \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} = 0{,}249 \cdot \frac{1{,}25^5}{2^3 \cdot 2!} = 0{,}047 \approx 0{,}05\,(5\,\%).$$

Это означает, что из каждых 100 клиентов, обратившихся в пункт, в среднем будут обслужены около 95 человек.

Относительная пропускная способность рассчитывается следующим образом:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}047 = 0{,}953.$$

Абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda \cdot Q = 0{,}5 \cdot 0{,}953 = 0{,}477 \text{ клиентов/мин},$$

т. е. из обменного пункта в среднем выходят 0,48 клиентов/мин.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок, вычисляется по формуле

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}477}{0{,}4} = 1{,}191.$$

Средняя длина очереди рассчитывается следующим образом:

$$L_{оч} = P_0 \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{n}\right)^m \cdot \left(1 + m - \frac{m\alpha}{n}\right)\right] =$$

$$= 0{,}249 \cdot \frac{1{,}25^3}{1!(2-1{,}25)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1{,}25}{2}\right)^3 \cdot \left(1 + 3 - \frac{3 \cdot 1{,}25}{2}\right)\right] = 0{,}416.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе равно

$$L_{сис} = L_{оч} + K = 0{,}416 + 1{,}191 = 1{,}607.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{0{,}416}{0{,}5} = 0{,}83 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda} = \frac{1{,}607}{0{,}5} = 3{,}21 \text{ мин.}$$

3.3.5. Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Пусть в одноканальную СМО (n = 1) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой неограничено ($m = \infty$).

Нормальный режим работы такой СМО будет обеспечиваться при условии $\alpha/n < 1$ или $\alpha < n$, т. е. число каналов n должно быть больше среднего числа каналов α. Если это условие нарушается, то очередь заявок будет неограниченно расти и система не справится с их обслуживанием.

Формулы для расчета основных характеристик работы одноканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью приведены в табл. 13.

Таблица 13. **Основные характеристики работы одноканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right]^{-1} = 1 - \alpha$
Вероятность того, что канал занят, но очереди еще нет	$P_n = P_1 = P_0\alpha$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = P_{1+m} = 0$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = \alpha^2/(1-\alpha)$
Среднее число заявок, находящихся в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K = \frac{\alpha}{1-\alpha}$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(1-\alpha)}$

Пример решения задачи не приводится, так как решение аналогично решению примера 4, который приведен в пункте 3.3.6.

3.3.6. Многоканальная система массового обслуживания с ожиданием и неограниченной очередью

Пусть в многоканальную СМО ($n > 1$) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявок равна μ. Если канал занят, то заявка поступает в очередь, число мест в которой неограничено ($m = \infty$).

Прежде чем приступить к расчету основных характеристик такой СМО, необходимо проверить выполнение условия ее работоспособности, т. е. $\alpha < n$. Если это условие нарушается, то очередь заявок будет неограниченно расти, и система не справится с их обслуживанием.

Формулы для расчета основных характеристик работы многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью приведены в табл. 14.

Таблица 14. **Основные характеристики работы многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

Наименование показателя	Формула расчета
Вероятность того, что система свободна	$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \right]^{-1}$
Вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет	$P_n = P_0 \frac{\alpha^n}{n!}$
Вероятность того, что в очереди находится r требований	$P_{n+r} = P_0 \frac{\alpha^{n+r}}{n^r n!}$
Вероятность отказа в обслуживании	$P_{отк} = 0$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{отк} = 1$ (таким образом, заявка всегда обслуживается)
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda$ (т. е. выходной поток требований совпадает со входным)
Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок	$K = \frac{A}{\mu} = \alpha$
Средняя длина очереди	$L_{оч} = P_0 \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2}$
Среднее число заявок, находящихся в системе	$L_{сис} = L_{оч} + K$
Среднее время ожидания заявки в очереди	$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$
Среднее время пребывания заявки в системе	$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda}$

Пример 4. В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 мин. В среднем к кассе подходит 3 человека в мин. Найти основные характеристики работы кассы.

Решение

Касса метрополитена моделируется двухканальной СМО с ожиданием и без ограничения на длину очереди. За единицу времени примем 1 мин.

Параметры системы следующие:

$$n = 2;$$

$$T_{обс} = 0{,}5 \text{ мин};$$

$$\lambda = 3 \text{ чел/мин};$$

$$\mu = \frac{1}{T_{обс}} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ чел/мин}.$$

Рассчитаем параметр $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ и проверим выполнение условия $\alpha/n < 1$ (для СМО с неограниченной очередью). Так как данное условие выполняется (1,5 < 2), то мы приступим к расчету основных характеристик СМО:

Вероятность того, что система свободна равна

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{2!(2-1{,}5)}\right]^{-1} = 0{,}143.$$

Вероятность того, что все каналы заняты, но очереди еще нет равна

$$P_n = P_o \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = 0{,}143 \cdot \frac{1{,}5^2}{2!} = 0{,}161.$$

Вероятность отказа в обслуживании равна

$$P_{отк} = 0.$$

Абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda = 3 \text{ чел./мин},$$

таким образом, в среднем из кассы выходят обслуженными 3 человек в мин.

Относительная пропускная способность равна

$$Q = 1 - P_{отк} = 1,$$

т. е. обслуживаются все, обратившиеся в кассу.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием заявок, равно

$$K = \alpha = 1{,}5.$$

Средняя длина очереди равна:

$$L_{оч} = P_0 \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(n-\alpha)^2} = 0{,}143 \cdot \frac{1{,}5^3}{(2-1)!(2-1{,}5)^2} = 1{,}931.$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, высчитывается следующим образом:

$$L_{сис} = L_{оч} + K = 1{,}931 + 1{,}5 = 3{,}431.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди равно

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}931}{3} = 0{,}64 \text{ мин.}$$

Среднее время пребывания заявки в системе равно

$$T_{сис} = \frac{L_{сис}}{\lambda} = \frac{3{,}431}{3} = 1{,}144 \text{ мин.}$$

3.4. Общие рекомендации по решению задач темы «Системы массового обслуживания» с использованием пакета MathCad

MathCad – это редактор, который позволяет набирать формулы и выполнять с их помощью вычисления. Любая формула вводится в место расположения курсора MathCad (красный крестик). Вычисления выполняются по порядку, от начала к концу документа (сверху вниз и слева направо). Поэтому рекомендуется после ввода каждой формулы нажимать клавишу Enter. Курсор при этом переходит на следующую строку.

Перед началом ввода формул в редакторе MathCad следует установить две дополнительных панели инструментов: *панель калькуляции* (для набора знака Σ) и *панель греческих символов* (для набора греческих букв: λ, μ, α).

Далее приступить к набору формул.

Сначала набирается формула для расчета какого-либо показателя с использованием знака присваивания‘:=’ (нажать клавишу ‘:’ на клавиатуре). Затем, чтобы получить результат по записанной формуле, нужно ввести показатель и нажать знак ‘=’ (равно).

Примерная схема выполнения вычислений приведена на рис. 8.

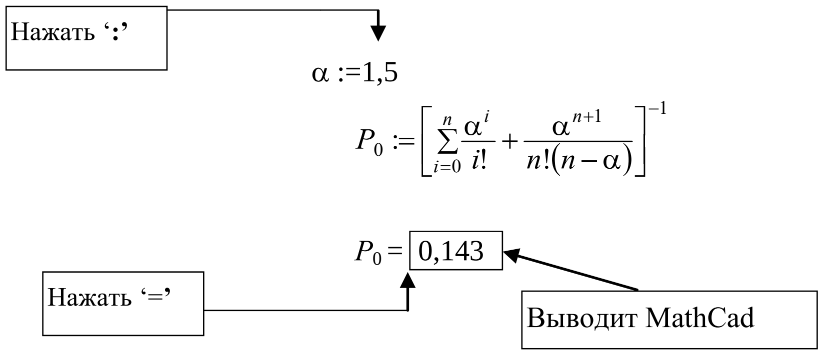

Рис. 8. **Схема выполнения вычислений в редакторе Math Cad**

3.5. Задачи для самостоятельной работы

В задачах за единицу времени принимать семичасовой рабочий день.

Задача 1. В мужской парикмахерской работает три мастера. В среднем в течение рабочего дня бывает около 30 клиентов. Каждый из мастеров успевает обслужить около 15 клиентов. Требуется рассчитать загруженность мастеров в течение дня, ожидаемую среднюю длину очереди и среднее время пребывания клиента в очереди.

Ответ: $\alpha = 2$; $P_o = 0{,}111$; $P_n = 0{,}148$; $L_{оч} = 0{,}88$; $T_{обсл} = 0{,}46$ час; $T_{сис} = 0{,}67$ час; $L_{сис} = 2{,}88$ чел.

Задача 2. Информационно-справочное бюро имеет два телефона, по которым дает справки о наличии товаров в магазинах. В среднем за 1 мин поступает 3 запроса, время обслуживания каждого требования в среднем составляет 40 с.

Определить важнейшие характеристики СМО, считая все потоки простейшими.

Ответ: $\alpha = 2$; $P_o = 0{,}2$; $T_{обсл} = 0{,}66$ мин; $P_{отк} = 0{,}4$; $Q = 0{,}6$; $A =$ $= 1{,}8$ чел./мин; $K = 1{,}2$.

Задача 3. В мастерской по ремонту радиоаппаратуры работает 5 опытных мастеров. В течение дня поступает в ремонт в среднем 10 аппаратов и каждый из мастеров успевает отремонтировать за день около 2,5 аппаратов. Требуется оценить эффективность работы мастерской.

Ответ: $\alpha = 4$; $T_{обс} = 0{,}4$ дня; $P_o = 0{,}013$; $P_n = 0{,}11$; $K = 4$; $L_{оч} = 2{,}22$ чел.; $L_{сис} = 6{,}2$; $T_{оч} = 0{,}22$ р. дня; $T_{сис} = 0{,}62$ р. дня.

Задача 4. В справочное бюро с одним телефоном поступает в среднем 90 заявок в час. Средняя продолжительность обслуживания одной заявки 2 мин. Требуется найти параметры работы бюро и оценить его эффективность.

Ответ: $\alpha = 3$; $P_o = 0{,}25$; $P_{отк} = 0{,}75$; $Q = 0{,}25$; $A = 22{,}5$ чел./ч.

Задача 5. В справочном бюро работают 5 операторов. Заказы поступают в среднем по 2 в мин. Среднее время обслуживания одного заказа составляет 1 мин. Требуется оценить работу бюро.

Ответ: $\alpha = 2$; $P_o = 0{,}138$; $P_{отк} = 0{,}037$; $Q = 0{,}963$; $A = 1{,}926$.

Задача 6. В таксопарке 3 диспетчера принимают заказы на вызов машин и обеспечивают своевременное обслуживание клиентов. В среднем за каждый час поступает 120 заявок, длительность регистрации заявки равна в среднем 1 мин.

Определить важнейшие параметры данной СМО.

Ответ: $\alpha = 2$; $P_o = 0{,}158$; $P_{отк} = 0{,}211$; $Q = 0{,}789$; $A = 94{,}7$ звонков/ч.

Задача 7. Входной поток клиентов в парикмахерскую подчиняется закону Пуассона, его интенсивность составляет 12 человек в час. Обслуживают посетителей 3 мастера. В среднем за 1 час мастер обслуживает 2 человек, максимальная очередь – 5 человек.

Рассчитать важнейшие характеристики СМО.

Ответ: $\alpha = 6$; $P_o = 0{,}00043$; $P_{отк} = 0{,}5$; $P_n = 0{,}015$; $Q = 0{,}5$, $A = 6$ звонков/час; $K = 3$; $L_{оч} = 3{,}99$; $L_{сис} = 6{,}99$; $T_{оч} = 0{,}3$ ч.

Задача 8. Фирма «Уют» предлагает своим клиентам помощь в дизайне дома или офиса. В нормальном режиме за каждый час прибывает в среднем 2,5 клиента. Единственный консультант по дизайну отвечает на вопросы клиента и дает необходимые рекомендации. Он тратит на каждого посетителя в среднем 10 мин.

Определить следующее:

♦ среднее время, которое клиент проводит в очереди;

♦ среднюю длину очереди;

♦ среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания;

♦ среднее число клиентов в системе обслуживания;

♦ вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой.

Желательно, чтобы прибывающий клиент не ждал своей очереди в среднем более 5 мин. Рассчитайте, соответствует ли реальная ситуация данному пожеланию. Если нет, то что необходимо предпринять? Предположим, что консультант способен уменьшить среднее время, которое он проводит с клиентом, до 8 мин. Какой станет средняя скорость обслуживания? Будет ли достигнута поставленная цель?

Ответ: $\alpha = 0{,}41$; $L_{оч} = 0{,}28$ чел; $T_{оч} = 0{,}11$ ч; $T_{сис} = 0{,}277$ ч; $L_{сис} = 0{,}69$; $P_o = 0{,}59$.

Задача 9. Торговая фирма планирует принимать заказы клиентов по телефону. Для этой цели необходимо выделить и подготовить персонал, а также выбрать соответствующие мини-АТС с несколькими телефонными аппаратами. Порядок обслуживания должен быть следующим: если заказ поступает, когда все линии заняты, то абонент получает отказ. Если же в момент поступления заказа хотя бы одна линия свободна, то осуществляется переключение на эту линию и оформление заказа. Предполагаемая интенсивность входящего потока требований составляет 2,5 заказа в мин. Длительность же оформления заказа в среднем будет равна 0,8 мин.

Определить, какое минимальное количество каналов обслуживания необходимо, чтобы обслуживать не менее 90 % поступающих заказов. Рассчитать основные показатели работы СМО.

Ответ: $\alpha = 2$ для $n = 4$ $P_o = 0{,}14$; $P_{отк} = 0{,}09$; $Q = 0{,}91$; А = 2,28; $T_{сис} = 0{,}73$ мин; $K = 1{,}82$.

Задача 10. Фирма пейджинговой связи получает заказы на обслуживание по двухканальной телефонной линии, контролируемой двумя диспетчерами. Те из заказчиков, которые услышали сигнал «занято», пытаются перезвонить. Распределение заявок – пуассоновское, со средней скоростью прибытия 40 звонков в час. Каждый диспетчер может обработать 30 звонков в час.

Определить следующее:

♦ в течение какого времени (в %) оба диспетчера свободны;

♦ в течение какого времени (в %) оба диспетчера работают;

♦ какова вероятность получить сигнал «занято», если в фирме работают 2, 3 или 4 диспетчера.

Сколько необходимо иметь диспетчеров, чтобы не более 12 % звонящих получали сигнал «занято»?

Ответ: 1) P_o = 31 %, 2) P_n = 27,6 %, 3) $P_{отк}(2)$ = 0,276, $P_{отк}(3)$ = = 0,109, $P_{отк}(4)$ = 0,0336.

Задача 11. В справочное бюро аэропорта поступает в среднем 8 запросов за 1 мин. Клиентов обслуживают 2 телефонистки. Средняя длительность разговора – 0,5 мин.

Установить все характеристики данной СМО.

Ответ: P_o = 0,0769; $P_{отк}$ = 0,6154.

Задача 12. В билетной кассе работают 3 кассира, каждый из которых может обслужить 3 пассажиров за 10 мин. Поток пассажиров простейший с интенсивностью 15 человек в час. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения.

Определить основные характеристики функционирования СМО.

Ответ: P_o = 0,111; $L_{оч}$ = 0,88.

Задача 13. Станция автосервиса использует систему двухканальной очереди. Прибытие машин распределено по закону Пуассона со средней скоростью прибытия 6 машин в час. Время обслуживания распределено экспоненциально со средней скоростью обслуживания 10 машин в час.

Определить следующее:

♦ вероятность того, что все каналы заняты или свободны;

♦ среднее время ожидания в очереди;

♦ среднее число машин в очереди;

♦ среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания;

♦ среднее число клиентов в системе обслуживания;

♦ вероятность того, что вновь прибывшей машине придется ждать.

Ответ: P_o = 0,5385; $L_{оч}$ = 0,0593.

Задача 14. Рассмотрим работу автозаправочной станции, на которой имеются 3 заправочные колонки. Заправка одной машины длится приблизительно 2 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает одна машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено.

Все потоки в системе простейшие.

Определить следующее:

♦ вероятность того, что в системе нет требований;

♦ среднее время ожидания в очереди;

♦ среднее число требований в очереди;

♦ среднее время, которое требование проводит в системе обслуживания;

♦ вероятность того, что вновь прибывшей машине придется ждать обслуживания.

Ответ: P_o = 0,111, $L_{оч}$ = 0,889.

Задача 15. Определить, какое количество автоматических камер хранения необходимо установить на автостанции, чтобы вероятность отказа пассажиру в обслуживании не превышала 0,07. Априорно установлено, что будут пользоваться услугами камер хранения 8 пассажиров в сутки. Среднее время хранения багажа – 12 часов. Все потоки, связанные с работой камер хранения, – простейшие.

Ответ: n = 7; $P_{отк}$ = 0,063.

Контрольные вопросы

1. Какая система называется простейшей системой массового обслуживания?
2. Назовите основную характеристику простейшей СМО. В чем заключается условие работоспособности такой системы?
3. Назовите основные виды моделей СМО (по числу каналов и наличию очереди).
4. Перечислите показатели эффективности использования СМО.
5. Какие Вы знаете показатели качества обслуживания заявок в СМО?
6. Назовите основные параметры СМО.
7. Справедливо ли высказывание: «Абсолютная пропускная способность характеризует интенсивность выходного потока и показывает, какое количество требований (и обслуженных и получивших отказ в обслуживании) выходит из системы в единицу времени»?

8. В каких СМО абсолютная пропускная способность (интенсивность выходного потока требований) не равна интенсивности входного потока требований ($A \neq \lambda$)?

9. В каких СМО вероятность отказа в обслуживании равна $P_{отк} = 0$?

Тема 3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ

Лабораторная работа 4. Выделение оптимальной партии подготовки товарных запасов

4.1. Основные теоретические сведения

Под *запасом* понимается все то, на что имеется спрос и что выключено временно из потребления. Запасы подразделяются на запасы средств производства, предназначенные для производственного потребления (сбытовые, производственные, государственные резервы и незавершенное производство), и запасы предметов потребления, предназначенные для использования в непроизводственной социально-экономической сфере и для удовлетворения потребностей людей (товарные, запасы предметов коллективного и индивидуального потребления и государственные резервы).

Основные причины образования запасов следующие:

♦ необходимость бесперебойного удовлетворения спроса потребителей;

♦ периодичность их производства;

♦ особенности транспортировки;

♦ несовпадение ритма производства с ритмом потребления.

При обосновании уровня запасов нужно исходить прежде всего из равновесия между затратами на их создание и содержание и потерями из-за нехватки нужного товара (дефицит). Наиболее предпочтительным будет такой уровень запаса, который обеспечивает минимум издержек или затрат. Существует три вида затрат:

♦ по завозу товара (увеличиваются при уменьшении интервала между поставками и уменьшении размера партии);

♦ на хранение запасов (увеличиваются при увеличении этих же параметров);

♦ связанные с дефицитом.

Под задачей управления товарными запасами понимается такая оптимизационная задача, в которой задана следующая информация:

♦ о поставках товара на склад;
♦ спрос на товар;
♦ издержки и условия хранения товарных запасов;
♦ критерий оптимизации.

4.2. Простейшая модель оптимального размера партии поставки

Эта модель позволяет определить такой размер заказываемой партии, который минимизирует расходы на организацию заказа и содержание его на складе в единицу времени. Экономичная партия поставки вычисляется при следующих допущениях:

1. Уровень запасов снижается равномерно с интенсивностью M (спрос).
2. В момент, когда все запасы исчерпаны, подается заказ на поставку новой партии размером Q единиц.
3. Заказ выполняется мгновенно, т. е. время доставки заказа пренебрежимо мало и уровень запасов восстанавливается до максимального значения.
4. Накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине K.
5. Издержки содержания единицы товара на складе в единицу времени равны h.
6. На складе не происходит систематического накопления или перерасхода запасов.
7. Срыв поставок недопустим.
8. Дефицит недопустим.

Процесс изменения уровня запасов показан на рис. 9.

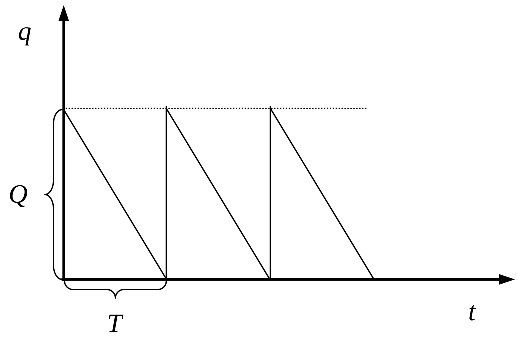

Рис. 9. **График идеальной работы склада по модели Уилсона**

Через T обозначим время между двумя последовательными поставками, тогда обязательно выполнение следующего равенства: $Q = MT$.

Расход запаса происходит с постоянной скоростью M, поэтому средний уровень запаса за интервал T равен $\frac{Q}{2}$, а общие затраты, связанные с хранением и заказом товара, равны

$$Z_T(Q) = K + h\,T\,\frac{Q}{2}. \qquad (4.1)$$

При поставке запасов разными партиями общие затраты могут сильно отличаться друг от друга. Например, партия в объеме 50 шт. поставляется один раз в неделю (7 дней). Стоимость поставки – 12 усл. ед., издержки хранения составляют 0,5 усл. ед. в день за одну штуку товара. Общие затраты в таком случае составят

$$Z_T(50) = 12 + 0{,}5 \cdot 7 \cdot 50 : 2 = 99{,}5 \text{ усл. ед.}$$

При поставке того же товара партией в 100 шт. и той же интенсивности потребления увеличивается период поставки до двух недель (14 дней). Общие затраты за период поставки составят

$$Z_T(100) = 12 + 0{,}5 \cdot 14 \cdot 100 : 2 = 362 \text{ усл. ед.}$$

Товар поставлялся партиями разного объема с разным периодом поставки. Соответственно, общие издержки будут разными. В таком случае выбор партии поставки становится проблематичным.

Поэтому для сравнения общих издержек при разных партиях поставки необходимо сравнить их в одинаковую единицу времени: день, месяц и т. д. Для рассмотренного примера издержки в день составят:

- ♦ в первом случае 99,5 : 7 = 14,2 усл. ед.;
- ♦ во втором 362 : 14 = 25,8 усл. ед..

В первом варианте поставки среднесуточные расходы меньше, чем во втором, следовательно он лучше.

Найдем затраты связанные с работой склада за единицу времени. Разделим функцию (4.1) на постоянную величину T. С учетом равенства $Q = MT$ получим выражение для величины затрат на пополнение и хранение запасов, приходящихся на единицу времени:

$$Z_1(Q) = \frac{Z_T(Q)}{T} = \frac{K}{T} + \frac{hQ}{T} = K\frac{M}{Q} + h\frac{Q}{2}, \qquad (4.2)$$

где $K\dfrac{M}{Q}$ – среднесуточные накладные расходы;

$h\dfrac{Q}{2}$ – среднесуточные издержки хранения.

Это и будет целевой функцией, минимизация которой позволит указать оптимальный режим работы склада.

При увеличении партии Q среднесуточные затраты по завозу товара расходы уменьшаются, а среднесуточные издержки хранения увеличиваются. Графически данная закономерность представлена на рис. 10.

Найдем объем заказываемой партии $Q_{опт,}$ при котором минимизируется функция средних затрат склада за единицу времени, т. е. функция $Z_1(Q)$. На практике величины Q часто принимают дискретные (целочисленные) значения, в частности, из-за использования транспортных средств определенной грузоподъемности. В этом случае оптимальное значение $Q_{опт}$ находят перебором допустимых значений Q. Будем считать, что ограничений на принимаемые значения Q нет, тогда задачу на минимум функции $Z_1(Q)$ можно решить методами дифференциального исчисления. Нужно приравнять к нулю первую производную по Q, т. е. решить следующее уравнение:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial Q} = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0\,, \tag{4.3}$$

отсюда находится точка минимума $Q_{опт}$:

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}}\,. \tag{4.4}$$

Эта формула называется формулой Уилсона по имени английского ученого-экономиста, который вывел ее в 20-х гг. XX столетия.

Оптимальный размер партии, рассчитываемый по формуле Уилсона, обладает характеристическим свойством: размер партии Q оптимален тогда и только тогда, когда издержки хранения за время цикла T равны накладным расходам K, т. е. минимальное значение функции Z_{min} достигается при значении Q, при котором равны значения двух других функций, ее составляющих (рис. 10), т. е.

$$K\frac{M}{Q} = h\frac{Q}{2}.$$

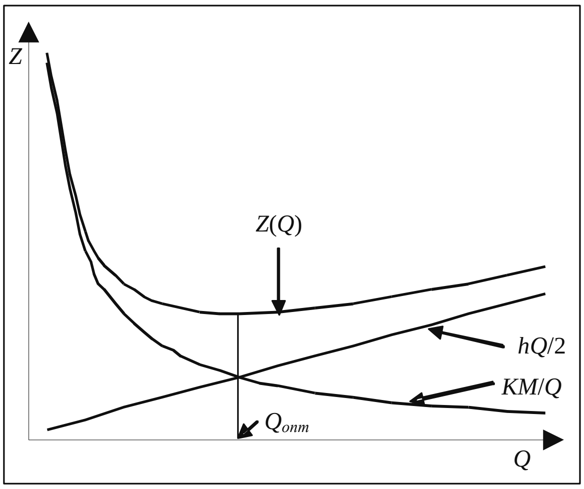

Рис. 10. **Издержки работы**

Зная оптимальный объем партии поставки можно вычислить оптимальный период поставки по следующей формуле:

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M}. \tag{4.5}$$

Суммарные затраты по формированию поставок и содержанию запасов в единицу времени высчитываются по формуле

$$Z_{опт} = \sqrt{2KMh}. \tag{4.6}$$

4.3. Пример решения задачи

На склад доставляется на барже цемент партиями по 1500 т. В сутки со склада потребители забирают 50 т цемента. Накладные расходы по доставке партии цемента равны 2000 р. Издержки хранения 1 т цемента в течение суток равны 0,1 р. Требуется определить следующее:

♦ период поставки, среднесуточные издержки;

♦ оптимальный размер заказываемой партии, оптимальный период поставки и среднесуточные издержки в оптимальном режиме.

Решение

Параметры работы склада: M = 50 т/сут; K = 2000 р.; h = 0,1 р./т·сут; Q = 1500 т.

1. Длительность цикла равна

$$T = \frac{Q}{M} = \frac{1500}{50} = 30 \text{ сут.}$$

Среднесуточные издержки равны

$$Z_1(Q) = 2000\frac{50}{1500} + 100\frac{1500}{2} = 141{,}67 \text{ р./сут.}$$

2. Оптимальный размер заказываемой партии по формуле Уилсона вычисляется следующим образом:

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1414 \text{ т.}$$

Оптимальная периодичность пополнения запасов равна

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \frac{1414}{50} \approx 28 \text{ сут.}$$

Среднесуточные издержки в оптимальном режиме равны

$$Z_{отп} = \sqrt{2 \cdot 2000 \cdot 50 \cdot 0{,}1} = 141{,}42 \text{ р./сут.,}$$

т. е. при работе склада в оптимальном режиме среднесуточные издержки уменьшаются.

4.4. Модель с учетом неудовлетворенных требований

Рассмотрим случай, когда дефицит допускается, но неудовлетворенные требования берутся на учет.

При поступлении очередной партии вначале удовлетворяется задолженный спрос, а затем пополняется запас. Изменение запаса в такой системе показано на рис. 11.

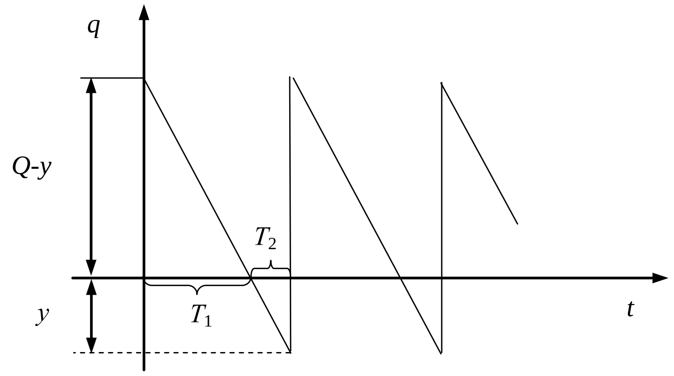

Рис. 11. **Модель с учетом неудовлетворенных требований:**

y – максимальная величина задолженного спроса;
Q-y – максимальная величина наличного запаса;
T_1 – время существования наличного запаса;
T_2 – время дефицита.

Через d обозначим убытки, связанные с дефицитом единицы запаса в единицу времени.

Издержки работы системы в единицу времени вычисляется по формуле

$$Z_1(Q) = \frac{KM}{Q} + h\frac{(Q-y)^2}{2Q} + d\,\frac{y^2}{2Q}. \tag{4.7}$$

Далее рассмотрим как рассчитываются оптимальные параметры работы системы.

Величина оптимальной партии рассчитывается по формуле

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \sqrt{1+\frac{h}{d}}\ . \tag{4.8}$$

Максимальная величина задолженного спроса вычисляется следующим образом:

$$y_{макс} = \frac{h}{d} \cdot \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{d}}}\ . \tag{4.9}$$

Оптимальный период возобновления заказа равен

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \sqrt{\frac{2K}{hM}} \cdot \sqrt{1+\frac{h}{d}} \ . \qquad (4.10)$$

Составляющие оптимального периода возобновления заказа равны

$$T_{1опт} = \sqrt{\frac{2K}{hM}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{d}}}, \qquad (4.11)$$

$$T_{2опт} = \frac{h}{d} \cdot \sqrt{\frac{2K}{hM}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{d}}}\ , \qquad (4.12)$$

Минимальные издержки в единицу времени высчитываются по формуле

$$Z_{опт} = \sqrt{2KMh} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{d}}}\ . \qquad (4.13)$$

4.5. Пример решения задачи

Спрос на продукцию инструментального цеха составляет 6200 ед. в год. Стоимость хранения, включая потери, связанные с моральным старением, составляет 496 усл. ед. за единицу в год. Издержки размещения заказа равны 1296 усл. ед. в год. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита составляют 3600 усл. ед. за нехватку единицы продукции в течение года.

Найти оптимальную партию поставки, максимальную величину задолженного спроса, интервал возобновления поставки и годовые потери функционирования системы.

Решение

Параметры работы склада следующие: M = 6200 ед./год; K = = 1296 усл. ед.; h = 496 усл. ед./год; d = 3600 усл. ед./год.

Оптимальная партия поставки равна

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1296 \cdot 6200}{496}} \cdot \sqrt{1 + \frac{496}{3600}} = 192 \text{ ед.}$$

Максимальная величина задолженного спроса высчитывается по формуле и равна

$$y_{макс} = \frac{h}{d} \cdot \sqrt{\frac{2KM}{h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}} = \frac{496}{3600} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1296 \cdot 6200}{496}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{46}{3600}}} = 23 \text{ ед.}$$

Интервал возобновления поставки равен

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \frac{192}{6200} \approx 0{,}0309 \text{ год или } 0{,}0309 \cdot 365 = 11 \text{ сут.}$$

Среднесуточные издержки в оптимальном режиме равны

$$Z_{опт} = \sqrt{2KMh} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{d}}} = \sqrt{2 \cdot 1296 \cdot 6200 \cdot 496} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{496}{3600}}} = 83700.$$

4.6. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Компания поставляет заказчику принтеры. Средняя потребность в них составляет 49 шт. в год. Стоимость размещения одного заказа – 30 усл. ед., издержки содержания составляют 15 усл. ед. в год.

Определить оптимальную партию поставки, период пополнения заказа, годовые затраты.

Задача 2. Годовая потребность фирмы в пиломатериалах составляет 4000 м^3, затраты на хранение 1 м^3 в год – 4 усл. ед. Затраты на подготовительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны 80 усл. ед.

Найти оптимальную партию поставки, период пополнения заказа, годовые затраты. Сравнить полученные затраты с затратами в случае отклонений от оптимальной партии в любом направлении в два раза.

Задача 3. Потребность станко-сборочного цеха в заготовках определенного типа составляет 32 тыс. шт. в год. Издержки размещения заказа – 50 усл. ед., издержки содержания одной заготовки в год равны 5 усл. ед.

Найти оптимальную партию поставки, период пополнения заказа, годовые затраты. Сравнить полученные затраты с затратами в случае увеличения издержек на размещение заказа до 70 усл. ед. и уменьшении издержек содержания до 3 усл. ед.

Задача 4. На склад поступают материалы, годовой объем поставок которых равен 810 шт. Издержки завоза одной партии составляют 40 усл. ед., издержки хранения единицы запаса в сутки – 0,2 усл. ед. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита составляют 0,3 усл. ед. за нехватку единицы продукции в течение дня.

Найти оптимальную партию поставки, максимальную величину задолженного спроса, интервал возобновления поставки и годовые потери функционирования системы.

Задача 5. Годовая потребность магазина в телевизорах – 900 шт. Затраты, связанные с содержанием одного телевизора, составляют 40 усл. ед. в год, а затраты, связанные с оформление каждого заказа, – 500 усл. ед. Если в момент обращения покупателя в магазин нет нужного товара, то требование ставится на учет и удовлетворяется по мере поступления. Издержки дефицита, включающие затраты, связанные с учетом неудовлетворенных требований, составляют в год 40 усл. ед.

Определить оптимальную партию поставки, оптимальный интервал возобновления заказа, период дефицита и среднегодовые издержки.

Задача 6. Магазин радиотоваров реализует музыкальные центры. Средняя потребность в них составляет 3 шт. в месяц. Стоимость организации заказа – 28 усл. ед. Содержание его в течение месяца обходится в 14 усл. ед. Издержки дефицита составляют в месяц 20 усл. ед.

Определить оптимальную партию поставки, оптимальный интервал возобновления заказа, период работы без дефицита и среднегодовые издержки.

Задача 7. Магазин ежедневно продает 10 телевизоров. Накладные расходы на поставку партии телевизоров в магазин оцениваются в 30 усл. ед. Стоимость хранения одного телевизора на складе магазина составляет 0,85 усл. ед. в день. При перевозке телевизоры можно устанавливать друг на друга не более чем три штуки.

Определить оптимальный объем партии телевизоров, оптимальные среднесуточные издержки на хранение и пополнение запасов телевизоров на складе. Подобрать партию поставки телевизоров, обеспечивающую наименьшее отклонение от оптимального режима.

Задача 8. В магазине спрос покупателей на сок составляет 25 упаковок в день. Затраты на заказ и доставку одной партии составляют 3000 усл. ед. Среднесуточные издержки хранения одной упаковки равны 0,4 усл. ед.

Определить оптимальную партию поставки, период поставки и общие среднесуточные издержки склада на доставку и хранение сока в оптимальном режиме. Подобрать партию поставки сока, учитывая, что магазину выгодно возить число упаковок кратное 100.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные причины образования запасов?
2. Какие существуют виды затрат, связанные с организацией запаса? Как они зависят от размера партии?
3. Какие допущения делаются в модели Уилсона?
4. Почему для выбора оптимальной партии поставки рассматриваются общие издержки за единицу времени?
5. Как определить оптимальный объем партии в модели Уилсона? Как рассчитать при этом минимальные общие издержки?
6. Каким свойством обладает размер партии, найденный по формуле Уилсона?
7. Как в моделях управления товарными запасами учитывается дефицит? Как изменяется уровень запаса?
8. Каковы параметры работы системы при наличии дефицита?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Красс, М. С. Математика для экономических специальностей : учеб. / М. С. Красс. 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2002.

Кузнецов, В. П. Экономико-математические методы и модели. – Мн. : Минский институт управления, 2000.

Ларионов, А. И. Экономико-математические методы в планировании / А. И. Ларионов, Т. И. Юрченко. – М. : Выс. шк., 1984.

Рутковский, Р. А. Экономико-математические методы в торговле / Р. А. Рутковский, В. А. Сакович. – Мн. : Выш. шк., 1986.

Спирин, А. А. Экономико-математические методы и модели в торговле / А. А. Спирин, Г. П. Фомин. – М. Экономика, 1988.

Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.]; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Мн. : БГЭУ, 2000.

Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев [и др.]; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2001.

Юферева, О. Д. Экономико-математические методы и модели : сб. задач / О. Д. Юферева. – Мн. : БГЭУ, 2002. — 103 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Практикум
к лабораторным занятиям для студентов экономических специальностей и слушателей ОСП «Институт повышения квалификации и переподготовки кадров Белкоопсоюза»

В пяти частях

Часть 2

Авторы-составители:
Бондарева Валентина Викторовна
Заяц Татьяна Александровна

Редактор О. В. Ивановская
Компьютерная верстка Н. Н. Короедова

Подписано в печать 29.12.05. Бумага типографская № 1.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,6. Тираж 500 экз.
Заказ №

УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
ЛИ № 02330/0056814 от 02.03.2004 г.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

Отпечатано в УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Практикум
к лабораторным занятиям для студентов экономических специальностей и слушателей ОСП «Институт повышения квалификации и переподготовки кадров Белкоопсоюза»

В пяти частях

Часть 2

Гомель 2005