УДК 330.4
ББК 65В631
Э 40

Авторы-составители: О. И. Еськова, канд. техн. наук, доцент;
В. В. Бондарева, канд. техн. наук, доцент;
Т. А. Заяц, ст. преподаватель

Рецензенты: В. Е. Быховцев, д-р техн. наук, профессор кафедры вычислительной математики и программирования Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;
М. А. Грибовская, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 2 от 14 декабря 2010 г.

Э 40 **Эконометрика** и экономико-математические методы и модели : пособие для студентов заочной формы получения высшего образования экономических специальностей / авт.-сост. : О. И. Еськова, В. В. Бондарева, Т. А. Заяц. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2011. – 64 с.
ISBN 978-985-461-891-3

В пособии в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего экономического образования рассматриваются вопросы курса «Эконометрика и экономико-математические методы и модели». Данное издание включает теоретический материал по дисциплине и вопросы к зачету (экзамену), что позволяет прививать навыки самостоятельной работы, шире внедрять самостоятельную управляемую работу студентов. В пособии приведен список рекомендуемой литературы, что обеспечивает расширение спектра знаний по изучаемым вопросам.

УДК 330.4
ББК 65В631

ISBN 978-985-461-891-3

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Сложность задач управления экономическими системами в современных условиях возрастает с каждым годом. Возрастает также и цена ошибки при принятии решения руководителями всех уровней. Поэтому подготовка специалистов по управлению должна предусматривать овладение ими математическими методами изучения и анализа экономики как эффективного инструмента для принятия оптимальных управленческих решений. Учебная программа по дисциплине «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» предусматривает изучение как общих принципов экономико-математического моделирования, так и конкретных примеров применения математических методов и моделей в экономике.

Данное пособие соответствует учебной программе и предназначено для студентов заочной формы получения высшего образования, изучающих дисциплину «Эконометрика и экономико-математические методы и модели». Оно может быть использовано как основа лекционного курса, а также для самостоятельной работы студентов.

В пособии в сжатом, лаконичном виде изложен теоретический материал по основным девяти темам курса. Рассматриваются общие вопросы моделирования и примеры различных видов экономико-математических моделей:

- модели сетевого планирования и управления;
- модели управления товарными запасами;
- модели прогнозирования;
- модели межотраслевого баланса;
- моделирование систем массового обслуживания;
- модели теории игр;
- задачи математического программирования;
- модели финансовых операций и анализа инвестиционных проектов.

По всем темам излагаются математические основы рассматриваемых методов, для иллюстрации некоторых тем приведены примеры решения простых задач. Также даны задачи для самостоятельного решения и вопросы к зачету (экзамену).

Тема 1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Постоянно усложняющиеся экономические процессы потребовали создания и совершенствования особых методов их изучения и анализа. Широкое распространение получило использование моделирования и количественного анализа. В связи с этим можно выделить такие направления экономических исследований, как экономико-математические методы (ЭММ) и эконометрика.

1.1. Эконометрика как научная дисциплина

Эконометрика – это научная дисциплина, входящая в комплекс ЭММ, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей.

Формально эконометрика означает «измерения в экономике». Однако область исследований данной дисциплины гораздо шире.

В эконометрике решаются задачи описания данных (в том числе усреднения), оценивания, проверки гипотез, установления зависимостей, классификации объектов и признаков, прогнозирования, принятия статистических решений и др. Одним из важнейших направлений эконометрики является построение прогнозов по различным экономическим показателям.

Экономические процессы развиваются во времени, поэтому большое место в эконометрике занимают вопросы анализа и прогнозирования временных рядов, в том числе многомерных.

Эконометрика как научная дисциплина зародилась и получила развитие на основе слияния экономической теории, математической экономики, экономической и математической статистики.

Эконометрика позволяет найти количественное подтверждение либо опровержение того или иного экономического закона либо гипотезы. Например, экономическая теория утверждает, что спрос на товар с ростом его цены убывает. Но при этом практически не исследованным остается вопрос, как быстро и по какому закону происходит это убывание. Эконометрика решает эту задачу для каждого конкретного случая. При этом используются реальные числовые данные, полученные из опыта, наблюдений (эмпирические данные).

Изучение экономических процессов (взаимосвязей) в эконометрике осуществляется через математические эконометрические модели.

С помощью таблиц, графиков и диаграмм эти модели представляются в наглядной форме. Использование такого инструментария роднит эконометрику с экономической статистикой.

Мощным инструментом эконометрических исследований является аппарат математической статистики. В связи с тем, что большинство экономических показателей носит характер случайных величин, предсказать точные значения которых практически невозможно, использование методов математической статистики в эконометрике естественно и обосновано. Однако в силу специфики получения статистических данных в экономике (например, в экономике невозможно проведение управляемого эксперимента) эконометристам приходится использовать и собственные наработки, и специальные приемы анализа, которые в математической статистике не встречаются.

1.2. Экономико-математические методы и их классификация

Экономико-математические методы – это комплекс экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.

В комплексе ЭММ можно выделить следующие дисциплины:

- *Эконометрика*. Одно из важнейших направлений эконометрики – это анализ временных рядов и построение прогнозов.
- *Экономическая кибернетика* – наука об управлении экономикой. Выделяют такие разделы этой дисциплины, как теория экономической информации, теория управляющих систем.
- *Математическая экономика*. Для нее характерен системный подход, т. е. экономика рассматривается как совокупность ее функциональных подсистем (производственной, финансово-кредитной, потребительской). Основные разделы: теория производственных функций, теория спроса и потребления, межотраслевые балансы.
- *Методы исследования операций* в экономике. Методы исследования операций дают обоснование выбора оптимальной стратегии с учетом ограничений. Основные разделы: математическое программирование, теория игр, сетевое планирование и управление.
- *Экспериментальные методы* (имитационное моделирование, деловые игры и др.). Имитационное моделирование позволяет построить на ЭВМ алгоритмическую модель некоторого экономического процесса и производить на ней эксперименты. Такой подход позволяет исследовать системы практически любой степени сложности.

Объектом исследования всех ЭММ являются социально-экономические системы. Под *социально-экономическими системами* понимают такие системы, в которых рассматриваются экономические, социальные, организационные или управленческие процессы.

Любая система обладает свойством целостности, т. е. ее свойства не сводятся к сумме свойств составляющих ее элементов. Таким образом, социально-экономическая система обладает такими свойствами, которых нет у каждого из ее элементов.

Можно выделить также следующие особенности этих систем, которые делают сложным задачу их исследования:

- процессы в этих системах являются динамическими, т. е. изменяются во времени;
- элементами системы являются люди, поведение которых трудно формализовать;
- на систему в значительной мере влияют внешние факторы, поэтому экономическую систему трудно изолировать от окружающей среды и исследовать в чистом виде;
- события в системе чаще всего носят случайный характер, и некоторые параметры системы не определены;
- количество переменных, которые описывают систему, очень велико;
- экономические явления и процессы носят массовый характер, поэтому выявление закономерностей требует большого числа наблюдений.

Целью исследования социально-экономических систем является решение следующих практических задач:

- анализ экономических объектов и процессов;
- экономическое прогнозирование, т. е. предвидение развития экономических процессов;
- выработка оптимальных управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Для сравнения управленческих решений необходимо ввести понятие «критерия оптимальности». *Критерий оптимальности* – это экономический показатель, на основании которого осуществляется выбор лучшего управленческого решения. Критерии оптимальности бывают натуральные и стоимостные, максимизируемые и минимизируемые. Например, к максимизируемым критериям относятся валовая, конечная, чистая продукция, прибыль, рентабельность; к минимизируемым – себестоимость, общие затраты и т. д. В моделях критерий оптимальности записывается в виде целевой функции.

1.3. Основные понятия моделирования

Основным методом исследования социально-экономических систем является метод моделирования. *Моделированием* называется способ изучения реального объекта через рассмотрение подобного ему и более простого объекта, т. е. его модели. Таким образом, моделирование предполагает разработку модели, исследование этой модели и перенос результатов исследования на реальный объект.

Модель – это образ реального объекта, отражающий существенные свойства этого объекта и замещающий его в ходе исследования. Модель может быть материальной (образец, макет) или идеальной (описание, схема, график и т. д.).

Математической моделью называется формализованное на языке математики описание объекта или процессов, в нем протекающих. Математические модели имеют вид функций, уравнений, неравенств и их систем.

Сложность социально-экономических систем делает невозможным создание полной модели, учитывающей все без исключения факторы. Поэтому модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта и замещает оригинал в строго ограниченном смысле. В зависимости от целей моделирования для исследования одного и того же объекта могут использоваться различные модели.

Под *адекватностью модели* понимается ее соответствие исследуемым чертам и свойствам исходного объекта. Критерием адекватности является совпадение результатов моделирования и результатов эксперимента на реальном объекте.

Единой системы классификации моделей не существует. Имеются несколько признаков классификации. Рассмотрим некоторые из них:

1. ***По общему целевому назначению*** различают *теоретико-аналитические модели,* используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов, и *прикладные модели,* применяемые в решении конкретных экономических задач анализа, прогнозирования и управления.

2. ***По степени агрегирования объектов моделирования*** модели подразделяются на макроэкономические и микроэкономические. *Макроэкономические модели* отражают функционирование экономики как единого целого, а *микроэкономические модели* связаны, как правило, с такими звеньями экономики, как организации и фирмы.

3. ***По учету фактора времени*** выделяют *статические модели*, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени, и *динамические модели*, описывающие экономические системы в развитии.

4. ***По учету фактора неопределенности*** модели подразделяются на *детерминированные* и *стохастические*. Детерминированными называются модели объектов, состояние которых однозначно определяется через параметры, входную информацию и начальные условия. Если же состояние объекта зависит и от некоторых случайных величин, то модель является стохастической.

5. ***По типу математического аппарата***, используемого в модели, различают следующие виды моделей:

- *модели межотраслевого баланса* (*МОБ*), используемые для анализа и планирования обмена продукцией между отраслями народного хозяйства;
- *модели прогнозирования*, основная цель которых состоит в том, чтобы сделать прогноз, т. е. предсказать значение некоторого экономического показателя в момент времени, относящийся к будущему.
- *модели массового обслуживания*, которые позволяют выработать рекомендаций по рациональному построению систем, предназначенных для обслуживания потока заявок (примерами таких систем являются магазины, организации бытового обслуживания, сети связи и т. д.);
- *модели управления запасами* используются для определения размера создаваемого запаса и момента времени его пополнения, при которых суммарные затраты склада были бы минимальными;
- *модели задач математического программирования*, которые предназначены для отыскания оптимального управленческого решения при наличии ряда ограничений;
- *модели сетевого планирования и управления*, используемые при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ;
- *модели теории игр*, применяемые для исследования конфликтных ситуаций, возникающих в условиях неопределенности.

1.4. Комплексный анализ работы торговых и промышленных объектов как пример простейшей модели

Пусть имеется m торговых или промышленных объектов, деятельность которых необходимо оценить с точки зрения эффективности их работы. Каждый из них характеризуется значениями n экономических показателей $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Например, имеется пять райпотребобществ ($m = 5$), по каждому из которых имеются данные о товарообороте (X_1), охвате доходов населения (X_2), уровне издержек (X_3) и оборачиваемости капитала (X_4), т. е. всего $n = 4$ показателя (таблица 1).

Таблица 1 – **Показатели работы пяти райпо**

Райпо, номер	Показатели			
	X_1, млн р.	X_2, %	X_3, %	X_4, дней
1	740	60	5	70
2	500	75	6,5	50
3	800	75	6	90
4	620	90	7	60
5	600	70	4	75

Оценить деятельность торговых объектов сразу по всем показателям сложно: по товарообороту лучше всех работает один объект, по уровню издержек – другой, и т. д. Поэтому для такой оценки используют следующий прием: рассчитывают *комплексные суммарные показатели работы* каждого торгового объекта (Q_i), которые учитывают влияние всех данных показателей. Считается, что наиболее эффективно работает тот торговый объект, у которого суммарный комплексный показатель наибольший.

Однако, чтобы рассчитать комплексный суммарный показатель, нельзя просто просуммировать значения всех натуральных показателей, так как они имеют различный экономический смысл и свои единицы измерения (например, товарооборот измеряется в млн р., оборачиваемость – в днях, и т. д.). Поэтому от каждого натурального показателя x_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ переходят к безразмерному показателю Y_{ij}. Данный показатель не имеет единиц измерения и принимает значения от 0 до 1. Для перехода к *безразмерному показателю* используется одна из следующих формул:

$$Y_{ij} = (x_{ij} - A_j) : (B_j - A_j) \tag{1}$$

или

$$Y_{ij} = (B_j - x_{ij}) : (B_j - A_j), \tag{2}$$

где i – номер объекта;

j – номер показателя;

A_j – минимальное значение для любого j-го показателя среди всех i объектов $(A_j = \min\limits_i x_{ij})$;

B_j – максимальное значение для любого j-го показателя среди всех i объектов $(B_j = \max\limits_i x_{ij})$.

Формула (1) выбирается для перехода к безразмерному показателю, когда по экономическому смыслу «чем больше значение показателя X_j, тем лучше», а формула (2) – когда «чем меньше значение показателя X_j, тем лучше».

Например, для перехода к безразмерному показателю для натурального показателя «товарооборот» будет применяться формула (1), потому что по экономическому смыслу «чем больше товарооборот, тем лучше». В результате применения этой формулы тот объект, который имеет наибольшее значение показателя X_j (т. е. работает лучше всех), получает значение $Y_{ij} = 1$. А тот объект, для которого X_j наименьшее (хуже всех работает), получает значение $Y_{ij} = 0$. Остальные объекты получают значения безразмерного показателя от нуля до единицы соответственно уровню относительного успеха их работы.

Для показателя «уровень издержек» будет применяться формула (2), потому что по экономическому смыслу «чем меньше уровень издержек, тем лучше». В результате применения этой формулы тот объект, который имеет наименьший уровень издержек (а значит, работает лучше всех по этому показателю), получит значение $Y_{ij} = 1$. Значение безразмерного показателя, равное 0, получит тот объект, у которого издержки были наибольшие.

Таким образом, безразмерный показатель не только позволяет обойти вопрос с единицами измерения, но и обеспечивает однозначное понимание того, какое значение является лучшим: для Y_{ij} лучше то значение, которое больше.

Далее находится суммарный комплексный показатель для каждого торгового объекта как сумма его безразмерных показателей:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \qquad (i = \overline{1,m}). \tag{3}$$

Иногда требуется проанализировать работу торговых объектов по нескольким натуральным показателям, причем важность каждого из них в анализе не одинакова. Для решения данной задачи каждому натуральному показателю назначается приоритет за счет введения весовых коэффициентов $P_j\,(j = \overline{1,n})$ (ранги, баллы и т. п.), которые принимают значение от 0 до 1. Чем больше весовой коэффициент, тем важнее считается показатель.

Например, товарооборот является наиболее важным показателем при анализе, следующий по важности – уровень издержек, а охват доходов населения и оборачиваемость капитала имеют гораздо меньшее значение. В этом случае можно назначить следующие весовые коэффициенты: P_1 = 1 (для товарооборота), P_3 = 0,9 (для уровня издержек) и P_2 = P_4 = 0,7 (для охвата доходов и оборачиваемости средств).

Суммарный комплексный показатель для каждого объекта в случае учета весовых коэффициентов находится по формуле

$$Q_i^* = \sum_{j=1}^{n} P_j Y_{ij} \qquad (i = \overline{1, m}). \tag{4}$$

Чем больше значение Q_i или Q_i^*, тем лучше оценивается работа объекта.

Пример 1. Необходимо оценить торговую деятельность пяти райпо (m = 5). Для оценки предлагается взять четыре показателя (n = 4):

- товарооборот (X_1), млн р.;
- охват доходов (X_2), %;
- уровень издержек (X_3), %;
- оборачиваемость (X_4), дней.

Исходные данные приведены в таблице 1. Следует также учесть весовые коэффициенты показателей P_1 = 1, P_2 = 0,7, P_3 = 0,9, P_4 = 0,7.

Решение. Рассчитаем безразмерные показатели. Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – **Комплексный анализ системы пяти райпо**

Райпо, i	Показатели, j								
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Q
1	740	60	5,0	70	0,80	0	0,67	0,50	1,97
2	500	75	6,5	50	0	0,50	0,17	1,00	1,67
3	800	70	6,0	90	1,00	0,50	0,33	0	1,83
4	620	90	7,0	60	0,40	1,00	0	0,75	2,15
5	600	80	4,0	75	0,33	0,33	1,00	0,38	2,04
A = min	500	60	4,0	50	–	–	–	–	–
B = max	800	90	7,0	90	–	–	–	–	–
$B – A$	300	30	3,0	40	–	–	–	–	–

При переходе к безразмерным показателям для товарооборота (X_1) используем формулу (1), так как он по экономическому смыслу «чем больше, тем лучше»:

A_1 = min {740, 500, 800, 620, 600} = 500;
B_1 = max {740, 500, 800, 620, 600} = 800;

$B_1 - A_1 = 800 - 500 = 300;$
$Y_{11} = (740 - 500) : 300 = 0{,}8;$
$Y_{21} = (500 - 500) : 300 = 0;$
$Y_{31} = (800 - 500) : 300 = 1;$
$Y_{41} = (620 - 500) : 300 = 0{,}4;$
$Y_{51} = (600 - 500) : 300 = 0{,}33.$

Для охвата доходов населения (X_2) также используем формулу (1), поскольку охват доходов чем больше, тем лучше:

$A_2 = \min\{60, 75, 75, 90, 70\} = 60;$
$B_2 = \max\{60, 75, 75, 90, 70\} = 90;$
$B_2 - A_2 = 90 - 60 = 30;$
$Y_{12} = (60 - 60) : 30 = 0;$
$Y_{22} = (75 - 60) : 30 = 0{,}5;$
$Y_{32} = (75 - 60) : 30 = 0{,}5;$
$Y_{42} = (90 - 60) : 30 = 1;$
$Y_{52} = (70 - 60) : 30 = 0{,}33.$

Поскольку уровень издержек по экономическому смыслу «чем меньше, тем лучше», используем для перехода к безразмерным показателям формулу (2):

$A_3 = \min\{5, 6{,}5, 6, 7, 4\} = 4;$
$B_3 = \max\{5, 6{,}5, 6, 7, 4\} = 7;$
$B_3 - A_3 = 7 - 4 = 3;$
$Y_{13} = (7 - 5) : 3 = 0{,}67;$
$Y_{23} = (7 - 6{,}5) : 3 = 0{,}17;$
$Y_{33} = (7 - 6) : 3 = 0{,}33;$
$Y_{43} = (7 - 7) : 3 = 0;$
$Y_{53} = (7 - 4) : 3 = 1.$

Аналогично для оборачиваемости в днях также применяется формула (2):

$A_4 = \min\{70, 50, 90, 60, 75\} = 50;$
$B_4 = \max\{70, 50, 90, 60, 75\} = 90;$
$B_4 - \mathrm{A}_4 = 90 - 50 = 40;$
$Y_{14} = (90 - 70) : 40 = 0{,}5;$
$Y_{24} = (90 - 50) : 40 = 1;$

$Y_{34} = (90 - 90) : 40 = 0;$
$Y_{44} = (90 - 60) : 40 = 0,75;$
$Y_{54} = (90 - 75) : 40 = 0,38.$

Найдем суммарные комплексные показатели для каждого райпо, используя формулу (3):

$Q_1 = 0,8 + 0 + 0,67 + 0,5 = 1,97;$
$Q_2 = 0 + 0,5 + 0,17 + 1 = 1,67;$
$Q_3 = 1 + 0,5 + 0,33 + 0 = 1,83;$
$Q_4 = 0,4 + 1 + 0 + 0,75 = 2,15;$
$Q_5 = 0,33 + 0,33 + 1 + 0,38 = 2,04.$

Анализ найденных комплексных показателей (Q_i) работы каждого райпо показывает, что наиболее эффективно работает четвертое райпо ($Q_4 = 2,15$).

Переоценим торговую деятельность райпо с помощью весовых коэффициентов $P_1 = 1$, $P_2 = 0,7$, $P_3 = 0,9$, $P_4 = 0,7$ согласно формуле (4):

$Q_1^* = 0,8 \cdot 1 + 0 \cdot 0,7 + 0,67 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,7 = 1,75;$
$Q_2^* = 0 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,7 + 0,17 \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,7 = 1,2;$
$Q_3^* = 1 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,7 + 0,33 \cdot 0,9 + 0 \cdot 0,7 = 1,65;$
$Q_4^* = 0,4 \cdot 1 + 1 \cdot 0,7 + 0 \cdot 0,9 + 0,75 \cdot 0,7 = 1,625;$
$Q_5^* = 0,33 \cdot 1 + 0,33 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,9 + 0,38 \cdot 0,7 = 1,73.$

С учетом весовых коэффициентов наиболее эффективно работает первое райпо ($Q_1^* = 1,75$)

Тема 2. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Метод сетевого планирования используется при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ. Основой этого метода является сетевой график.

Сетевой график (ориентированный граф) – это графическая модель некоторого комплекса взаимосвязанных работ, называемых проектом.

Работа – это процесс, приводящий к определенным результатам. Работа на графике изображается дугой (стрелкой). Работа имеет продолжительность и может требовать ресурсов. Над дугой указывается числовая характеристика работы (например, время выполнения).

Вершинам графика соответствуют события (вершина изображается кружком или квадратиком). *Событие* – факт окончания всех работ, в него входящих, и начала всех работ, из него исходящих. Пока не выполнены все работы, входящие в событие, не может свершиться само событие, и, следовательно, не может быть начата ни одна из работ, выходящих из него. Событие не имеет продолжительности и не требует ресурсов.

Каждое событие в сетевом графике имеет номер, а работа обозначается двумя номерами (i, j), где i – номер начального события работы, а j – номер конечного события работы (рисунок 1). Продолжительность работы обозначается $t\ (i, j)$.

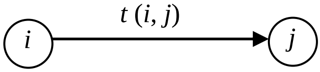

Рисунок 1 – **Изображение работы на сетевом графике**

Событие, с которого начинается выполнение проекта, называется *исходным* и обозначается буквой I. Исходное событие не имеет предшествующих работ.

Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется *завершающим* и обозначается буквой S. Завершающее событие не имеет последующих работ. В сетевом графике может быть только одно исходное и только одно завершающее событие.

На основе сетевого графика могут быть решены следующие задачи:

- анализ последовательности и взаимосвязи работ (сам процесс построения сетевого графика дает возможность четко выявить взаимосвязь различных этапов проекта, условия начала тех или иных работ);
- определение срока выполнения проекта (критического срока);
- выявление возможностей задержки начала каждой работы или удлинения срока ее выполнения;
- оптимизация времени выполнения проекта или ресурсов, требуемых для его выполнения.

Рассмотрим пример сетевого графика (рисунок 2). Это график проекта некоторой туристской фирмы, включающий комплекс работ по подготовке к участию в выставке. Перечень работ приведен в таблице 3.

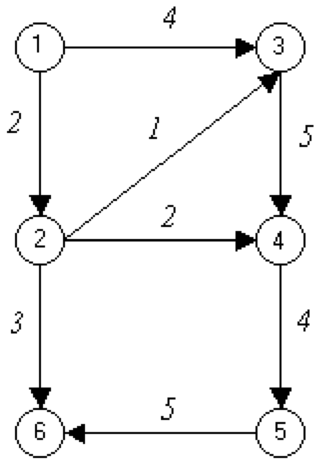

Рисунок 2 – **Сетевой график примера**

Таблица 3 – **Перечень работ проекта по организации выставки**

Содержание работы	Обозначение	Продолжительность работы, дней
Определение рекламной стратегии	(1, 2)	2
Разработка дизайна проекта экспозиции	(1, 3)	4
Определение количества и видов реклам-но-информационных материалов	(2, 3)	1
Заключение договора на участие и оплата аренды	(2, 4)	2
Обучение и инструктаж персонала	(2, 6)	3
Заказ оборудования и рекламных материа-лов, оплата счетов	(3, 4)	5
Доставка оборудования, экспонатов и ре-кламных материалов	(4, 5)	4
Техническое оформление стендов	(5, 6)	5

Данный проект включает восемь работ и шесть событий. Сетевой график отражает взаимосвязь работ проекта.

Например, работа (2, 3) имеет продолжительность 1 день. Она может быть начата только тогда, когда завершится работа (1, 2).

Работа (3, 4) имеет продолжительность 5 дней. Она может быть начата только тогда, когда завершатся обе работы, ей предшествующие: (1, 3) и (2, 3).

Событие 4 состоит в факте окончания обеих работ (2, 4) и (3, 4) и начала работы (4, 5). Событие 4 не наступит, если хотя бы одна из работ (2, 4) или (3, 4) не завершена. Аналогично можно объяснить смысл остальных событий.

В примере исходным является событие 1, а завершающим – событие 6.

Путь – это последовательность работ в сетевом графике. *Полный путь* – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих исходное и завершающее событие.

Выделим следующие полные пути (они обозначаются номерами событий, через которые проходят):

$\mu_1 = (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6)$;
$\mu_2 = (1 – 3 – 4 – 5 – 6)$;
$\mu_3 = (1 – 2 – 4 – 5 – 6)$;
$\mu_4 = (1 – 2 – 6)$.

Критическим называется полный путь, имеющий наибольшую продолжительность во времени. Критических путей на сетевом графике может быть несколько (при этом все они имеют одинаковую продолжительность).

Продолжительность критического пути определяет *критический срок проекта* $t_{кр}$. Все остальные (некритические) полные пути выполняются параллельно с критическим путем (цепочкой работ) и завершаются раньше. Критический срок таким образом показывает, за какое минимальное время может быть завершен весь проект. Очевидно, что увеличение сроков выполнения проекта больше $t_{кр}$ невыгодно.

Работы, принадлежащие критическому пути, называются *критическими*. Они не имеют резервов времени. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего проекта.

В нашем примере определить критический путь легко: нужно перебрать все возможные полные пути, рассчитать продолжительность каждого из них и выбрать наибольший:

$t(\mu_1) = 2 + 1 + 5 + 4 + 5 = 17$;
$t(\mu_2) = 4 + 5 + 4 + 5 = 18$;
$t(\mu_3) = 2 + 2 + 4 + 5 = 13$;
$t(\mu_4) = 2 + 3 = 5$.

Критическим является полный путь μ_2, так как он имеет наибольшую продолжительность. Критический путь принято выделять на графике жирной линией (рисунок 3).

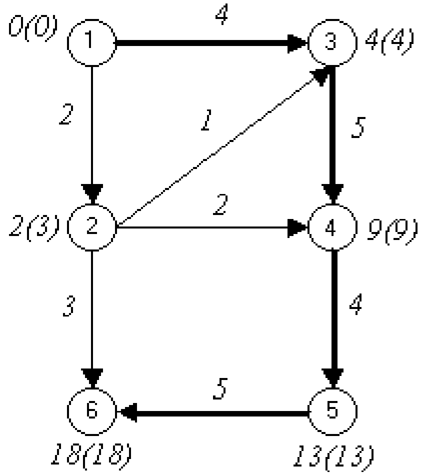

Рисунок 3 – **Сетевой график примера с результатами расчетов**

Однако, если сетевой график достаточно сложный, перебрать все возможные пути затруднительно. Поэтому используют *второй способ определения критического пути*:

- для каждого события рассчитывают ранний и поздний сроки свершения;
- на их основе определяют резервы времени всех событий и работ;
- проводят критический путь по тем работам и событиям, которые не имеют резерва времени.

Ранний срок свершения события – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

Ранний срок свершения события рассчитывается последовательно для каждого события от исходного к завершающему по следующим формулам:

- $t_p\,(I) = 0$, т. е. начало проекта принимается за нулевой момент времени;
- $t_p\,(j) = t_p\,(i) + t\,(i, j)$, если событию j предшествует только одна работа (в вершину j входит одна дуга);
- $t_p(j) = \max\limits_{i \to j}\{t_p(i) + t(i, j)\}$, если событию предшествует несколько работ (в вершину j входят несколько дуг).

Здесь $i \to j$ – множество работ, заканчивающихся j-м событием (дуги, входящие в вершину j);

$t_p(i)$ – ранний срок свершения события, с которого начинается работа (i, j);
$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Рассчитаем ранние сроки свершения событий для нашего примера. Результат расчетов для каждого события будем записывать возле соответствующей вершины графа на рисунке 3.

Расчет времени начинается с нуля: $t_p(1) = 0$.

Событие 2 наступит тогда, когда закончится работа (1, 2). Эта работа начнется в момент времени 0 и продлится 2 дня. Поэтому она закончится во второй день:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1, 2) = 0 + 2 = 2.$$

Событие 3 наступит тогда, когда закончатся обе работы: (1, 3) и (2, 3). Работа (1, 3) начнется в момент времени 0 и продолжится 4 дня, т. е. она закончится на 4-й день (0 + 4 = 4). Работа (2, 3) закончится на 3-й день (2 + 1 = 3). Поскольку обе работы должны закончиться, чтобы наступило событие 4, нужно ориентироваться на самую позднюю из них, т. е. взять максимум по входящим в событие работам:

$$t_p(3) = \max\{t_p(1) + t(1, 3), t_p(2) + t(2, 3)\} = \max\{0 + 4, 2 + 1\} = 4.$$

Так же находят ранние сроки остальных событий проекта:

$$t_p(4) = \max\{t_p(2) + t(2, 4), t_p(3) + t(3, 4)\} = \max\{2 + 2, 4 + 5\} = 9;$$
$$t_p(5) = t_p(4) + t(4, 5) = 9 + 4 = 13;$$
$$t_p(6) = \max\{t_p(2) + t(2, 6), t_p(5) + t(5, 6)\} = \max\{2 + 3, 13 + 5\} = 18.$$

Критический срок проекта совпадает с ранним сроком свершения завершающего события проекта: $t_{кр} = t_p(S)$.

Таким образом, рассчитав ранние сроки, можно определить критический срок проекта для данного примера: $t_{кр} = t_p(6) = 18$.

Поздний срок свершения события – это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием, к критическому сроку.

Поздние сроки свершения событий рассчитываются «обратным ходом» (от завершающего события к исходному) по следующим формулам:

- $t_n(S) = t_p(S) = t_{кр}$, т. е. для завершающего события поздний срок свершения совпадает с критическим сроком;
- $t_n(i) = t_n(j) - t(i, j)$, если событием i начинается одна работа (из вершины i выходит только одна дуга);
- $t_n(i) = \min\limits_{i \to j} \{t_n(j) - t(i, j)\}$, если событием i начинается несколько работ (из вершины i выходят несколько дуг).

Здесь $i \to j$ – множество работ, начинающихся i-м событием (дуги, исходящие из вершины i);
$t_n(j)$ – поздний срок свершения события, которым заканчивается работа (i, j);
$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Рассчитаем поздние сроки свершения событий для нашего примера и запишем их в скобках возле соответствующей вершины (см. рисунок 3).

Для завершающего события $t_n(6) = t_p(6) = 18$.

Рассчитывая поздний срок свершения события 5, необходимо учитывать, что этим событием начинается работа (5, 6), которая должна быть обязательно закончена к 18-му дню. Она длится 5 дней, поэтому самый поздний момент, когда она должна начаться, это 13-й день (18 – 5 = 13). Если вдруг событие 5 наступит, скажем, на 14-й день, то работа (5, 6) закончится на 19-й день (14 + 5 = 19), и срок выполнения всего проекта будет сорван. Поэтому можно записать для события 5 следующее:

$t_n(5) = t_n(6) - t(5, 6) = 18 - 5 = 13.$

Событием 4 начинается одна работа (4, 5). Она должна быть закончена к 13-му дню для того, чтобы следующая за ней работа успела к критическому сроку. Поэтому работа (4, 5) должна начаться не позже, чем на 9-й день:

$t_n(4) = t_n(5) - t(4, 5) = 13 - 4 = 9.$

Аналогично рассчитываем поздний срок свершения события 3:

$t_n(3) = t_n(4) - t(3, 4) = 9 - 5 = 4.$

Событием 2 начинаются три работы: (2, 3), (2, 4) и (2, 6). Все они должны успеть закончиться вовремя, т. е. работа (2, 3) – к 4-му дню, работа (2, 4) – к 9-му, а работа (2, 6) – к 18-му дню. Для этого работа (2, 3) должна начаться не позже, чем на 3-й день (4 – 1 = 3), работа (2, 4) – на 7-й день (9 – 2 = 7), а работа (2, 6) должна начаться не позже чем на 15-й день (18 – 3 = 15). Чтобы успели все эти работы, нужно чтобы успела та из них, которая начинается раньше. Поэтому следует найти минимум по исходящим из события 2 работам:

$t_n(2) = \min\{t_n(3) - t(2, 3), t_n(4) - t(2, 4), t_n(6) - t(2, 6)\} = \min\{4 - 1, 9 - 2, 18 - 3\} = 3.$

Аналогично находится поздний срок свершения события 1, из которого выходят две работы:

$t_n(1) = \min\{t_n(3) - t(1, 3), t_n(2) - t(1, 2)\} = \min\{4 - 4, 3 - 2\} = 0.$

Резерв времени события показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения критического срока проекта:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Рассчитаем резервы времени событий для нашего примера:

$R(1) = t_n(1) - t_p(1) = 0 - 0 = 0;$
$R(2) = t_n(2) - t_p(2) = 3 - 2 = 1;$
$R(3) = t_n(3) - t_p(3) = 4 - 4 = 0;$
$R(4) = t_n(4) - t_p(4) = 9 - 9 = 0;$
$R(5) = t_n(5) - t_p(5) = 13 - 13 = 0;$
$R(6) = t_n(6) - t_p(6) = 18 - 18 = 0.$

Таким образом, можно задержать свершение события 2 на 1 день. Остальные события 1, 3, 4, 5 и 6 не имеют резерва времени. Поэтому они принадлежат критическому пути. Если бы ранее не был выделен критический путь на сетевом графике, то можно было бы провести его сейчас, после расчетов резервов времени событий, через события 1, 3, 4, 5 и 6. Для проверки следует сложить продолжительности работ этого полного пути, которые в сумме должны быть равны критическому сроку: $4 + 5 + 4 + 5 = 18 = t_{кр}$.

Резерв могут иметь не только события, но и работы проекта.

Полный резерв времени работы показывает, как можно увеличить время выполнения этой работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится.

Полные резервы времени работ определяются на основе параметров свершения событий по следующей формуле:

$$R(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j).$$

Рассчитаем резервы работ примера:

$R(1, 2) = t_n(2) - t_p(1) - t(1, 2) = 3 - 0 - 2 = 1;$
$R(1, 3) = t_n(3) - t_p(1) - t(1, 3) = 4 - 0 - 4 = 0;$
$R(2, 3) = t_n(3) - t_p(2) - t(2, 3) = 4 - 2 - 1 = 1;$
$R(2, 4) = t_n(4) - t_p(2) - t(2, 4) = 9 - 2 - 2 = 5;$
$R(2, 6) = t_n(6) - t_p(2) - t(2, 6) = 18 - 2 - 3 = 13;$
$R(3, 4) = t_n(4) - t_p(3) - t(3, 4) = 9 - 4 - 5 = 0;$
$R(4, 5) = t_n(5) - t_p(4) - t(4, 5) = 13 - 9 - 4 = 0;$
$R(5, 6) = t_n(6) - t_p(5) - t(5, 6) = 18 - 13 - 5 = 0.$

Критические работы резервов времени не имеют, т. е. еще раз убеждаемся в том, что критический путь мы выделили правильно.

Полные резервы времени работ рассчитываются для организации контроля над выполнением проекта. Кроме того, зная эти резервы, можно оптимизировать срок выполнения проекта. Например, можно забрать ресурсы у тех работ, которые имеют резерв времени (снять часть рабочих с этих работ или урезать их финансирование), и передать их работам, лежащим на критическом пути. Тогда критические работы смогут быть выполнены раньше, что повлечет уменьшение критического срока всего проекта. Поскольку при таком перераспределении ресурсов критический путь может измениться, задача оптимизации критического срока является многоэтапной и может быть решена с использованием компьютера.

Тема 3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ

Для нормальной работы любой торговой или промышленной организации необходимо иметь некоторый запас товара, сырья или расходных материалов. Очевидно, что экономически невыгодно иметь как чрезмерный, так и недостаточный запас. В первом случае в излишнем количестве запаса замораживается капитал, который не приносит прибыль (омертвение средств), а также возрастают расходы на хранение запаса. Во втором случае возможны потери, связанные с нарушением производственного процесса или процесса торговли из-за отсутствия запаса на складе.

Проблема управления запасами состоит в определении размера создаваемого запаса и момента времени его пополнения, при которых суммарные затраты, связанные с приобретением и содержанием запасов, а также с потерями от дефицита, были бы минимальными.

Виды затрат в задачах управления запасами:

- *Затраты на содержание запасов* (*условно-переменные*) включают стоимость аренды складских помещений, амортизации оборудования, отопления, освещения, вентиляции и охраны складов, стоимость складской переработки материалов, издержки учета и инвентаризации, потери от изменения цен за время хранения, потери от порчи и т. д. Эти затраты находятся в прямой зависимости от размера запасов. Обозначим буквой h стоимость хранения на складе единицы запаса в единицу времени (например, стоимость хранения на складе 1 т сахара в сутки).
- *Затраты на организацию и реализацию заказа партии товара* (*условно-постоянные*) включают расходы на оформление заказов, заключение договоров (почтово-телеграфные, командировочные расходы), погрузочно-разгрузочные операции, транспорт. Считается, что расходы на организацию и реализацию одного заказа не зависят от размера заказываемой партии (это упрощение модели). Обозначим буквой K стоимость организации заказа одной партии товара. Отметим, что это не стоимость самого товара, а стоимость доставки его на склад.
- *Затраты*, *связанные с дефицитом*, – это потери из-за задержек в удовлетворении спроса на товары. Включают денежные штрафы за несвоевременную поставку или недопоставку товара, потери от простоя оборудования и рабочей силы из-за отсутствия сырья или материалов, расходы, связанные с экстренной доставкой, и т. д.

Базовая модель определения заказываемой партии товара (*модель Уилсона*)

Модель Уилсона позволяет определить оптимальный размер заказываемой партии товара и интервал времени между поставками. В ней рассматривается идеальный склад, для которого принимаются следующие предположения (упрощения реальной действительности):

- затраты на организацию заказа партии товара (K) не зависят от объема партии;

• запас со склада расходуется равномерно, с известной постоянной скоростью M;

• объем заказываемой партии постоянен и равен Q ед. товара;

• запас пополняется мгновенно (пренебрегаем временем доставки, разгрузки, оформления документов);

• дефицит товара не допустим (поэтому и затраты, связанные с дефицитом, в модели не рассматриваются);

• на складе не происходит систематического накопления или перерасхода запасов (как только объем запаса достигает нуля, происходит мгновенное пополнение запаса до максимального уровня Q, интервал между двумя поставками T постоянен).

График такой идеальной работы склада в форме зависимости величины запаса y от времени t имеет вид, показанный на рисунке 4.

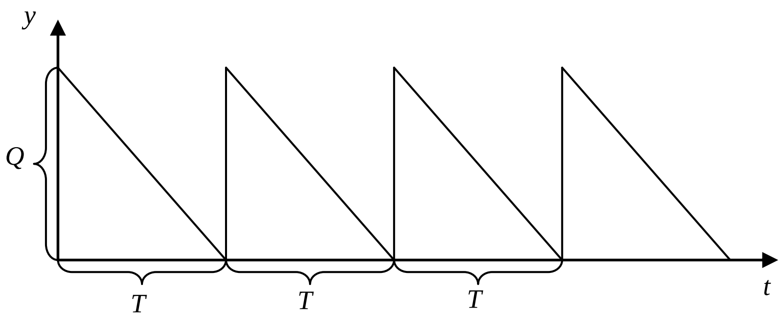

Рисунок 4 – **График идеальной работы склада**

Известными считаются следующие параметры:

M – скорость расходования запаса со склада (ед. товара в единицу времени);

h – стоимость хранения на складе единицы запаса в единицу времени (денеж. ед. в единицу времени);

K – стоимость организации заказа одной партии товара (денеж. ед.).

Требуется найти оптимальный объем заказываемой партии (Q^*), при котором суммарные затраты на хранение и организацию заказов товара были бы минимальными. Также при этом определяется оптимальный интервал времени между поставками товара (T^*).

Затраты на хранение зависят от времени хранения, а затраты на организацию заказов зависят от количества поставок. Чтобы можно было их сравнивать, нужно привести их к одной единице измерения.

Поэтому в качестве *критерия оптимальности* в данной модели будем рассматривать общие затраты склада в единицу времени (определение критерия оптимальности дано в разделе 1.2).

Общие затраты в единицу времени Z – это сумма затрат на хранение в единицу времени Z_1 и затрат на организацию заказов в единицу времени Z_2: $Z = Z_1 + Z_2$.

Очевидно, что если увеличивать объем партии товара, то затраты на хранение в единицу времени Z_1 будут расти, поскольку в каждый момент времени на складе находится больший объем товара. Причем, как будет показано ниже, эта зависимость является линейной. Она показана на рисунке 5 в виде прямой Z_1.

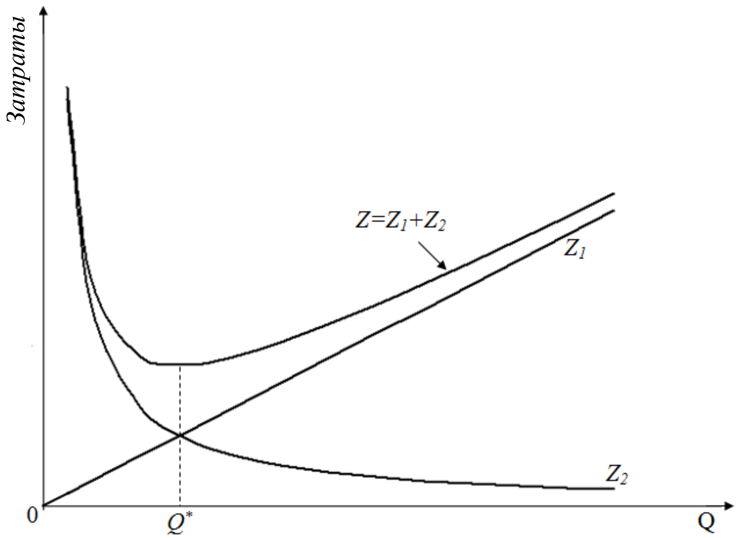

Рисунок 5 – **Зависимость затрат в единицу времени от объема партии**

Затраты на организацию заказов в единицу времени Z_2 при увеличении объема партии будут уменьшаться, поскольку нужно реже завозить товар. При этом зависимость затрат на организацию заказов в единицу времени от объема партии товара выражается обратной функцией. На рисунке 5 она показана в виде кривой Z_2.

Суммарные затраты в единицу времени Z могут быть получены как сумма графиков Z_1 и Z_2. На рисунке видно, что функция Z имеет минимум в той точке, где пересекаются графики функций Z_1 и Z_2. Эта точка соответствует оптимальному объему партии товара.

Выведем формулу расчета этого оптимального объема.

Средний уровень запаса за интервал времени T равен $\frac{Q}{2}$, а затраты на хранение за интервал времени T равны $hT\frac{Q}{2}$. Разделив эту величину на интервал времени T, получим затраты на хранение в единицу времени:

$$Z_1 = h\frac{Q}{2}. \tag{5}$$

Чтобы определить затраты на заказ товара в единицу времени, нужно разделить стоимость заказа одной партии (K) на время (T), в течение которого хватает этого запаса:

$$Z_2 = \frac{K}{T}. \tag{6}$$

Учитывая, что за время T полностью израсходуется вся доставленная партия товара Q, а скорость расходования товара со склада известна и равна M, можно записать равенство $T = \frac{Q}{M}$. Подставив это выражение в формулу (6), получим:

$$Z_2 = \frac{KM}{Q}. \tag{7}$$

Оптимальный объем партии товара (Q^*) соответствует точке, в которой равны затраты на хранение и заказ в единицу времени. Таким образом, его можно найти из соотношения

$$Z_1 = Z_2 \quad \text{или} \quad h\frac{Q^*}{2} = \frac{KM}{Q^*}.$$

Выразив из этого соотношения Q^*, получим:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KM}{h}}. \tag{8}$$

Формула (8) называется *формулой Уилсона* и дает возможность рассчитать оптимальный объем партии товара для идеального склада.

Если объем партии товара будет больше, чем рассчитанный по формуле Уилсона оптимальный объем, то возрастут издержки на хранение в единицу времени. И хотя издержки на организацию заказов уменьшатся, общие издержки склада возрастут.

Если взять объем партии меньше, чем оптимальный, то общие издержки возрастут за счет издержек на организацию заказов.

Пример 2. На склад доставляют цемент на барже по 1 000 т. В сутки со склада потребители забирают 50 т цемента. Накладные расходы по организации доставки партии цемента равны 2 тыс. р. Издержки хранения 1 т цемента в течение суток равны 0,1 р. Требуется определить следующее:

- период поставки и среднесуточные общие издержки склада на организацию поставки и хранение цемента;
- какой должна быть вместимость баржи, чтобы общие среднесуточные издержки склада были минимальны.

Решение. По условию задачи можно записать следующие значения параметров задачи:

- Q = 1 000 т цемента (объем фактической партии поставки);
- M = 50 т цемента в сутки (скорость расходования запаса со склада);
- K = 2 000 р. (стоимость организации доставки одной партии);
- h = 0,1 р. в сутки (стоимость хранения 1 т цемента в течение суток).

При доставке партиями по 1 000 т цемента интервал между поставками равен

$$T = \frac{Q}{M} = \frac{1000}{50} = 20 \text{ дням.}$$

Среднесуточные издержки склада на хранение по формуле (5) составят

$$Z_1 = h\frac{Q}{2} = 0{,}1 \cdot \frac{1000}{2} = 50 \text{ р.}$$

Среднесуточные издержки склада на организацию и реализацию заказа партии товара по формуле (7) составят

$$Z_2 = \frac{KM}{Q} = \frac{2\,000 \cdot 50}{1000} = 100 \text{ р.}$$

Тогда общие среднесуточные издержки склада при использовании партии в 1 000 т цемента будут равны

$$Z = Z_1 + Z_2 = 50 + 100 = 150 \text{ р.}$$

Рассчитаем оптимальный размер партии цемента по формуле Уилсона (8):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KM}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1\,414 \text{ т цемента.}$$

При таком объеме партии следует завозить цемент на склад каждые

$$T^* = \frac{Q^*}{M} = \frac{1\,414}{50} = 28{,}3 \text{ дня.}$$

Среднесуточные издержки склада на хранение в оптимальном режиме составят

$$Z_1^* = h\frac{Q^*}{2} = 0{,}1 \cdot \frac{1\,414}{2} = 70{,}7 \text{ р. в сутки.}$$

Среднесуточные издержки склада на организацию заказа партии товара в оптимальном режиме составят

$$Z_2^* = \frac{KM}{Q^*} = \frac{2\,000 \cdot 50}{1\,414} = 70{,}7 \text{ р. в сутки.}$$

Очевидно, что в оптимальном режиме среднесуточные издержки склада на хранение и организацию заказов равны.

Общие среднесуточные издержки склада при использовании оптимального размера партии цемента составляют

$$Z^* = Z_1^* + Z_2^* = 70{,}7 + 70{,}7 = 141{,}4 \text{ р. в сутки,}$$

что меньше соответствующего значения при размере партии в 1 000 т.

Фактический объем поставки меньше оптимального, поэтому поставки должны быть организованы чаще. Это ведет к увеличению среднесуточных издержек на организацию и реализацию заказа партии товара (см. Z_2 для обоих размеров партии). Таким образом, общие издержки склада возрастают именно за счет издержек на организацию заказов. Складу рекомендуется организовать поставки партиями по 1 414 т, если есть возможность использовать соответствующий размер баржи.

Тема 4. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

4.1. Основные понятия прогнозирования

Основная цель моделей прогнозирования состоит в том, чтобы сделать прогноз о развитии изучаемого процесса, т. е. предсказать значение некоторого экономического показателя в момент времени, относящийся к будущему. Прогноз является исходной информацией для принятия управленческих решений при планировании работы промышленных и торговых организаций.

Прогноз – это научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем.

В качестве объекта прогнозирования могут выступать процессы, явления, события, на которые направлена познавательная и практическая деятельность человека. При этом поведение объекта должно зависеть от некоторых случайных факторов, т. е. оно не может быть рассчитано однозначно. Например, доход в абсолютных денежных единицах, получаемый от вложения некоторой суммы в банк под фиксированный процент, не может являться объектом прогнозирования, так как он может быть однозначно рассчитан. Однако реальная покупательная способность получаемой суммы зависит от некоторых случайных внешних факторов (например, инфляции). Поэтому эту величину можно рассматривать как объект прогнозирования.

Наиболее характерной для торговли задачей прогнозирования является оценка потребительского спроса в будущем. Результаты решения этой задачи используются при планировании товарооборота и формировании торгового заказа. В практике управления торговлей возникает необходимость прогнозирования и других показателей (прибыли, издержек обращения, производительности труда и др.).

В основе большинства используемых методов прогнозирования лежит анализ временных рядов.

Временным рядом называется набор значений некоторого экономического показателя $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n$, которые наблюдались в моменты времени соответственно $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n$ в прошлом. Обычно интервал между этими моментами времени фиксирован. Необходимо предсказать значение этого показателя для момента времени, относящегося к будущему (y_{n+1} – ?).

Примером временного ряда являются данные об объемах продаж некоторого товара за первую, вторую и т. д. неделю от начала его реализации (всего прошло от начала реализации 12 недель). На основе этих данных следует предсказать объем продаж товара на 13 неделю.

При таком подходе предполагается, что прогнозируемый показатель формируется под воздействием большого количества факторов, выделить которые либо невозможно, либо по ним отсутствует информация. Поэтому процесс изменения показателя связывают не с факторами, а с течением времени.

Наиболее распространенным методом прогнозирования является метод экстраполяции.

Экстраполяцией называется метод продления на будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом. Математически тенденция (закономерность развития) выражается в виде функции тренда.

Функция тренда $(\tilde{y}(t))$ – это некоторая функция от времени, приближенно описывающая основную закономерность поведения исследуемого показателя.

Таким образом, экстраполяция заключается в том, что прогноз получают путем подстановки в функцию тренда значения момента времени, относящегося к будущему.

Для корректного применения метода экстраполяции требуется соблюдение двух условий:

- временной ряд экономического показателя должен действительно иметь тренд, т. е. преобладающую тенденцию;
- общие условия, определявшие развитие показателя в прошлом, останутся без существенных изменений и в будущем.

На любой экономический показатель действует множество факторов. Некоторые из них определяют основную закономерность развития показателя, т. е. тренд. Другие факторы являются случайными и дают отклонение от основной тенденции в ту или другую сторону. Например, если спрос на какой-либо товар со временем растет, то это объясняется многими факторами, к основным из которых относятся:

- рост благосостояния населения;
- улучшение качества товара;
- действие рекламы и т. д.

Все вместе эти факторы дают тенденцию роста спроса на товар. Однако существуют и случайные колебания спроса, вызываемые такими факторами, как временный финансовый кризис перед зарплатой, появление конкурента, плохая погода для выносной торговли и т. д. При использовании метода экстраполяции предполагается, что действие основных факторов в будущем не прекратится.

4.2. Этапы прогнозирования на основе трендовых моделей

Можно выделить следующие основные этапы прогнозирования на основе трендовых моделей:

1. ***Предварительный анализ данных временного ряда.*** Целью данного этапа является предварительный выбор функции тренда для

конкретного временного ряда. Наиболее часто в экономике используются полиномиальные и экспоненциальные трендовые модели.

Функции некоторых трендовых моделей приведены в таблице 4.

Таблица 4 – **Функции тренда, наиболее часто применяемые в экономике**

Название трендовой модели	Функция тренда
Линейная	$\tilde{y}(t) = a_1 t + a_0$
Полиномиальная (второй степени)	$\tilde{y}(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$
Экспоненциальная	$\tilde{y}(t) = ab^t$ или $\tilde{y}(t) = ae^{mt}$, где $b = e^m$
Примечание – В этих уравнениях a_2, a_1, a_0, a, b и m – *параметры тренда*, т. е. некоторые числа, которые имеют для каждого ряда свое конкретное значение.	

Выбор функции тренда для конкретного объекта прогнозирования чаще всего осуществляется по виду графика фактических значений временного ряда. Существуют также и другие, более формальные методы подбора тренда (например, метод конечных разностей).

2. ***Численная оценка параметров моделей.*** Для выбранной функции тренда необходимо рассчитать ее параметры так, чтобы график функции тренда прошел как можно ближе к фактическим данным.

Параметры трендовой модели определяются с помощью *метода наименьших квадратов*. Суть его заключается в том, что параметры тренда подбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений между фактическими и теоретическими значениями показателя была наименьшей:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \tilde{y}(t_i)]^2 \to \min,$$

где y_i – фактическое значение показателя в момент времени t_i;

$\tilde{y}(t_i)$ – теоретическое значение показателя в момент времени t_i (т. е. рассчитанное с помощью функции тренда).

На рисунке 6 показан пример фактических данных (значения y_1, y_2, y_3, y_4) и теоретических значений, рассчитанных по линейной трендовой модели (значения $\tilde{y}(t_1)$, $\tilde{y}(t_2)$, $\tilde{y}(t_3)$, $\tilde{y}(t_4)$). Считается, что отклонение фактического значения показателя от расчетного $(y_i - \tilde{y}(t_i))$ определяется случайными факторами. При этом график линейного тренда построен таким образом, чтобы сумма квадратов этих отклонений была наименьшей, т. е. тренд проходил как можно ближе ко всем фактическим данным в совокупности.

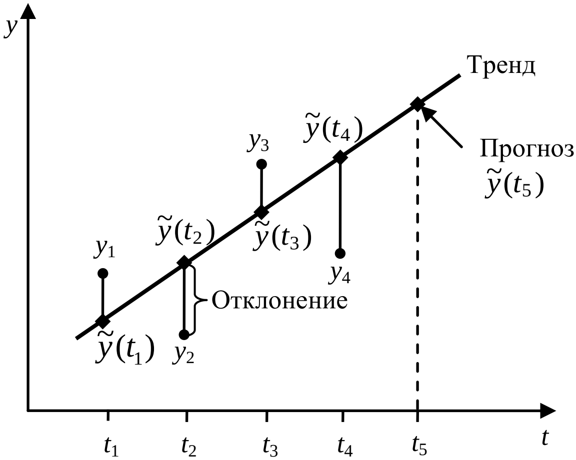

Рисунок 6 – **Пример отклонения линейного тренда от фактических данных**

3. ***Оценка точности моделей.*** Для любого временного ряда обычно подбирают несколько трендовых моделей (например, линейную и экспоненциальную), и для каждой модели находят параметры уравнения тренда. Затем нужно сравнить модели и определить, которая из них является более точной. Под точностью понимают степень отклонения рассчитанных по тренду значений от фактических данных временного ряда.

Показателем точности модели является *коэффициент детерминации* (R^2):

$$R^2 = 1 - \varphi^2,$$

где

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2},$$

где $\bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ – среднее значение фактических значений показателя.

Числитель величины φ^2 есть та величина, которая была минимизирована методом наименьших квадратов. Чем она меньше, тем ближе проходит тренд к фактическим данным и тем выше коэффициент детерминации. Поэтому более точной считается та модель, коэффициент детерминации которой больше.

Величина коэффициента детерминации всегда заключена в пределах

$$0 \le R^2 \le 1.$$

На практике модель считается достаточно точной, если коэффициент детерминации $R^2 \ge 0{,}9$. По коэффициенту детерминации сравнивают модели и выбирают наиболее точную из них, по которой и выполняется прогноз.

4. ***Выполнение прогноза.*** Когда выбрана функция тренда и известны ее параметры, прогноз выполняется путем подстановки значения будущего момента времени в эту функцию тренда. Например, для линейной модели

$$\tilde{y}_{n+1} = a_1 t_{n+1} + a_0;$$
$$\tilde{y}_{n+2} = a_1 t_{n+2} + a_0$$

и т. д.

Тема 5. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Модели межотраслевого баланса (МОБ) используются для анализа и планирования обмена продукцией между отраслями народного хозяйства.

В модели межотраслевого баланса рассматривается система, которая состоит из нескольких экономических объектов, называемых отраслями. Например, все народное хозяйство может быть представлено в виде системы трех отраслей – промышленности, сельского хозяйства и сферы услуг. Сельское хозяйство можно представить как совокупность растениеводства и животноводства, аналогичным образом можно выделить различные отрасли в составе промышленности и т. д. Каждая отрасль выпускает продукцию, часть которой потребляется другими отраслями, а другая часть выводится за пределы системы в качестве ее конечного результата. Таким образом, каждая отрасль рассматривается одновременно и как производящая, и как потребляющая. Баланс производимой продукции представляется в виде таблицы 5.

Таблица 5 – **Общая схема межотраслевого баланса**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция	Валовая продукция
	1-я	2-я	…	n-я		
1-я	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2-я	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n-я	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n

Валовой продукцией отрасли называется вся произведенная этой отраслью продукция. Обозначим ее X_1, X_2, …, X_n.

Промежуточную продукцию потребляют все отрасли для нужд своего производства. Обозначим объем продукции, произведенной в i-ой отрасли и потребленной в j-ой отрасли, как x_{ij}. Например, x_{21} – количество продукции второй производящей отрасли, которое потребила первая отрасль. Таким образом, продукция второй отрасли явилась ресурсом для первой.

Конечной продукцией отрасли называется та часть произведенной ею продукции, которая выходит за пределы системы отраслей (на внешнее потребление, на рынок, в другие системы). Обозначим ее Y_1, Y_2, …, Y_n.

Если рассмотреть схему МОБ по строкам, то становится очевидно, что для каждой производящей отрасли ее валовая продукция равна сумме промежуточной и конечной продукции. Так, например, для первой производящей отрасли можно записать следующее:

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + Y_1 = \sum_{j=1}^{n} x_{1j} + Y_1.$$

Для любой производящей отрасли справедливо равенство

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \qquad (i = \overline{1,n}). \tag{9}$$

Произведенная продукция

Потребление продукции

Одной из основных задач балансовых моделей является определение объемов валовой продукции каждой отрасли на новый планируемый период $X_i^{пл}$ при заранее заданных (запланированных) объемах конечной продукции $Y_i^{пл}$ с учетом установившихся пропорций взаимного потребления продукции отраслями.

Величина

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (i, j = \overline{1, n}) \tag{10}$$

называется *коэффициентом прямых материальных затрат* и показывает, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо для производства единицы продукции в j-ой отрасли.

В моделях межотраслевого баланса принимается допущение (упрощение реальной действительности), что величины a_{ij} постоянны
(т. е. одинаковы как в отчетном, так и в планируемом периоде). Поэтому коэффициенты прямых материальных затрат рассчитываются по отчетным данным, а затем используются для определения неизвестных величин в планируемом периоде.

Из равенства (10) можно записать выражение $x_{ij} = a_{ij} X_j$. Подставим его в систему уравнений (9) и получим:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{11}$$

Соотношение (11) называется *экономико-математической моделью межотраслевого баланса*, или *моделью Леонтьева*. На основе этой модели можно найти объемы валовой продукции, зная запланированные объемы конечной продукции (а также решать и другие задачи).

Пример 3. Пусть за отчетный период (январь) имеется двухотраслевой баланс продукции (таблица 6).

Таблица 6 – **Пример межотраслевого баланса**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция (Y_i)	Валовая продукция (X_i)
	1-я	2-я		
1-я	20	90	90	200
2-я	80	60	160	300

На планируемый период (февраль) заданы объемы конечной продукции: $Y_1^{пл} = 108$ и $Y_2^{пл} = 192$.

Требуется найти объемы валовой продукции каждой отрасли на планируемый период ($X_1^{пл}$ и $X_2^{пл}$), которые обеспечат заданный выпуск конечной продукции.

Решение. Поясним еще раз смысл данных в условии величин. Первая отрасль произвела 200 ед. продукции. Из них 90 ед. (конечная продукция первой отрасли) вышло за пределы системы (например, было продано на рынке). Число 90, которое стоит на пересечении первой строки и второго столбца, означает то количество продукции первой отрасли, которое она отдала второй отрасли на переработку, а число 20 – это количество продукции первой отрасли, которое она переработала сама (например, ее продукцией является электроэнергия, которую она сама потребляет наравне с другими отраслями). Таким образом, для первой производящей отрасли можно записать следующее условие баланса: 200 = 20 + 90 + 90.

Вторая отрасль произвела 300 ед. продукции, 160 из которых было продано на рынке, 80 отдано на переработку первой отрасли, а 60 ед. своей продукции вторая отрасль переработала сама (300 = 80 + 60 + 160).

Найдем коэффициенты прямых материальных затрат по формуле (10):

$$a_{11} = \frac{20}{200} = 0{,}1; \quad a_{12} = \frac{90}{300} = 0{,}3;$$

$$a_{21} = \frac{80}{200} = 0{,}4; \quad a_{22} = \frac{60}{300} = 0{,}2.$$

Для расчета этих коэффициентов весь первый столбец (т. е. то, что потребляла первая отрасль) делится на объем валовой продукции, произведенный этой первой отраслью. А весь второй столбец делится на объем валовой продукции второй отрасли.

Рассмотрим смысл этих коэффициентов на следующем примере: $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{90}{300}$. Промежуточная продукция (x_{12} = 90) есть количество продукции, произведенной первой отраслью и отданной на потребление во вторую отрасль. Вторая отрасль эту продукцию переработала и произвела 300 ед. своей продукции. Отношение этих величин показывает норму расхода продукции первой отрасли на производство единицы продукции второй отрасли.

Аналогично можно провести рассуждение для всех коэффициентов a_{ij}.

Составим систему уравнений на основе модели Леонтьева (11):

$$\begin{cases} X_1 = 0{,}1X_1 + 0{,}3X_2 + Y_1 \\ X_2 = 0{,}4X_1 + 0{,}2X_2 + Y_2 \end{cases}.$$

Подставим вместо Y_i запланированные объемы конечной продукции и найдем соответствующие объемы валовой продукции, решив следующую систему:

$$\begin{cases} X_1^{пл} = 0{,}1X_1^{пл} + 0{,}3X_2^{пл} + 108 \\ X_2^{пл} = 0{,}4X_1^{пл} + 0{,}2X_2^{пл} + 192 \end{cases}.$$

Получим $X_1^{пл}$ = 240, $X_2^{пл}$ = 360.

Итак, для обеспечения заданного выпуска конечной продукции в плановом периоде (феврале) $Y_1^{пл}$ = 108 и $Y_2^{пл}$ = 192 следует произвести валовой продукции в первой отрасли $X_1^{пл}$ = 240 ед., а во второй отрасли – $X_2^{пл}$= 360 ед.

Восстановим теперь весь межотраслевой баланс для февраля (найдем объемы промежуточной продукции) с помощью формулы $x_{ij} = a_{ij} X_j$:

$$x_{11} = 0{,}1 \cdot 240 = 24; \qquad x_{12} = 0{,}3 \cdot 360 = 108;$$
$$x_{21} = 0{,}4 \cdot 240 = 96; \qquad x_{22} = 0{,}2 \cdot 360 = 72.$$

Следовательно, в феврале будем иметь межотраслевой баланс, показанный в таблице 7.

Таблица 7 – **Плановый межотраслевой баланс на февраль**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция (Y_i)	Валовая продукция (X_i)
	1-я	2-я		
1-я	24	108	108	240
2-я	96	72	192	360

В реальной практике планирования при расчете объемов валовой продукции требуется учитывать ограничения на используемые внешние ресурсы:

- производственные фонды (основные, оборотные, заработная плата);
- трудовые ресурсы;
- природные ресурсы (лес, вода и т. д.);
- продукцию внешних систем (например, импорт).

Расход внешних дефицитных ресурсов указывается в дополнительных строках межотраслевого баланса и обозначается r_{ij} $(i = \overline{1,m},$

$j=\overline{1,n}$), где m – количество видов ресурсов, n – количество отраслей (таблица 8).

Таблица 8 – **Межотраслевой баланс с учетом внешних дефицитных ресурсов**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечная продукция	Валовая продукция
	1-я	2-я	…	n-я		
1-я	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	Y_1	X_1
2-я	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n-я	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	Y_n	X_n
Ресурсы						
1-й	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}	–	–
2-й	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}	–	–
…	…	…	…	…	–	–
m-й	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}	–	–

Величина r_{ij} показывает, какое количество i-го дефицитного ресурса было затрачено для производства всей валовой продукции в j-ой отрасли.

Величина

$$b_{ij}=\frac{r_{ij}}{X_j} \quad (i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}) \tag{12}$$

называется *коэффициентом прямых затрат ресурсов* и показывает, какое количество i-го внешнего дефицитного ресурса необходимо для производства единицы валовой продукции в j-ой отрасли.

В моделях межотраслевого баланса принимается допущение, что величины b_{ij} постоянны (т. е. одинаковы как в отчетном, так и в планируемом периоде). Поэтому коэффициенты прямых затрат ресурсов рассчитываются по отчетным данным, а затем используются для определения количества ресурсов, которое понадобится в плановом периоде:

$$R_i^{пл}=b_{i1}X_1^{пл}+b_{i2}X_2^{пл}+\ldots+b_{in}X_n^{пл} \quad (i=\overline{1,m}). \tag{13}$$

Найденное количество требуемых ресурсов нужно сравнить с известным выделенным объемом ресурсов. Если выполняется неравенство

$$R_i^{пл}\le R_i^{выд} \quad (i=\overline{1,m}), \tag{14}$$

то ресурсов достаточно и план реализуем. В противном случае необходимо либо изыскать дополнительные ресурсы, либо сократить план производства конечной продукции (следовательно, сократится и план валовой продукции). При сокращении плана конечной продукции следует учитывать, что должно обеспечиваться *расширенное производство продукции* в отраслях. Это означает, что план конечной продукции по каждой отрасли должен быть выше, чем отчетная конечная продукция.

Пример 4. В межотраслевом балансе за январь (пример 3) известны расходы трех видов ресурсов в отчетном периоде, т. е. межотраслевой баланс с учетом внешних дефицитных ресурсов может быть представлен в виде, показанном в таблице 9.

Таблица 9 – **Межотраслевой баланс за январь с учетом внешних дефицитных ресурсов**

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечная продукция	Валовая продукция
	1-я	2-я		
1-я	20	90	90	200
2-я	80	60	160	300
Ресурсы				
Затраты труда	30	120	–	–
Затраты леса	60	120	–	–
Производственные фонды	360	240	–	–

Всего за отчетный период было потреблено:

- трудовых ресурсов $R_1 = 30 + 120 = 150$;
- леса $R_2 = 60 + 120 = 180$;
- производственных фондов $R_3 = 360 + 240 = 600$.

Пусть на февраль было выделено:

- трудовых ресурсов $R_1^{выд} = 170$;
- леса $R_2^{выд} = 250$;
- производственных фондов $R_3^{выд} = 800$.

Необходимо выяснить, достаточно ли этих ресурсов для реализации плана конечной продукции на февраль $Y_1^{пл} = 108$ и $Y_2^{пл} = 192$.

Решение. Поясним исходные данные по внешним ресурсам. Из отчетного баланса очевидно, что первая отрасль потребила 30 ед.

трудовых ресурсов, 60 ед. леса и 360 ед. производственных фондов. При этом ею было произведено 200 ед. валовой продукции. Вторая отрасль потребила 120 ед. трудовых ресурсов, 120 ед. леса и 240 ед. производственных фондов, причем все это пошло на производство 300 ед. валовой продукции.

Найдем коэффициенты прямых затрат ресурсов по формуле (12):

$$b_{11} = \frac{30}{200} = 0{,}15; \quad b_{12} = \frac{120}{300} = 0{,}4;$$

$$b_{21} = \frac{60}{200} = 0{,}3; \quad b_{22} = \frac{120}{300} = 0{,}4;$$

$$b_{31} = \frac{360}{200} = 1{,}8; \quad b_{32} = \frac{240}{300} = 0{,}8.$$

Аналогично расчетам коэффициентов прямых материальных затрат весь первый столбец баланса из таблицы 8 (т. е. потребление внешних ресурсов первой отраслью) разделен на объем валовой продукции первой отрасли. Весь второй столбец разделен на объем валовой продукции второй отрасли. Таким образом получаем расход внешних ресурсов каждого вида на производство единицы продукции в отраслях.

Для указанного плана конечной продукции в примере 3 уже был найден требуемый объем производства валовой продукции:

$$X_1^{пл} = 240, \; X_2^{пл} = 360.$$

Найдем требуемое для этого количество внешних ресурсов по формуле (13):

$$R_1^{пл} = 0{,}15 \cdot 240 + 0{,}4 \cdot 360 = 180;$$

$$R_2^{пл} = 0{,}3 \cdot 240 + 0{,}4 \cdot 360 = 216;$$

$$R_3^{пл} = 1{,}8 \cdot 240 + 0{,}8 \cdot 360 = 720.$$

Условие формулы (14) не выполняется для трудовых ресурсов (180 > 170), поэтому план выпуска конечной продукции должен быть уменьшен. Для обеспечения расширенного воспроизводства продукции этот план должен удовлетворять следующим условиям:

$$90 < Y_1^{пл} < 108;$$

$$160 < Y_2^{пл} < 192.$$

Тема 6. МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы массового обслуживания (СМО) представляют собой системы, в которых возникают массовые запросы на выполнение каких-либо услуг, а также происходит удовлетворение этих запросов.

Система массового обслуживания – это система, предназначенная для обслуживания потока заявок (требований) специальными каналами обслуживания (обслуживающими устройствами).

Примеры заявок: покупатели, приходящие в магазин; клиенты в парикмахерской; телефонные вызовы в сети; бытовая техника, поступающая на ремонт в мастерскую, и т. д. Примеры каналов обслуживания: продавец в магазине, кассир за кассой, мастер по ремонту бытовой техники, парикмахер и т. д.

Заявки поступают в систему в заранее неизвестные, случайные моменты времени. Время обслуживания каждой заявки также является случайной величиной и зависит от многих факторов (например, от характера поломки бытового прибора зависит время его ремонта, от запросов и возраста покупателя – время его обслуживания продавцом и т. д.).

Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания обуславливает неравномерность загрузки системы: на входе могут накапливаться ожидающие обслуживания заявки и образуется очередь, либо заявок нет и каналы простаивают.

Структура СМО показана схематически на рисунке 7.

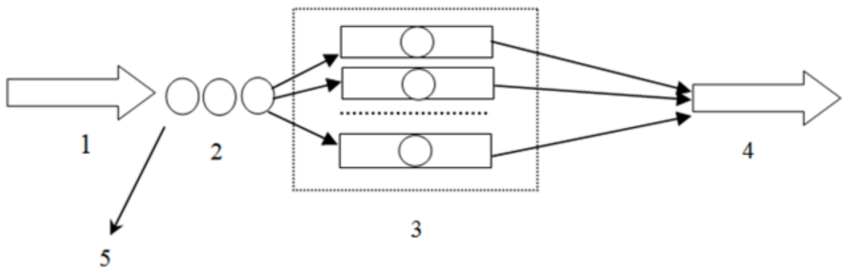

Рисунок 7 – **Структура системы массового обслуживания:** 1 – входящий поток заявок; 2 – очередь; 3 – каналы обслуживания; 4 – выходящий поток обслуженных заявок; 5 – заявки, получившие отказ в обслуживании

Целью теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО. Например, требуется определить рациональное число каналов обслуживания, при которых, с одной стороны, не возникает бесконечных очередей и время ожидания в очереди является приемлемой величиной, а с другой, – нет значительных простоев каналов, поскольку организация каждого канала связана с материальными затратами. Так, например, при организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек определенного профиля, численность продавцов, необходимые размеры торгового зала и другие параметры.

Существует несколько признаков классификации СМО:

1. ***По числу каналов обслуживания*** различают *одноканальные*, *многоканальные* и *многофазные СМО*. Если каналы выполняют параллельную обработку сразу нескольких заявок, то система называется многоканальной (кассовые аппараты в магазине самообслуживания). В многофазной системе процесс обслуживания заявки состоит из нескольких этапов, выполняемых последовательно друг за другом на различных каналах обслуживания (партия изделий последовательно обрабатывается в ряде цехов).

2. ***По правилам обслуживания*** различают три класса СМО:

• *СМО с отказами* – если нет свободных каналов, заявка покидает систему. Например, если занята телефонная линия и в трубке раздаются короткие гудки, то абонент получает отказ в обслуживании, т. е. кладет трубку.

• *СМО с ожиданием* – если нет свободных каналов, заявка ожидает в очереди (это обычные очереди в магазине, поликлинике).

• *СМО с ограниченной длиной очереди* – число мест для ожидания в очереди ограничено. Отказ в обслуживании происходит, если все каналы заняты и нет мест в очереди. Например, в автосервисе имеется определенное число мест для парковки ожидающих машин. Если все эти места заняты, то очередной приехавший автомобиль получает отказ в обслуживании.

3. ***По дисциплине очереди*** (способу отбора заявок из очереди на обслуживание) различают:

• *Очередь FIFO* (First In – First Out, т. е. первый пришел – первый обслужен).

• *Очередь LIFO* (Last In – First Out, т. е. последний пришел – первый обслужен).

• *Очередь с приоритетом*. Некоторые заявки на основании каких-то признаков получают преимущество (приоритет) в выборе на обслуживание перед другими. Например, ветераны и участники войны в поликлинике пропускаются в первую очередь.

4. ***По характеру входящего потока заявок*** различают:

• *Замкнутые СМО,* в которых обслуженная заявка через какой-то промежуток времени вновь возвращается в систему (отремонтированный станок в цеху опять ломается, посуда в общественной столовой опять загрязняется и т. д.).

• *Разомкнутые* (*открытые*) *СМО,* в которых входящий поток заявок не зависит от выходящего и ничем не ограничивается (заявки поступают в систему извне от некоторого бесконечного источника заявок).

В настоящее время теоретически наиболее исследованы системы массового обслуживания, которые называются простейшими. *Простейшей системой массового обслуживания* называется такая система, в которой:

• входящий поток заявок является простейшим (пуассоновским);

• время обслуживания заявки каждым каналом имеет экспоненциальный закон распределения.

Простейший (*пуассоновский*) *входящий поток заявок* обладает тремя основными свойствами. Рассмотрим их:

• *Ординарность*, которая означает, что практически невозможно одновременное поступление двух и более заявок (невозможен одновременный выход из строя двух станков, одновременный приход двух покупателей и т. д.).

• *Стационарность*, означающая, что среднее число заявок, поступающих в единицу времени, постоянно. Таким образом, хотя заявки и поступают в случайные моменты времени, в среднем поток является равномерным. Обозначим буквой λ среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени (например, среднее число телевизоров, поступающих в мастерскую по ремонту за день).

• *Отсутствие последействия*, которое означает, что количество заявок, уже поступивших в систему, не определяет того, сколько заявок поступит далее (например, если произошел обрыв нити на ткацком станке, то это не означает, что его не будет в следующий момент времени, и, тем более, что его не будет на других станках).

Экспоненциальный закон времени обслуживания заявок имеет параметр μ, который обозначает среднее число заявок, которое может обслужить один канал за единицу времени. Например, μ – это среднее число телевизоров, которые может отремонтировать один мастер за день. Величина μ обратно пропорциональна среднему времени обслуживания одной заявки $T_{об}$:

$$\mu = \frac{1}{T_{об}}.$$

Для простейшей системы массового обслуживания всегда рассчитывается величина

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Если рассматривается система с ожиданием в очереди, причем размер очереди не ограничен, то α означает среднее число каналов, которые необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие заявки.

Пусть n – число действительно имеющихся в системе каналов обслуживания (например, число мастеров в телеателье). Тогда условием работоспособности простейшей СМО с ожиданием является выполнение соотношения

$$\alpha < n.$$

Если это условие не выполняется, то каналы не будут справляться с обслуживанием всех заявок: очередь будет расти бесконечно, и система просто захлебнется в потоке заявок.

При оценке качества работы СМО рассчитывается ряд *показателей эффективности работы системы*:

- среднее время ожидания в очереди;
- средняя длина очереди;
- вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (не получит отказ);
- среднее число занятых обслуживанием каналов;
- среднее число заявок, которые обслуживаются системой за единицу времени (интенсивность выходящего потока обслуженных заявок);
- и др.

По совокупности значений этих показателей можно судить о том, насколько эффективно организована работа системы. Величина средней длины очереди важна также для расчета площадей торговых залов или складских помещений (например, предназначенных для хранения бытовых приборов, ожидающих ремонта).

Тема 7. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

7.1. Основные понятия теории игр

Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации, реализующейся в условиях неопределенности.

Например, при определении объема выпуска продукции в одной организации нельзя не учитывать размеров выпуска аналогичной продукции в других организациях. Каждая из конкурирующих организаций преследует свои цели, поэтому имеет место конфликтная ситуация. Однако невозможно полностью контролировать деятельность конкурентов, можно только предполагать возможные варианты их действий. Поэтому решение приходится принимать в условиях неопределенности.

Исследованием конфликтных ситуаций занимается *теория игр*. В игре могут сталкиваться интересы двух (*игра парная*) или нескольких (*игра множественная*) противников; существуют игры с бесконечным множеством игроков.

По характеру выигрышей выделяют *игры с нулевой суммой* и *с ненулевой суммой*. В первых общий капитал игроков не изменяется, а лишь перераспределяется в ходе игры, поэтому сумма выигрышей равна нулю (проигрыш рассматривается как отрицательный выигрыш). В играх с ненулевой суммой сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при организации лотереи часть общего взноса участников не участвует в формировании призового фонда, а идет организатору лотереи.

Игры, в которых оба участника сознательно стремятся добиться для себя наилучшего результата, называются *стратегическими*. В экономической практике нередко приходится моделировать ситуации, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют *статистическими*, или *играми с природой*. Под термином «природа» понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решение (погодные условия, спрос на определенный товар, состояние валютной биржи и т. д.). Особенность игр с природой заключается в том, что решение достаточно найти только для сознательного игрока, поскольку природа наши рекомендации воспринять не может. Как правило, игры с природой решаются на основании различных критериев.

Рассмотрим стратегическую парную игру с нулевой суммой. Такая игра ведется по определенным правилам. Каждый участник игры имеет несколько вариантов возможных действий (чистых стратегий). Из них он выбирает такие варианты, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший результат (исход игры). *Исход игры* – это значение некоторой функции, называемой *функцией выигрыша*, или *платежной функцией*. Такая функция задается либо таблицей (платежная матрица), либо аналитическим выражением.

Пусть в игре участвуют два игрока: A и B. Игрок A имеет m чистых стратегий: A_1, A_2, …, A_m (они записываются как заголовки строк платежной матрицы); а игрок B – n чистых стратегий: B_1, B_2, …, B_n (они записываются как заголовки столбцов платежной матрицы). На пересечении строки и столбца платежной матрицы указывается величина a_{ij} – выигрыш игрока A (в то же время это проигрыш игрока B) в ситуации, когда игрок A выберет свою чистую стратегию A_i, а игрок B применит стратегию B_j.

Например, a_{12} – это величина выигрыша игрока A, если он выберет свою первую стратегию, а игрок B применит свою вторую стратегию. Если известны значения a_{ij} для всех пар чистых стратегий (A_i, B_j), то они образуют платежную матрицу размерности $m \times n$ (таблица 10).

Таблица 10 – **Платежная матрица игры**

Стратегии игрока B / Стратегии игрока A	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

7.2. Принцип минимакса

Пусть дана игра, заданная платежной матрицей размерности $m \times n$. Решить матричную игру означает определить наилучшую стратегию игрока A, а также наилучшую стратегию игрока B. Если рассматривается стратегическая игра, то предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы добиться своей цели. Поэтому каждый из игроков должен рассчитывать на то, что противник ответит самым неблагоприятным образом, т. е. должен быть пессимистом. Именно в расчете «на худший результат» и состоит *принцип минимакса*.

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока A. Выбирая стратегию A_i, игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на нее той из своих стратегий, для которой выигрыш игрока A будет минимальным. Поэтому для каждой стратегии A_i найдем

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \quad (i = \overline{1, m}),$$

где α_i – минимальный гарантированный выигрыш игрока *A* при применении им стратегии A_i.

Очевидно, что желающий перестраховаться игрок *A* должен предпочесть другим стратегиям ту, для которой гарантированный выигрыш α_i максимален. Тогда

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Величина α называется *нижней ценой игры*, или *максимином*. Соответствующая стратегия называется максиминной. Если игрок *A* будет придерживаться этой стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры при любом поведении игрока *B*.

Аналогично определим наилучшую стратегию игрока *B*. С его точки зрения, в платежной матрице записаны проигрыши. Выбирая худший результат для своей стратегии B_j, он должен найти максимальное значение проигрыша в соответствующем столбце:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n}).$$

Выбирать стратегию игроку *B* следует так, чтобы минимизировать величину проигрыша при любых действиях соперника, т. е. обеспечить

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Величина β называется *верхней ценой игры*, или *минимаксом*, а соответствующая ей чистая стратегия – минимаксной. Если игрок *B* будет придерживаться этой стратегии, то в любом случае он проиграет не больше верхней цены игры β.

Максимин никогда не превосходит минимакс, т. е. $\alpha \le \beta$.

Если нижняя цена игры равна верхней ($\alpha = \beta$), то говорят, что игра имеет *седловую точку* и чистую цену игры ($\gamma = \alpha = \beta$). Такая игра решается в чистых стратегиях, т. е. каждому игроку рекомендуется применять одну оптимальную стратегию (максиминную для *A* и минимаксную для *B*). Если же нижняя и верхняя цены игры не равны ($\alpha < \beta$), то игра в чистых стратегиях не решается. Ее можно решать в смешанных стратегиях, но только в том случае, когда игра повторяется многократно. Тогда каждый игрок может применять несколько стратегий с определенными частотами (например, в 40% случаев – стратегию A_2, а в 60% случаев – стратегию A_4).

Пример 5. В игре принимают участие два игрока. Платежная матрица игры имеет вид, показанный в таблице 11. Необходимо найти нижнюю и верхнюю цены игры и определить, решается ли эта игра в чистых стратегиях.

Таблица 11 – **Пример платежной матрицы игры**

Стратегии игрока B / Стратегии игрока A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	12	6
A_2	3	8	6	10
A_3	2	5	9	4

Решение. Величина $a_{23} = 6$ означает, что если игрок A применит стратегию A_2, а игрок B – стратегию B_3, то выигрыш игрока A составит 6 ед. (эта же величина является величиной проигрыша игрока B).

Добавим к матрице дополнительный столбец, в котором рассчитаем худший результат для каждой стратегии игрока A (минимум в строке). Также добавим дополнительную строку, в которой рассчитаем худший результат для каждой стратегии игрока B, т. е. максимум в столбце (таблица 12).

Таблица 12 – **Расчеты нижней и верхней цены игры для примера**

Стратегии игрока B / Стратегии игрока A	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	$\boxed{\mathbf{4}}$	7	12	6	**4**
A_2	3	8	6	10	3
A_3	2	5	9	4	2
β_j	**4**	8	12	10	–

Минимальный гарантированный выигрыш игрока A при применении им первой стратегии равен $\alpha_1 = \min\{4, 7, 12, 6\} = 4$. Аналогичные значения найдем для второй стратегии: $\alpha_2 = \min\{3, 8, 6, 10\} = 3$, и для третьей стратегии игрока A: $\alpha_3 = \min\{2, 5, 9, 4\} = 2$.

Нижняя цена игры (максимин) находится как максимальное значение из гарантированных для каждой стратегии выигрышей:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max\{4, 3, 2\} = 4.$$

Максиминной стратегией является стратегия A_1. Если игрок A будет придерживаться этой стратегии, то ему гарантирован выигрыш не менее 4 ед. при любом поведении игрока B.

Аналогично определим наилучшую стратегию игрока B. Для этого найдем максимальные проигрыши для каждой стратегии игрока B и запишем их в дополнительной строке матрицы.

Для игрока B значения элементов $\beta_j = \max_i a_{ij}$ составят соответственно $\beta_1 = \max\{4, 3, 2\} = 4$, $\beta_2 = \max\{7, 8, 5\} = 8$, $\beta_3 = \max\{12, 6, 9\} =$

$= 12$, $\beta_4 = \max\{6, 10, 4\} = 10$.

Верхняя цена игры определяется как наименьший гарантированный проигрыш игрока B:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min\{4, 8, 12, 10\} = 4.$$

Следовательно, минимаксной стратегией игрока B будет первая стратегия, гарантирующая ему проигрыш не более 4 ед.

Так как $\alpha = \beta$, то данная игра имеет седловую точку, она решается в чистых стратегиях. Таким образом, следует рекомендовать игроку A применять стратегию A_1, а игроку B – стратегию B_1.

Тема 8. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи математического программирования – это задачи определения наилучшего решения из множества допустимых.

В общем виде постановка задачи математического программирования состоит в определении значений переменных x_1, x_2, …, x_n, при которых достигается максимум или минимум функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min) \qquad (15)$$

при следующих условиях:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \{\le, =, \ge\} b_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \{\le, =, \ge\} b_2 \\ \qquad \ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases}. \qquad (16)$$

Функция (15) называется *целевой функцией*, а условия (16) – *огра-*

ничениями данной задачи. Запись $\{\leq, =, \geq\}$ в ограничениях означает, что возможен один из знаков $\leq$, = или $\geq$. В данной задаче n обозначает число переменных, а m – число ограничений.

Переменные задачи x_1, x_2, …, x_n могут иметь различный экономический смысл. Например, если организация выпускает три вида продукции и нужно найти оптимальный план производства, то x_1, x_2, x_3 – количество продукции каждого вида, которое необходимо производить. Если в задаче необходимо найти наилучший состав рациона, в который могут входить несколько компонентов (например, сено и силос в рационе коров), то x_1 и x_2 – количество каждого продукта, которое нужно включить в рацион (в данном случае сена и силоса).

Целевая функция в математическом виде выражает критерий оптимальности, т. е. служит для выбора наилучшего решения (см. тему 1). Если используется максимизируемый критерий оптимальности (например, прибыль от производства продукции), то целевая функция стремится к максимуму. Если же в качестве критерия оптимальности выступают затраты (например, на кормление коров), то целевая функция стремится к минимуму.

Система ограничений (16) вытекает из ограниченности материальных, трудовых ресурсов, технологических требований или же из здравого смысла. Например, для задачи планирования производства продукции ограничения вытекают из ограниченности в организации запаса материальных и трудовых ресурсов, используемых для производства этой продукции. В задаче составления рациона ограничения заключаются в необходимости того, чтобы рацион был полноценным (содержал питательные вещества, витамины и микроэлементы, необходимые для жизнедеятельности коров).

В зависимости от характера целевой функции f и функций ограничений φ_1, φ_2, …, φ_m говорят о различных видах задач математического программирования:

• Если целевая функция задачи имеет линейный вид, а ограничения заданы в виде линейных уравнений или неравенств, то это задача *линейного программирования*. Пример линейного выражения:

$$5x_1 + 6x_2.$$

• Если целевая функция и (или) ограничения содержат нелинейные функции, то это задача *нелинейного программирования*. Примеры нелинейных функций:

$$xy,\ x^2,\ \sqrt{x},\ \sin x,\ \frac{1}{x} \text{ и т. д.}$$

• Если содержательный смысл требует получения решения в целых числах, то такая задача является задачей *целочисленного программирования*. Например, выпуск штучной продукции, назначение работников на работы (нельзя назначить на работу не целое число работников).

• Если в задаче математического программирования необходимо учитывать фактор времени, то такая задача является задачей *динамического программирования*. Обычно решение задач динамического программирования может быть представлено как процесс пошагового принятия решений. На каждом шаге выбирается такое решение, которое не обязательно дает оптимальный результат на этом шаге, но обеспечивает наилучший исход всей операции в целом.

Наиболее разработанными являются методы решения задач линейного программирования. Начало линейной оптимизации было положено в 1939 г., когда вышла в свет работа профессора Ленинградского университета Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства».

В общем виде *задача линейного программирования* заключается в том, чтобы найти значения переменных x_1, x_2, …, x_n, доставляющие оптимальное значение целевой функции

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min\,(\max)$$

при выполнении ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\ \{\le, =, \ge\}\ b_m \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}) \end{cases}, \tag{17}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$;

m – число уравнений;

n – число переменных.

Ограничения $x_j \ge 0\ (j = \overline{1,n})$, с математической точки зрения, являются необязательными, но в моделях экономических задач они, как правило, всегда присутствуют. Это связано с экономическим смыслом переменных x_1, x_2, …, x_n. Например, если под x_j понимается количество продукции вида j, которое необходимо выпускать в организации, то очевидно, что оно не может быть отрицательным.

Ограничения (17) определяют область допустимых решений.

Набор значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при котором выполняются все ограничения, называется *допустимым решением*, или *планом*. Допустимое решение, при котором функция f принимает максимальное или минимальное значение, называется *оптимальным*.

Для решения задач линейного программирования необходимо составить математическую модель задачи. Составление модели удобно рассмотреть на примере.

Пример 6. Цех может выпускать два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. На каждый шкаф расходуется 3,5 м^2 стандартных древесно-стружечных плит (ДСП), 1 м^2 листового стекла и 1 чел.-день трудозатрат. На тумбу – 1 м^2 ДСП, 2 м^2 стекла и 1 чел.-день трудозатрат. Материальные и трудовые ресурсы ограничены: в цехе работает 150 рабочих, в день нельзя израсходовать больше 350 м^2 ДСП и более 240 м^2 стекла. Прибыль от продажи 1 шкафа составляет 200 усл. ед., а тумбы – 100 усл. ед.

Следует установить, какое количество шкафов и тумб должен выпускать цех, чтобы сделать прибыль максимальной.

Решение. Введем переменные, т. е. обозначим за x_j те величины, которые нужно найти в задаче. В данном случае это количество шкафов x_1 и количество тумб x_2, которые должен выпускать цех. Именно от них зависит прибыль цеха и расход ресурсов.

Прибыль от продажи одного шкафа равна 200 усл. ед., значит, прибыль от продажи x_1 шкафов будет равна $200x_1$. Прибыль, полученная от продажи тумб, составит $100x_2$. Целевая функция выражает прибыль, полученную от продажи всего выпущенного количества шкафов и тумб, и поэтому ее значение стремится к максимуму:

$$f = 200x_1 + 100x_2 \to \max.$$

Выпуск продукции ограничен количеством ресурсов, расходуемых за один день: ДСП, листовое стекло и трудозатраты.

На один шкаф расходуется 3,5 м^2 ДСП, а на одну тумбу – 1 м^2. Следовательно на x_1 шкафов будет израсходовано $3{,}5x_1$ м^2, а на все выпускаемые тумбы – $1x_2$ м^2. Всего расход ДСП составит $(3{,}5x_1 + x_2)$ м^2. Количество израсходованного ресурса не должно превышать его запас в организации, который равен 350 м^2. Поэтому можно записать следующее ограничение:

$$3{,}5x_1 + x_2 \le 350.$$

Аналогично записываются ограничения для других ресурсов. Расход стекла не должен превышать его запас:

$$x_1 + 2x_2 \le 240,$$

а использование трудовых ресурсов ограничено числом работающих в цехе рабочих:

$$x_1 + x_2 \le 150.$$

Количество выпущенной продукции не может быть величиной отрицательной, поэтому добавим еще одно ограничение:

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Таким образом, математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$f = 200x_1 + 100x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 \le 350 \\ x_1 + 2x_2 \le 240 \\ x_1 + x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Такая запись означает, что необходимо найти неотрицательные значения переменных x_1 и x_2, удовлетворяющие линейным неравенствам ограничений, при которых целевая функция этих переменных обращалась бы в максимум.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод. Автоматизировать решение этим методом можно с помощью надстройки *Поиск решения* пакета MS Excel. В случае двух переменных задача линейного программирования может быть решена графическим методом, для автоматизации которого используется пакет MathCad.

Тема 9. МОДЕЛИ АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

9.1. Дисконтирование денежных потоков

Рассмотрим процесс накопления денежных средств на примере банковских депозитов. Если по условию договора проценты выплачиваются непосредственно инвестору, а не прибавляются к исходной сумме вложения, то такой вариант называется размещением средств под *простой процент*. Если проценты прибавляются к исходной сумме в конце каждого периода времени (например, года), то такой метод начисления процентов называется *сложным процентом*. Далее будет рассматриваться только использование сложного процента.

Пусть начисление процентов (*капитализация*) выполняется в конце каждого года. Тогда в конце первого года наращенная сумма составит

$$S = P + Pr = P(1 + r),$$

где S – наращенная сумма;

P – начальный капитал, положенный в банк;

r – годовая процентная ставка банка.

Если эта сумма (S) остается в банке, то в конце следующего года наращенная сумма составит

$$S = \left[P(1 + r)\right](1 + r) = P(1 + r)^2.$$

В общем случае сумма, наращенная за n лет, рассчитывается по формуле

$$S = P(1 + r)^n. \qquad (18)$$

В течение года проценты могут начисляться несколько раз, тогда наращенная сумма будет увеличиваться. Время между двумя последовательными начислениями процента называется *периодом капитализации процента*.

Пусть по условию договора с банком годовая процентная ставка составляет r, а проценты капитализируются m раз в течение года. *Эффективной процентной ставкой банка для периода капитализации* называется процент, нарастающий в течение одного периода капитализации, который определяется по формуле

$$r_{кап} = \frac{r}{m}.$$

Если срок депозита составляет l периодов капитализации, то формулу (18) вычисления наращенной суммы можно обобщить следующим образом:

$$S = P(1 + r_{кап})^l. \qquad (19)$$

Пример 7. Номинальная годовая процентная ставка банка равна 15%, первоначальный капитал – 1 000 денеж. ед., срок депозита – 2 года. Следует определить наращенную сумму для двух случаев:

• проценты начисляются в конце года;

• проценты начисляются ежемесячно.

Решение. По условию r = 0,15, P = 1 000 денеж. ед., n = 2 года.

Если проценты начисляются ежегодно, используем формулу (18):

$$S = P(1+r)^n = 1\,000(1+0{,}15)^2 = 1\,322{,}5 \text{ денеж. ед.}$$

В случае ежемесячного начисления процентов m = 12. Рассчитаем сначала эффективную процентную ставку для периода капитализации (месяца):

$$r_{кап} = \frac{r}{m} = \frac{0{,}15}{12} = 0{,}0125.$$

Число периодов капитализации (l) равно 12 · 2 = 24. Используем общую формулу начисления сложного процента (19):

$$S = P(1+r_{кап})^l = 1\,000(1+0{,}0125)^{24} = 1\,347{,}351 \text{ денеж. ед.}$$

Таким образом, при более частом начислении процентов сумма нарастает быстрее, что более выгодно для вкладчика.

На основании формулы (19) можно также найти, какой начальный капитал нужно положить в банк, чтобы наращенная за l периодов капитализации сумма составила заданную величину S. Такой начальный капитал называется *текущей* (*приведенной*) *стоимостью* суммы S и обозначается PV:

$$PV = \frac{S}{(1+r_{кап})^l}. \qquad (20)$$

Процесс нахождения текущей стоимости называется *дисконтированием*.

Пример 8. Годовая процентная ставка банка составляет 12%. Необходимо установить, какую сумму нужно положить в банк, чтобы наращенная за пять лет сумма составила 1 000 денеж. ед. Следует рассмотреть два случая:

• проценты капитализируются в конце года;

• проценты капитализируются поквартально.

Решение. По условию r = 0,12, n = 5, S = 1 000. Для первого случая период капитализации равен одному году, поэтому $r_{кап} = r = 0{,}12$, число периодов капитализации равно числу лет: $l = n = 5$. Используя формулу (17), получаем:

$$PV = \frac{S}{(1 + r_{кап})^l} = \frac{1000}{(1 + 0{,}12)^5} = 567{,}431.$$

Для второго случая период капитализации равен одному кварталу (m = 4). Рассчитаем эффективную процентную ставку для квартала:

$$r_{кап} = \frac{r}{m} = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03.$$

Срок депозита выразим в кварталах: $l = nm = 5 \cdot 4 = 20$ кварталов. Тогда по формуле (17) получим следующее:

$$PV = \frac{S}{\left(1 + r_{кап}\right)^l} = \frac{1000}{\left(1 + 0{,}03\right)^{20}} = 553{,}68 \text{ денеж. ед.}$$

Это значение меньше соответствующего значения, рассчитанного для первого случая. Таким образом, если проценты начисляются чаще, то в банк можно положить меньшую сумму для достижения того же результата.

9.2. Анализ инвестиционных проектов

Под *инвестиционным проектом* понимается любое вложение денег, генерирующее денежные потоки в будущем. Примерами инвестиционных проектов могут служить закупка производственного оборудования, вложение денег в банк под процент, приобретение ценных бумаг.

Рассмотрим проект, в который необходимо вложить сумму I_0, генерирующий через n временных периодов (например, лет) прибыль C. Допустим, у инвестора имеется альтернатива – вложить деньги в проект или положить их на банковский депозит с годовой процентной ставкой r. Рассчитаем сумму, которую следует положить в банк, чтобы получить ту же сумму, которая ожидается в качестве прибыли проекта через n лет:

$$PV = \frac{C}{(1 + r)^n}. \qquad (21)$$

Эта величина называется *текущей* (*приведенной*) *стоимостью проекта* и показывает, каким должно быть альтернативное вложение средств, чтобы получить через n временных периодов ту же сумму, которую дает проект.

Процентная ставка r, используемая при дисконтировании денежных потоков проекта, называется *нормой дисконтирования*. В качестве этой величины можно брать процентную ставку банка только в том случае, когда риск, связанный с проектом, и риск, связанный с банковским депозитом, одинаков. Обычно это не так, и в качестве нормы дисконтирования берут внутреннюю норму прибыли альтернативных проектов с финансовым риском, соответствующим риску данного проекта.

Чистая текущая стоимость проекта (*Net Present Value – NPV*) рассчитывается по формуле

$$NPV = PV - I_0$$

и показывает, на сколько денежных единиц данный проект требует меньше начальных инвестиций, чем альтернативные вложения, при условии, что в конце рассматриваемого периода они генерируют одинаковую прибыль. Если $NPV > 0$, то деньги выгоднее инвестировать в проект, а если $NPV < 0$, то выгоднее принять альтернативное предложение (например, положить деньги в банк).

Пример 9. Проект, требующий 700 ед. начальных инвестиций, приносит через два года прибыль 1 000 ед. В качестве альтернативы этому проекту рассматривается вложение денег в банк, годовая процентная ставка которого равна 12%. Требуется выбрать наилучший вариант вложения средств.

Решение. По условию $I_0 = 700$, $C = 1\,000$, $n = 2$, $r = 0{,}12$. Найдем текущую стоимость проекта по формуле (21):

$$PV = \frac{1\,000}{(1+0{,}12)^2} = 797{,}19.$$

Таким образом, чтобы получить в банке сумму 1 000 ед. через два года, следует положить на депозит 797,19 денеж. ед.

Чистая текущая стоимость проекта $(NPV = 797{,}19 - 700 = 97{,}19)$ показывает, что в банк нужно вложить на 97,19 денеж. ед. больше, чем в проект для получения той же суммы в будущем. Поэтому проект для инвестора является более привлекательным вложением средств.

Такая норма дисконтирования денежных потоков проекта, при которой чистая текущая стоимость проекта равна нулю ($NPV = 0$), называется *внутренней нормой прибыли проекта* (*Internal Rate of Return – IRR*). Таким образом, *IRR* показывает процентную ставку некоторого гипотетического банка, который дает такую же доходность, как и данный проект. Для проекта, который дает однократную прибыль, эта величина определяется из следующего уравнения:

$$I_0 = \frac{C}{(1+IRR)^n}. \tag{22}$$

Если найденная внутренняя норма прибыли больше, чем норма дисконтирования (т. е. прибыльность альтернативных проектов), то рассматриваемый проект является выгодным для инвестора. В противном случае лучше вкладывать деньги в альтернативные проекты.

Пример 10. Для проекта из предыдущего примера (I_0 = 700, C = = 1 000, n = 2) найдем внутреннюю норму прибыли. Запишем соотношение (22):

$$700 = \frac{1000}{(1+IRR)^2},$$

откуда

$$IRR = 19{,}52\%.$$

Таким образом, рассматриваемый проект по прибыльности эквивалентен банковским депозитам с годовой процентной ставкой 19,52%. Поскольку в примере 9 рассматривалась норма дисконтирования r = 0,12 (или 12%), которая меньше IRR, проект считается выгодным для инвестора.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ (ЭКЗАМЕНУ)

1. Эконометрика как научная дисциплина.
2. Экономико-математические методы и их классификация.
3. Основные понятия моделирования. Классификация экономико-математических моделей.
4. Комплексный анализ системы торговых или промышленных объектов как пример простейшей модели.
5. Сетевой график и его назначение. Полный путь. Критический путь.
6. Параметры событий сетевого графика. Параметры работ.
7. Постановка задачи управления запасами. Виды затрат в задачах управления запасами.
8. Базовая модель определения заказываемой партии товара (мо-

дель Уилсона).

9. Основные понятия прогнозирования.

10. Этапы прогнозирования на основе тренда.

11. Схема межотраслевого баланса. Балансовое уравнение.

12. Коэффициент прямых материальных затрат. Модель Леонтьева.

13. Учет внешних ресурсов в моделях межотраслевого баланса.

14. Системы массового обслуживания. Структура и классификация СМО. Задачи, решаемые с помощью теории массового обслуживания.

15. Простейшая система массового обслуживания и ее характеристики. Условие работоспособности простейшей системы массового обслуживания.

16. Основные понятия теории игр.

17. Принцип минимакса.

18. Постановка и классификация задач математического программирования.

19. Задача линейного программирования. Понятия допустимого и оптимального плана.

20. Дисконтирование денежных потоков.

21. Анализ инвестиционных проектов.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. С помощью обобщенных комплексных показателей оцените торговую деятельность трех районных потребительских обществ по шести натуральным показателям (таблица 13). Переоцените торговую деятельность райпо с помощью весовых коэффициентов $P_1 = P_4 = P_5 = 1$, $P_2 = P_3 = 0{,}9$, $P_6 = 0{,}8$.

Таблица 13 – **Торговая деятельность трех райпо**

Райпо, номер	Товарооборот на душу, р.	Производительность, тыс. р.	Охват доходов населения, %	Уровень издержек, %	Уровень прибыли, %	Фондоотдача, р.
1	600	45	70	5	1,5	10
2	700	59	80	7	1,4	9
3	900	55	60	6	2,0	8

Задача 2. Проанализируйте работу пяти универсамов по четырем натуральным показателям. Переоцените торговую деятельность универсамов, если заданы следующие весовые коэффициенты: $P_1 = P_3 = 1$,

$P_2 = 0{,}9$, $P_4 = 0{,}8$. Исходные данные представлены в таблице 14.

Таблица 14 – **Торговая деятельность пяти универсамов**

Универсамы	Уровень прибыли, %	Оборачиваемость, дней	Товарооборот за месяц, млн р.	Уровень издержек, %
«Любенский»	1,3	65	680	4,0
«Эдем»	1,2	110	750	7,2
«Ласточка»	2,2	87	800	6,1
«Сельмашевский»	1,8	70	710	6,5
«Речицкий»	1,2	95	880	5,3

Задача 3. Для проекта, сетевой график которого показан на рисунке 8, определите параметры событий (ранние, поздние сроки свершения и резервы), найдите критический путь и критический срок. Для некритических работ рассчитайте резервы времени.

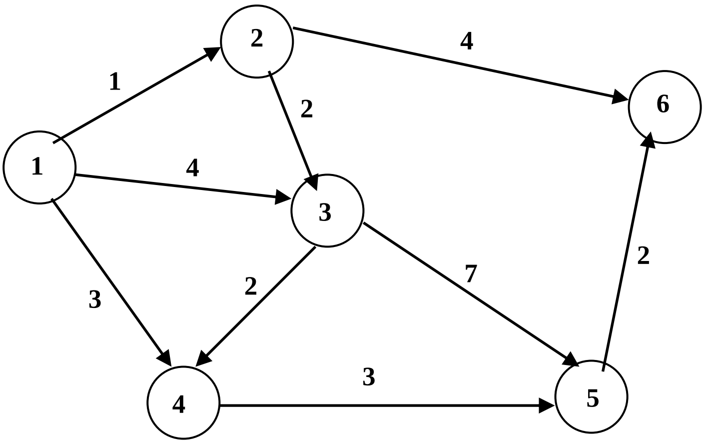

Рисунок 8 – **Сетевой график для задачи 3**

Задача 4. Для проекта, сетевой график которого показан на рисунке 9, определите параметры событий (ранние, поздние сроки свершения и резервы), найдите критический путь и критический срок. Для некритических работ рассчитайте резервы времени.

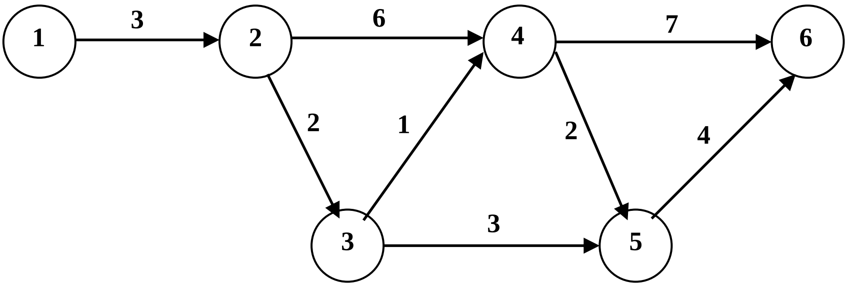

Рисунок 9 – **Сетевой график для задачи 4**

Задача 5. Магазин ежедневно продает по 33 холодильника. Накладные расходы на поставку партии холодильников в магазин оцениваются в 30 000 р. Стоимость хранения одного холодильника на складе магазина составляет 150 р. в день. Определите оптимальный объем партии холодильников, периодичность поставок и среднесуточные общие издержки магазина. Посчитайте, чему будут равны эти издержки и период между поставками при объеме партии 165 холодильников (предполагается модель Уилсона).

Задача 6. Потребность населенного пункта в стиральном порошке составляет 100 пачек в день. Накладные расходы на заказ и доставку партии порошка на склад составляют 20 000 р. Удельная стоимость хранения одной пачки порошка составляет 3 р. в день. Определите оптимальный объем партии порошка, периодичность поставок и среднесуточные общие издержки склада. Посчитайте, чему будут равны эти издержки и период между поставками при объеме партии 1 000 пачек стирального порошка (предполагается модель Уилсона).

Задача 7. Годовая процентная ставка банка равна 9%. Определите, какую сумму нужно положить в банк, чтобы наращенная за 10 лет сумма составила 1 000 усл. ед.

Задача 8. Предположим, что на вашем счете в банке лежит 2 млн р. Банковская ставка – 18% годовых. Вам предлагают за счет всех этих денег инвестировать проект, который через 6 лет принесет доход 6 млн р. Установите, стоит ли принимать это предложение.

Задача 9. Инвестор рассматривает проект, начальные инвестиции в который составляют 300 денеж. ед., ожидаемый доход через три года составит 800 денеж. ед., норма дисконтирования – 12%. Определите чистую текущую стоимость проекта и внутреннюю норму прибыли. Проанализируйте полученные результаты.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Задача 1. Без учета весовых коэффициентов лучшим является первое райпо (Q_1 = 2,67), а с учетом весовых коэффициентов – третье ($Q_3^* = 3{,}14$).

Задача 2. Магазин «Ласточка» лучший как без учета весовых коэффициентов (Q_3 = 2,45), так и с учетом весовых коэффициентов ($Q_3^* = 2{,}34$).

Задача 3. Критический срок проекта ($t_{кр}$) равен 13. Критический путь $\mu = (1-3-5-6)$. Параметры событий приведены в таблице 15, а полные резервы времени работ – в таблице 16.

Таблица 15 – **Параметры событий задачи 3**

События (i)	Ранний срок свершения $t_р$ (i)	Поздний срок свершения $t_п$ (i)	Резерв R (i)
1-е	0	0	0
2-е	1	2	1
3-е	4	4	0
4-е	6	8	2
5-е	11	11	0
6-е	13	13	0

Таблица 16 – **Полные резервы времени некритических работ задачи 3**

Работа	(1, 2)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 6)	(3, 4)	(4, 5)
Полный резерв времени	1	5	1	8	2	2

Задача 4. Критический срок проекта ($t_{кр}$) равен 16. Критический путь $\mu = (1-2-4-6)$. Параметры событий приведены в таблице 17, а резервы работ – в таблице 18.

Таблица 17 – **Параметры событий задачи 4**

События (i)	Ранний срок свершения $t_р$ (i)	Поздний срок свершения $t_п$ (i)	Резерв R (i)
1-е	0	0	0
2-е	3	3	0
3-е	5	8	3
4-е	9	9	0
5-е	11	12	1
6-е	16	16	0

Таблица 18 – **Полные резервы времени некритических работ задачи 4**

Работа	(2, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 6)
Полный резерв времени	3	3	4	1	1

Задача 5. Оптимальный объем партии холодильников (Q^*) составляет 115 шт. При этом интервал между поставками (T^*) будет равен 3,5 дня, а общие среднесуточные издержки магазина (Z^*) составят 17 234 р. При объеме партии в 165 холодильников интервал между поставками составит 5 дней, а среднесуточные издержки будут равны 18 375 р.

Задача 6. Оптимальный объем партии порошка (Q^*) равен 1 155 пачкам. При этом интервал между поставками (T^*) будет равен 11,55 дня, а общие среднесуточные издержки склада (Z^*) составят 3 464 р. При объеме партии в 1 000 пачек стирального порошка интервал между поставками составит 10 дней, а среднесуточные издержки будут равны 3 500 р.

Задача 7. Нужно положить в банк сумму (*PV*) в размере 422,4 усл. ед.

Задача 8. Предложение принять стоит, так как чистая текущая ценность предлагаемого проекта положительна: *NPV* = 222 589.

Задача 9. *NPV* = 269,42 денеж. ед., *IRR* = 39%, проект является выгодным для инвестора.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Автоматизация решения задач линейного программирования : пособие / авт.-сост. : В. В. Бондарева, О. И. Еськова. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп., 2003.

Костевич, Л. С. Теория игр. Исследование операций / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Минск : Выш. шк., 1982.

Красс, М. С. Математика для экономических специальностей : учеб. / М. С. Красс. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2002.

Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. Н. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : Выш. шк., 2001.

Минюк, С. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Минск : ТетраСистемс, 2002.

Экономико-математические методы и модели : пособие / авт.-сост. : А. А. Цветкова, В. В. Бондарева, О. И. Еськова. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп., 2003.

Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Минск : БГЭУ, 2000.

Экономико-математические методы и модели : практикум. В 5 ч. Ч. 1 / авт.-сост. : О. И. Еськова, Т. А. Заяц, В. В. Бондарева. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп., 2005.

Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2005.

Юферева, О. Д. Экономико-математические методы и модели : сб. задач / О. Д. Юферева. – Минск : БГЭУ, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭКОНОМЕТРИКА
И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для студентов заочной формы получения высшего образования экономических специальностей

Авторы-составители:
Еськова Оксана Ивановна
Бондарева Валентина Викторовна
Заяц Татьяна Александровна

Редактор М. П. Герасенко
Технический редактор И. А. Козлова
Компьютерная верстка Н. Н. Короедова

Подписано в печать 16.12.11. Бумага типографская № 1.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,70. Тираж 1000 экз.
Заказ №

Учреждение образования
«Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.
ЛИ № 02330/0494302 от 04.03.2009 г.

Отпечатано в учреждении образования
«Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра информационно-вычислительных систем

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Пособие
для студентов заочной формы получения высшего образования экономических специальностей

Гомель 2011