УДК 510
ББК 22.122
Э 45

Авторы-составители: Н. Д. Романенко, канд. физ.-мат. наук, доцент;
В. И. Тютин, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензенты: А. А. Бабич, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого;
А. Н. Семенюта, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 1 от 11 октября 2013 г.

Э 45 **Элементы** теории нечетких множеств, нечеткой логики и их применение в экономике : пособие для реализации содержания образовательных программ высшего образования I и II ступеней. В 3 ч. Ч. 2. Нечеткие отношения и нечеткие графы / авт.-сост. : Н. Д. Романенко, В. И. Тютин. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2014. – 84 с.
ISBN 978-985-540-209-2

Достаточно подробно и в доступной форме изложены базовые положения теории нечетких отношений и их графов, а также ряд вопросов их практического использования в различных отраслях знания, в том числе и экономике. Так, рассмотрены основные понятия и определения теории нечетких отношений и их графов, различные способы их задания, возможное применение, свойства и виды теории нечетких отношений. Рекомендуется предварительно ознакомиться с частью 1 «Нечеткие множества» данного пособия, изданной в 2012 г., а также рассмотреть четкие аналоги приводимых понятий, что должно способствовать их прочному усвоению.

Издание предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов учреждений высшего образования. Может быть использовано преподавателями, ведущими научно-исследовательскую работу, при анализе сложных систем и процессов.

УДК 510
ББК 22.122

ISBN 978-985-540-209-2

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Одним из наиболее часто встречающихся математических понятий является понятие нечеткого отношения, которое наряду с понятием самого нечеткого множества следует отнести к фундаментальным основам всей теории нечетких множеств. Нечеткие отношения широко применяются в решении задач автоматической классификации, в том числе и в экономике.

Хотя количество учебно-методических пособий по теории нечетких множеств в последнее время увеличилось, тем не менее литературы, где подробно и доступно излагались бы вопросы нечетких отношений, недостаточно.

В части 1, как и части 2, данного пособия изучаемый материал излагается последовательно, чтобы у читателя (не математика по профессии, использующего математику в своей работе), не возникло больших затруднений при его изучении.

Для лучшего понимания идей и понятий теории нечетких отношений целесообразно вначале внимательно изучить их четкие аналоги.

Обозначения, которые использованы в пособии, являются стандартными, в иных случаях к ним приводятся подробные пояснения.

В конце каждого раздела приведены упражнения, предназначенные для проверки того, насколько хорошо усвоен новый материал.

1. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ИХ ГРАФЫ

В основе нечетких отношений и графов лежат обычные отношения и обычные графы. Нечеткие отношения играют важнейшую роль в теории нечетких систем. Аппарат теории нечетких отношений используется в условиях неопределенности при построении теории нечетких автоматов, а также при моделировании структуры сложных систем и анализе процессов принятия решений.

Отметим, что нечеткое отношение является обобщением обычного отношения, оно часто заменяется терминами «нечеткая связь», «ассоциация», «взаимосвязь» или «соотношение».

Важность этого понятия заключается в том, что оно позволяет создавать и анализировать нечеткие математические модели реальных задач принятия решений, которые являются более адекватными действительности по сравнению с соответствующими четкими моделями. При этом нечеткое отношение выступает в качестве некоторой меры или степени, с которой объекты окружающего нас мира находятся в данном отношении друг с другом. В данном пособии рассматриваются лишь бинарные отношения.

1.1. Понятие бинарного отношения

Два элемента обычного четкого множества, расположенные в определенном порядке, будем называть в дальнейшем упорядоченной парой, или просто парой. Для обозначения пары будем применять круглые скобки. Элемент, который занимает первое место, называется первым элементом (первой компонентой, или координатой), а занимающий второе место – вторым элементом (второй компонентой, или координатой) этой пары. Пара с первым элементом x и вторым элементом y обозначается с помощью символа «(x, y)».

Определение 1.1. *Декартовым (прямым) произведением* $X \times Y$ *множества* X *на множество* Y называется множество всевозможных пар, первые элементы которых принадлежат X, а вторые элементы – Y, т. е.

$$\tilde{O} \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ è } y \in Y\}.$$

Пример 1.1. Пусть $X = \{x, y, z\}$, $Y = \{2, 3\}$. Тогда по определению (1.1) $X \times Y = \{(x, 2), (x, 3), (y, 2), (y, 3), (z, 2), (z, 3)\}$.

Частным случаем декартова произведения двух множеств является декартов квадрат множества.

Определение 1.2. *Декартовым квадратом* $\tilde{O}^2$ *множества* X называется множество всевозможных пар этого множества, т. е.

$$\tilde{O}^2 = \{(x, y) \mid x, \acute{o} \in \tilde{O}\}.$$

Пример 1.2. Пусть $X = \{\tilde{o}, \acute{o}, z\}$. Тогда по определению (1.2) $\tilde{O}^2 =$ $= \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,x),(y,z),(z,z),(z,x),(z,y)\}$.

Определение 1.3. *Бинарным отношением* R *на множествах* X, Y называется подмножество декартова произведения $X \times Y$ с функцией принадлежности $\mu_R(\tilde{o}, \acute{o}) : X \times Y \to \{0, 1\}$, $x \in X, y \in Y$.

Обычное неразмытое n-арное отношение R определяется как подмножество декартова произведения n множеств:

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n .$$

В нашем случае рассматриваются только бинарные отношения, поэтому само слово «бинарное» из определения (1.3) будем опускать.

В случаях, когда множества X и Y различны, бинарное отношение некоторые авторы называют *отображением* [1–2].

На основании определения (1.2), для того чтобы задать бинарное отношение R на универсальных множествах X, Y, достаточно указать все упорядоченные пары (x, y) элементов x, y $(x \in X, y \in Y)$, такие, где x и y связаны с помощью R. Тот факт, что элементы x, y связаны отношением R, обычно обозначают с помощью эквивалентных записей:

$$xRy\text{, или } (x, y) \in R\text{, или } R \subset X \times Y .$$

Отношение R на множествах X и Y задает многозначное отображение множества X во множество Y. При этом множество X будем называть *областью определения* отображения, а множество Y – *областью* его *значений.* Если мы зафиксируем элемент x^* из области X определения, то его образом при данном отображении будем называть множество $R(\tilde{o}^*) = \left\{ \acute{o} \,\middle|\, y \in Y, (x^*, y) \in R \right\}$. Пусть дано множество $\grave{A} \subseteq \tilde{O}$. Его образом при указанном отображении R будем называть объединение

$$R(\grave{A}) = \bigcup_{\tilde{o} \in \grave{A}} R(\tilde{o}) = \left\{ \acute{o} \,\middle|\, y \in Y, \exists x \in A, (x, y) \in R \right\} \tag{1.1}$$

образов всех элементов множества A [1].

Прообразом фиксированной точки y^* из множества Y при отображении R (образом этой точки при обратном отображении R^{-1}) называют множество $R^{-1}(y^*) = \left\{ \tilde{o} \,\middle|\, \tilde{o} \in \tilde{O}, (\tilde{o}, y^*) \in R \right\}$. Пусть $\hat{A} \subseteq Y$. Его прообразом при отображении R по аналогии с объединением (1.1) будем называть объединение

$$R^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} R^{-1}(y) = \left\{ \tilde{o} \,\middle|\, x \in X, \exists y \in B, (x, y) \in R \right\} \tag{1.2}$$

прообразов всех элементов множества B.

Пример 1.3. Пусть R – многозначное отображение отрезка X = [–2; 2] в отрезок Y = [0; 4], ставящее каждой точке $\tilde{o} \in \tilde{O}$ в соответствие множество точек $\acute{o} \in Y$, не больших чем $-x^2 + 4$. В данном случае $R = \left\{ (x, y) \,\middle|\, (x, y) \in X \times Y, y \le -x^2 + 4 \right\}$.

Указанному отображению соответствуют точки затененной области на рисунках 1 и 2.

Образом точки $\tilde{o}^* = 1$ при отображении R является отрезок [0; 3] (рисунок 1). Прообразом же точки $y^* = 2$ при отображении R будет отрезок [$-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$] (рисунок 2).

Если множества X, Y, на которых задано отношение R, конечны, т. е. $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, то это отношение удобно описывать при помощи матрицы $A_{m \times n} = (r_{ij})$, $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$, называемой матрицей отношения R, элементы которой представляют собой значения функции принадлежности $\mu_R(\tilde{o}, \acute{o}) : X \times Y \to \{0, 1\}$. Эту матрицу будем называть матрицей отношения R и обозначать как J_R. (Два различных варианта записи матрицы приведены в примере 1.4.)

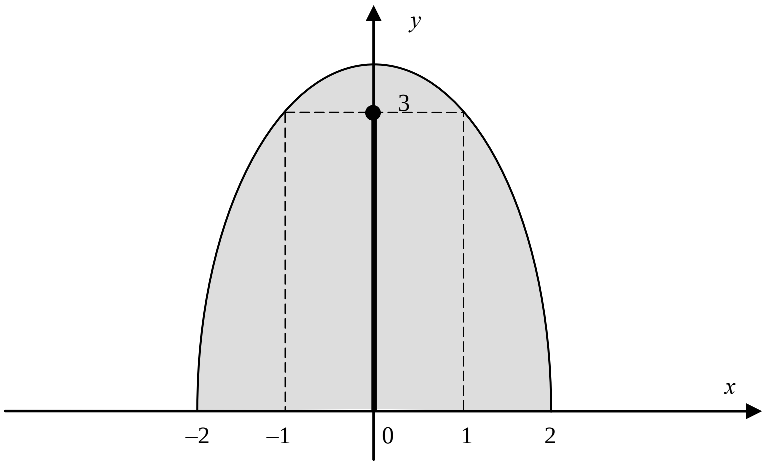


Рисунок 1 – **Образ точки при многозначном отображении**

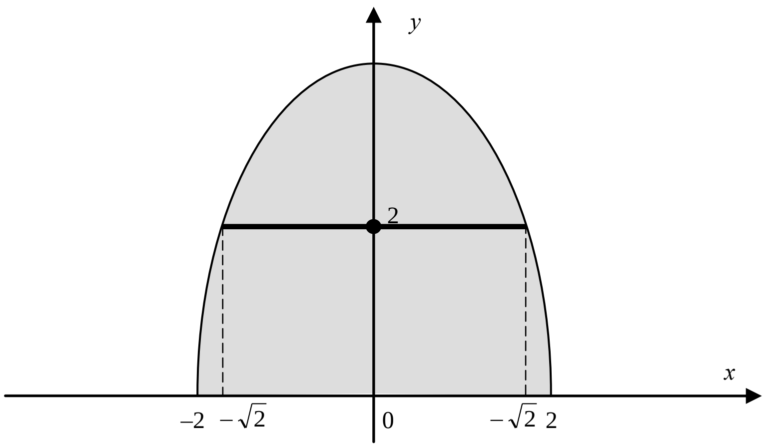


Рисунок 2 – **Прообраз точки при многозначном отображении**

Элементы r_{ij} этой матрицы определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{åñëè}\,(x_i, y_j) \in R, \\ 0, \text{åñëè}\,(x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$

Если множества X , Y конечными не являются, то для описания отношения R можно воспользоваться графическим способом.

Пример 1.4. Пусть X и Y – множества из примера 1.1 и R = $= \{(x, 3), (y, 2), (z, 3)\}$ – отношение на этих множествах, которое можно задать матричным способом в двух видах:

R	2	3
x	0	1
y	1	0
z	0	1

, (1.3)

$$J_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Мы будем пользоваться в дальнейшем записью типа (1.3).

Зададим отношение *R*, сопроводив каждую пару $(\tilde{o}_i, y_j)$ значением функции $\mu_R(\tilde{o}, \acute{o})$ принадлежности, при помощи списка и в виде таблицы 1:

$$R = \{((x, 2), 0), ((x, 3), 1), ((y, 2), 1), ((y, 3), 0), ((z, 2), 0), ((z, 3), 1)\}.$$

Таблица 1 – **Задание отношения в виде таблицы**

(x, y)	$(x, 2)$	$(x, 3)$	$(y, 2)$	$(y, 3)$	$(z, 2)$	$(z, 3)$
$\mu_R(x, y)$	0	1	1	0	0	1

Определение 1.4. *Бинарным отношением R на множестве X* называется подмножество из декартового квадрата $\tilde{O}^2$ этого множества с функцией принадлежности $\mu_R(\tilde{o}, \acute{o}) : X^2 \to \{0, 1\}$, $\tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O}$.

Можно увидеть, что бинарное отношение на множестве является частным случаем отношения на множествах для $X = Y$. В некоторых учебных пособиях бинарное отношение на множестве X называется иначе – *унарным отношением* [3].

Бинарное отношение на множестве X называется *пустым*, если оно не содержит ни одной пары из $\tilde{O}^2$. Его мы будем обозначать с помощью символа «Ø». Другим крайним случаем является так называемое *универсальное отношение* (U), содержащее все пары из $\tilde{O}^2$.

Пример 1.5. Пусть $X = \{x, y, z, t\}$ – некоторое множество, $R =$ $= \{(\tilde{o}, \tilde{o}), (\tilde{o}, t), (y, y), (y, z), (z, x), (z, t), (t, y), (t, z)\}$ – бинарное отношение на этом множестве. Матрица J_R отношения R будет следующей:

R	x	y	z	t
x	1	0	0	1
y	0	1	1	0
z	1	0	0	1
t	0	1	1	0

.

Определим образы и прообразы элементов множества X в отношении R [4]. Полученные результаты представим в таблице 2.

Таблица 2 – **Образы и прообразы элементов при отображении**

	Элементы множества X								Образ множества X в отношении R
	x		y		z		t		
Образ элемента из X в отношении R	x	t	y	z	x	t	y	z	$\{x, y, z, t\}$
Прообраз элемента из X в отношении R	x	z	y	t	t	y	z	x	$\{x, y, z, t\}$

Выделяют следующие *способы задания бинарных отношений*:

1. Задание отношения с помощью характеристического свойства, т. е. такого, которое определяет характер связи между элементами в парах.

Пример 1.6. Пусть $X = \{2, 3, 4, 6\}$ – множество натуральных чисел, R = «быть меньше» – бинарное отношение на X. Это отношение состоит из множества пар чисел, в которых первый элемент меньше второго.

2. Задание отношения списком. По условию примера 1.6 $R =$ $= \{(2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 6)\}$.

3. Задание отношения с помощью матрицы. Например, матрица J_R бинарного отношения R из примера 1.6 будет следующей:

R	2	3	4	6
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1
6	0	0	0	0

.

4. Задание отношения при помощи графика. В случае конечности множества X график отношения R – множество точек (x_i, y_j), координаты которых связаны этим отношением. Отношение R из примера 1.6 представлено графически на рисунке 3.

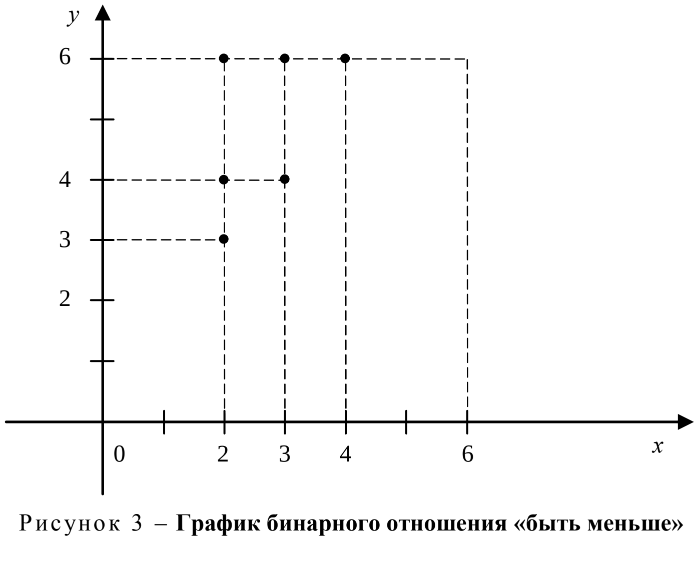


Рисунок 3 – **График бинарного отношения «быть меньше»**

5. Задание отношения при помощи характеристической функции $\mu_R(\tilde{o}, \acute{o})$. В таблице 1 задано отношение R (см. пример 1.4) при помощи указания значений $\mu_R(\tilde{o}, \acute{o})$ для каждой пары (x_i, y_j).

1.2. Основные операции на бинарных отношениях. Свойства бинарных отношений

Поскольку отношение R на множествах X и Y задается при помощи подмножеств их декартова произведения $X \times Y$, т. е. $R \subseteq X \times Y$ (в частности, $R \subset X^2$, если $X = Y$), для отношений определяются те же операции, что и для множеств. Их определения можно найти, например, в источнике [5].

Здесь и далее суждение «для всех x из X $P(x)$ истинно» обозначается для краткости при помощи символа «$\forall \tilde{o} Đ(\tilde{o})$». При этом знак «$\forall$» (перевернутая первая буква английского слова «All» – все) называется *квантором общности*. Суждение же «существует такой x из X, что $P(x)$ истинно» обозначается при помощи символа «$\exists \tilde{o} Đ(\tilde{o})$», при этом знак «$\exists$» (перевернутая первая буква английского слова «Exists» – существует) называется *квантором существования*.

Определение 1.5. *Композицией $S = R \circ L$ бинарных отношений R и L, заданных на множестве X,* будем называть такое бинарное отношение на X, что $\forall \tilde{o}(\tilde{o} \in \tilde{O}), \forall y(y \in Y) : ((\tilde{o}, y) \in S \Leftrightarrow \exists z(z \in X) : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in L.$

Пример 1.7. Допустим, что $X = \{x, y, z, t\}$, отношения R и L заданы своими матрицами $J_R = (r_{ij}), J_L = (l_{ij})$:

R	x	y	z	t
x	0	1	1	0
y	0	0	1	0
z	1	0	0	1
t	0	1	0	1

,

L	x	y	z	t
x	1	0	0	1
y	0	1	0	1
z	0	0	1	1
t	1	0	1	0

.

Определим композицию $S = R \circ L$. С этой целью выполним следующее:

1. Используя матрицы отношений R и L, зададим эти отношения списком: $R = \{(x, y), (x, z), (y, z), (z, x), (z, t), (t, y), (t, t)\}$, $L = \{(x, x), (x, t), (y, y), (y, t), (z, z), (z, t), (t, x), (t, z)\}$.

2. Из того, что R отображает элемент x лишь в элементы y и z, т. е. $\mu_R(x,x)=0, \mu_R(x,y)=\mu_R(x,z)=1$, а элемент y отображается с помощью L лишь в y, элемент z с помощью L – в z и t, на основании определения (1.5) делаем вывод, что элемент x не находится в отношении S с самим собой, т. е. $\mu_S(x,x)=0$. При этом элемент x находится в отношении S с элементом y, т. е. $\mu_S(x,y)=1$. Он же находится в указанном отношении и с элементом z, т. е. $\mu_S(x,z)=1$. Продолжая подобные рассуждения далее, окончательно получим образы всех остальных элементов при отображении S и матрицу J_S этого отношения:

S	x	y	z	t
x	0	1	1	1
y	0	0	1	1
z	1	0	1	1
t	1	1	1	1

.

По определению (1.5) значение функции $\mu_S(x,y)$ принадлежности пары (x, x) бинарному отношению S равно логической сумме четырех логических произведений элементов первой строки матрицы J_R на соответствующие элементы первого столбца матрицы J_L, т. е. $\mu_S(x,x)=r_{11}\cdot l_{11}+r_{12}\cdot l_{21}+r_{13}\cdot l_{31}+r_{14}\cdot l_{41} = (r_{11},r_{12},r_{13},r_{14})\cdot\begin{pmatrix} l_{11}\\ l_{21}\\ l_{31}\\ l_{41}\end{pmatrix} =$

$=$ max (min (r_{11}, l_{11}), min (r_{12}, l_{21}), min (r_{13}, l_{31}), min (r_{14}, l_{41})) = max (min (0, 1), min (1, 0), min (1, 0), min (0, 1)) = 0.

В общем виде элементы s_{ij} матрицы J_S находятся по формуле

$$s_{ij}=\underbrace{\max}_{k}\left(\min\,(r_{ik}, l_{kj})\right). \tag{1.5}$$

Таким образом, чтобы найти элемент s_{ij} матрицы S композиции бинарных отношений R и L, следует умножить элементы i-й строки матрицы J_R на соответствующие элементы j-го столбца матрицы J_L

и полученные результаты сложить. При этом матрица J_S композиции бинарных отношений R и L равна произведению матриц этих отношений. Другими словами, имеет место формула

$$J_{R \circ L} = J_R \cdot J_L \,. \tag{1.6}$$

Однако в отличие от операции обычного умножения матриц, здесь операции сложения выполняются по правилу нахождения максимума, а операции умножения – по правилу нахождения минимума, т. е. $x + y = \max(x, y)$, $\tilde{o} \cdot \acute{o} = \min(x, y)$.

Множество $\mathring{A} = \Delta = \left\{ (x, x) \;\middle|\; x \in X \right\}$, называемое *диагональю* множества $\tilde{O}^2$, представляет собой отношение равенства, или единичное бинарное отношение на множестве X.

Как уже указывали в п. 1.1, обратным отношением R^{-1} для R называется отношение, состоящее из пар, полученных переменой мест элементов в каждой паре отношения R:

$$R^{-1} = \left\{ (y, x) \;\middle|\; (x, y) \in R \right\}.$$

То есть $\acute{o} R^{-1} x \Leftrightarrow xRy$, или $\mu_{R^{-1}}(y, x) = 1 \Leftrightarrow \mu_R(x, y) = 1$.

Определим некоторые *свойства* бинарных отношений.

Бинарное отношение R на множестве X называется:

1) *рефлексивным*, если $\mathring{A} \subseteq R$;

2) *транзитивным*, если $R \circ R \subseteq R$;

3) *симметричным*, если $R^{-1} \subseteq R$;

4) *антисимметричным*, если $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$;

5) *асимметричным*, если $R \cap R^{-1} = \varnothing$;

6) *антирефлексивным*, если $R \cap \mathring{A} = \varnothing$;

7) *отношением эквивалентности*, если оно рефлесивно, симметрично, транзитивно;

8) *отношением строгого порядка*, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

9) *отношением нестрогого порядка*, если рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Примечание – Дополнительную информацию о перечисленных свойствах бинарных отношений можно найти в источниках рекомендуемой литературы (см. источник [5]).

Пусть R – бинарное отношение на множестве X. *Степенью* отношения R на указанном множестве называется его композиция с самим собой, т. е. $R^k = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{k \text{ ðàç}}$, где отношения R^k определяются рекурсивным образом: $R^1 = R, R^k = R^{k-1} \circ R$, k = 2, 3, … .

Определение 1.6. Бинарное отношение нестрогого порядка R на множестве X называется *отношением полного* (*общего*) *порядка*, или *отношением линейного порядка*, если для любых $\tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O}$ $(\tilde{o}, \acute{o}) \in R$ или $(y, x) \in R$.

Определение 1.7. Бинарное отношение нестрогого порядка R на множестве X называется *отношением частичного порядка*, если имеются, по крайней мере, два элемента $\tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O}$, для которых $(\tilde{o}, \acute{o}) \notin R$ и $(y, x) \notin R$.

Пример 1.8. Бинарные отношения R и L из примера 1.7, как можно убедиться, рассмотрев соответствующие матрицы, не имеют ни одного из вышеперечисленных свойств 1–9. Бинарное отношение $R \circ R \circ R = R^3$ является рефлексивным:

R^3	x	y	z	t
x	1	1	1	1
y	0	1	1	1
z	1	1	1	1
t	1	1	1	1

.

Важным и в то же время весьма общим математическим понятием является понятие *замыкания*. С неформальной точки зрения замкнутость означает, что многократное выполнение допустимых шагов не выводит за определенные границы.

Пример 1.9. Бинарное отношение R, заданное на множестве $X = \{x, y, z, t\}$ матрицей

R	x	y	z	t
x	1	0	0	0
y	1	1	1	1
z	1	0	1	0
t	1	0	1	1

,

является отношением общего порядка на указанном множестве, так как оно является отношением нестрогого порядка, т. е. рефлексивно, антисимметрично, транзитивно, что проверяется непосредственно ($R^2 = R$), и для любых $\tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O}$ $(\tilde{o}, \acute{o}) \in R$ или $(y, x) \in R$.

Пример 1.10. Бинарное отношение R, которое задано на множестве $X = \{x, y, z, t\}$ при помощи матрицы

R	x	y	z	t
x	1	0	0	1
y	0	1	0	0
z	1	1	1	1
t	1	0	0	1

,

является отношением частичного порядка, поскольку оно является отношением нестрогого порядка (это проверяется аналогично) и существуют элементы x, y, такие, что ни одна из соответствующих пар (x, y), (y, x) не принадлежит этому отношению.

Пусть R и R' – отношения на множестве X.

Определение 1.8. Отношение R' называется *замыканием* R относительно свойства C, если:

1) R' обладает свойством C: $C(R')$;
2) R' является надмножеством R: $R \subset R'$;
3) R' является наименьшим: $C(R'') \,\&\, R \subset R'' \Rightarrow R' \subset R''$ [6].

Символом R^+ будем обозначать объединение положительных степеней отношения R, т. е.

$$R^+ = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots.$$

Теорема 1.1. *Отношение* R^+ *является транзитивным замыканием отношения R.*

Пример 1.11. Пусть R – бинарное отношение «быть меньше» из примера 1.6. Тогда бинарные отношения R^2, R^3 будут представлены следующими матрицами:

R^2	2	3	4	6
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0
6	0	0	0	0

,

R^3	2	3	4	6
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
6	0	0	0	0

.

Осуществив проверку, убеждаемся в справедливости равенства $R^4 = \varnothing$. Тогда согласно теореме 1.1 транзитивное замыкание $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 = R$.

Пример 1.12. Пусть R – бинарное отношение из примера 1.7. Тогда при помощи проверки можно убедиться, что матрицы бинарных отношений R^2, R^3 будут иметь следующий вид:

R^2	x	y	z	t
x	1	0	1	1
y	1	0	0	1
z	0	1	1	1
t	0	1	1	1

,

R^3	x	y	z	t
x	1	1	1	1
y	0	1	1	1
z	1	1	1	1
t	1	1	1	1

.

Также можно убедиться в том, что $R^4 = U$ – универсальное отношение, матрица которого состоит из одних единиц. Тогда транзитивное замыкание отношения R будет равно:

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = R^4 = U .$$

Могут быть полезными также следующие утверждения:

Теорема 1.2. *Транзитивное бинарное отношение совпадает со своим транзитивным замыканием.*

Теорема 1.3. *Транзитивное замыкание отношения R является ближайшим к R транзитивным отношением.*

1.3. Графы бинарных отношений

Графическими представлениями в широком смысле являются любые наглядные отображения исследуемых систем, процессов, явлений на плоскости. К этим отображениям могут быть отнесены различного рода рисунки, чертежи, графики зависимостей характеристик, блок-схемы процессов, диаграммы.

Одним из мощных и исследованных классов объектов, которые относятся к графическим представлениям, являются *графы*. Они изучаются в теории графов, имеющей огромные приложения благодаря наглядности и понятности ее языка, удобству в формальных исследованиях. На языке теории графов в настоящее время формулируются и решаются многие задачи теории управления.

Как это ни парадоксально, но для понятия «граф» к настоящему времени нет общепризнанного единого определения. Разными авторами даны очень похожие, но все же различные объекты. Особенно это замечание применительно к различного рода приложениям.

Особенностью изображения графа является то, что не все детали рисунка одинаково важны. Например, являются несущественными геометрические свойства ребер (длина, кривизна) и взаимное расположение вершин на плоскости.

Графические представления в узком смысле – это описание исследуемой системы, процесса, явления при помощи средств теории графов в виде совокупностей двух классов объектов: *вершин* и соединяющих их линий – *ребер*, или *дуг*. Графы и их составляющие характеризуются при помощи определенных и наборов допустимых преобразований (операций) над ними.

Графом G называется совокупность двух множеств: множества *вершин V* и множества *ребер E,* между элементами которых определено *отношение инцидентности* – каждое ребро $\mathring{a} \in \mathring{A}$ инцидентно ровно двум вершинам v' и v'', которые оно соединяет. При этом вершина $v'(v'')$ и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'', которые являются для ребра e концевыми точками, называются смежными. Иногда вместо $v \in V$ и $e \in E$ применяют соответственно записи $v \in G$, $e \in G$.

Обычно граф изображается при помощи *диаграммы*: вершины изображаются точками (кружочками), а ребра – линиями. *Маршрутом* в графе называется чередующаяся последовательность $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k$ вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется *цепью.* Если в маршруте вершина v_0 равна v_k, то он называется з*амкнутым*, в противном случае, – *открытым*.

Пример 1.13. На рисунке 4 приведен пример диаграммы графа, который имеет пять вершин и шесть ребер. В этом графе смежными являются вершины v_1 и v_2, v_2 и v_3, v_3 и v_4, v_4 и v_5, v_5 и v_1, а несмежными, например, v_1 и v_3. Смежными являются, например, ребра $\mathring{a}_1$, $\mathring{a}_2$, $\mathring{a}_2$ и $\mathring{a}_3$, а несмежными – $\mathring{a}_1$ и $\mathring{a}_4$. Последовательность $v_2\ e_1\ v_1\ e_5\ v_5\ e_4\ v_4\ e_6\ v_1\ e_1\ v_2$ является маршрутом, но не цепью, а последовательность $v_2\ e_1\ v_1\ e_5\ v_5\ e_4\ v_4$ является маршрутом и цепью.

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой. В этом случае оно называется *направленным* (или *ориентированным*), или *дугой*, и изображается стрелкой, направленной от вершины, называемой *началом*, к вершине, именуемой *концом*.

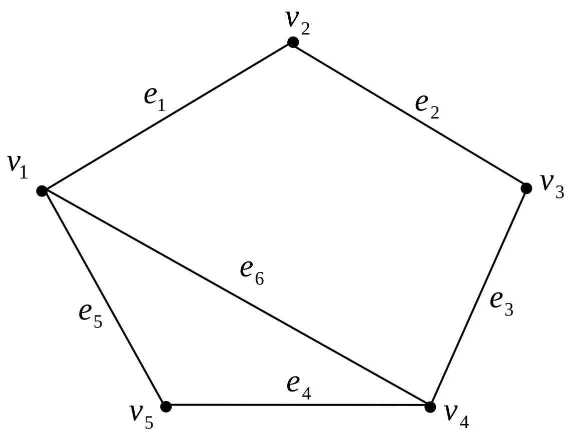


Рисунок 4 – **Диаграмма графа**

Граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом v' и концом v'', называется *ориентированным* (*орграфом*), а содержащий ненаправленные ребра (дуги) – *неориентированным* (назовем его *н-графом*). Замкнутая цепь называется *циклом*. Для орграфов цепь называется *путем*, а цикл – *контуром*.

На рисунке 5 приведен пример орграфа с четырьмя вершинами и пятью дугами.

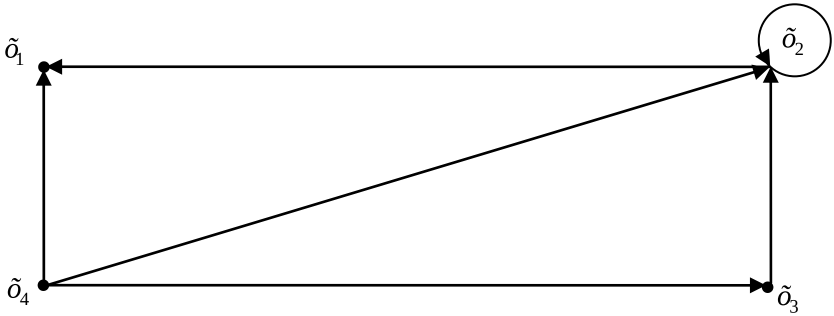


Рисунок 5 – **Диаграмма орграфа**

Двудольный граф (*биграф*, или *четный граф*) – это граф $G(V, E)$, где множество V вершин разбито на два непересекающиеся подмножества V_1 и V_2 $(V_1 \cup V_2 = V \,\&\, V_1 \cap V_2 = \varnothing)$, причем всякое ребро из E инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2 (т. е. соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2). Множества V_1 и V_2 называются *долями* двудольного графа.

Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются *параллельными*, или *кратными*. Граф, содержащий кратные ребра, именуется *мультиграфом*. Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Любой орграф $G(V, E)$ с петлями, но без кратных дуг, задает бинарное отношение E на множестве V и обратно. А именно, пара элементов (x, y) принадлежит отношению E* $\big((\tilde{o},\acute{o})\in \mathring{A} \subset V\times V\big)$ *тогда и только тогда, когда в графе G есть дуга (x, y).*

На основании этой теоремы мы можем сделать вывод о существовании полной аналогии между орграфами и бинарными отношениями. Это фактически один и тот же класс объектов, но описанный при помощи разных средств.

Пример 1.14. Пусть R – бинарное отношение на множестве $\tilde{O} = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ из примера 1.13, заданное своим графом на рисунке 5. Определим, пользуясь теоремой 1.4, матрицу J_R этого бинарного отношения.

Матрица будет представлена у нас в виде следующей таблицы:

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	1	0	0
x_4	1	1	1	0

.

Граф называется *конечным,* если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и *пустым,* если его множество вершин V, а значит и ребер E, пусто. Граф без петель и кратных ребер именуется *полным,* если каждая пара вершин соединена ребром. Полный граф соответствует универсальному отношению. Неориентированный граф соответствует симметричному отношению.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу G, чтобы получить полный граф. Дополнение графов соответствует дополнению отношений.

Объединение графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, обозначаемое как $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$ при условии $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, называется такой граф $G(V, E)$, где

$$V = V_1 \cup V_2 \,\&\, E = E_1 \cup E_2.$$

Бинарные отношения R на множествах X, Y удобно изображать в виде двудольных орграфов, у которых стрелки направлены от элементов множества X к их образам во множестве Y, причем дуга (x, y), связывающая элементы $\tilde{o} \in \tilde{O}$ и $y \in Y$, существует тогда и только тогда, когда xRy. Если в орграфе изменить направления всех дуг, то полученный орграф будет соответствовать обратному отношению.

При помощи графов удобно находить композицию бинарных отношений.

Пример 1.15. В качестве иллюстрации вышесказанного определим при помощи графов композицию $S = R \circ L$ бинарных отношений R и L из примера 1.7. С этой целью построим эти отношения в виде двудольных графов, объединим их так, что выходы графа бинарного отношения R будут являться входами для графа бинарного отношения L. Пути в объединении графов отношений R и L будут идти от элементов множества $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ к их образам в отношении R и затем к их образам в отношении L (рисунок 6).

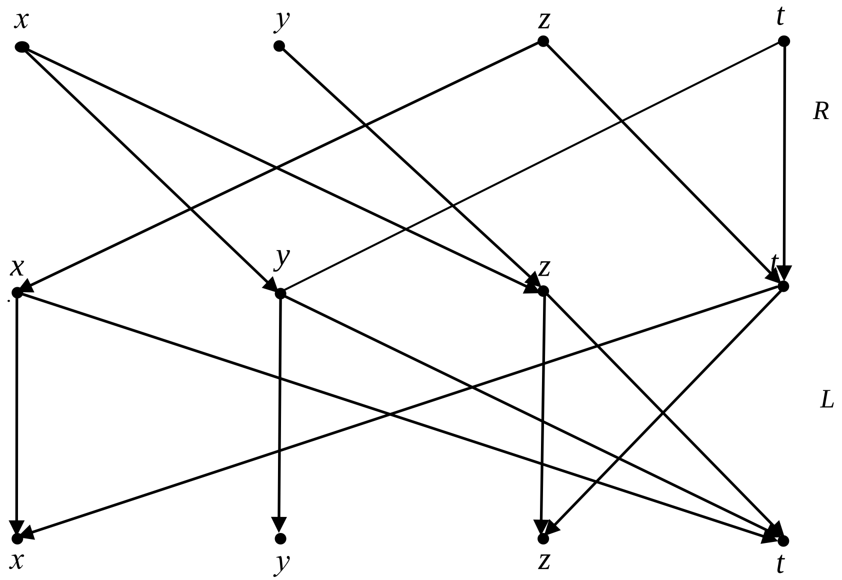


Рисунок 6 – **Диаграммы двудольных графов отношений и их объединение**

Далее выписываем все пути, которые ведут от элементов множества X к их образам в отношении S, и все промежуточные элементы в этих путях, при помощи которых осуществлены связи в этом отношении. Полученные результаты представим в виде таблицы 3. Все пары, принадлежащие отношению S, перечислены в столбце 3 этой таблицы.

Таблица 3 – **Пути от элементов множества к их образам**

Пути от элементов множества к их образам	Элемент, который осуществляет опосредованную связь	Дуги двудольного графа отношения *S*
1	2	3
$x \to y \to y$	y	(x, y)
$\tilde{o} \to \acute{o} \to t$	y	(x, t)
$x \to z \to z$	z	(x, z)
$\tilde{o} \to z \to t$	z	(x, t)
$y \to z \to z$	z	(y, z)
$y \to z \to t$	z	(y, t)
$z \to x \to x$	x	(z, x)
$z \to x \to t$	x	(z, t)
$z \to t \to x$	t	(z, x)
$z \to t \to z$	t	(z, z)
$t \to y \to y$	y	(t, y)
$t \to y \to t$	y	(t, t)
$t \to t \to x$	t	(t, x)
$t \to t \to z$	t	(t, z)

Построим диаграмму двудольного графа отношения *R* (рисунок 7).

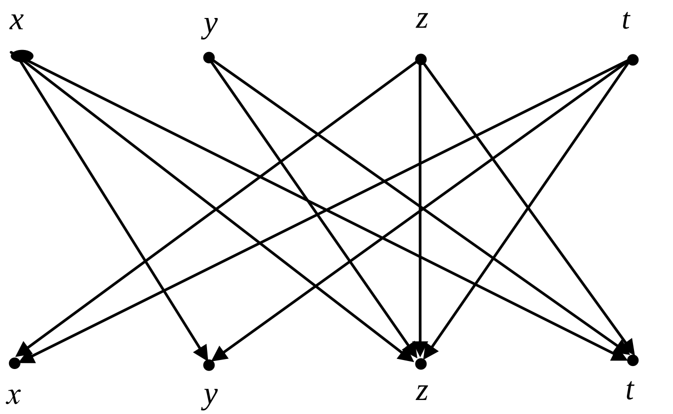


Рисунок 7 – **Диаграмма двудольного графа композиции *S* бинарных отношений**

Каждому неориентированному графу *канонически соответствует* ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления.

Пример 1.16. Определим, какими особенностями отличается граф *G*, взаимно однозначно соответствующий бинарному отношению *R*, если *R*:

1) симметрично;
2) антисимметрично;
3) рефлексивно;
4) антирефлексивно;
5) транзитивно.

Пусть бинарное отношение *R* определено на множестве $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Симметричному отношению *R* взаимно однозначно соответствует такой граф, в котором ребро (v', v'') существует тогда и только тогда, если выполнено $v'Rv''$, а значит, и $v''Rv'$ в силу симметричности.

Антисимметричному отношению *R* взаимно однозначно соответствует ориентированный граф без кратных ребер, не содержащий пар вершин с ребрами, противоположно направленными к разным вершинам.

Если *R* рефлексивно, то граф $G(R)$ без кратных ребер имеет петли во всех вершинах.

Если *R* антирефлексивно, то граф $G(R)$ без кратных ребер не имеет петель.

Если *R* транзитивно, то в графе $G(R)$ без кратных ребер для каждой пары ребер (v', v'') и (v'', v''') имеется замыкающее ребро (v', v''').

Упражнения

Упражнение 1. Задать бинарное отношение *R* из примера 1.5 списком, сопроводив каждую пару (x_i, y_j) соответствующим значением функции принадлежности и при помощи таблицы.

Упражнение 2. Исследовать бинарное отношение из примеров 1.6 и 1.7 на предмет наличия у него свойств (1–9) из п. 1.2.

Упражнение 3. Для бинарных отношений из упражнений 1 и 2 построить графы.

Упражнение 4. Бинарное отношение R на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3\}$ задано орграфом, диаграмма которого представлена на рисунке 8. Требуется задать это отношение списком и построить его матрицу, а также определить, какими из свойств (1–9) п. 1.2 это отношение обладает.

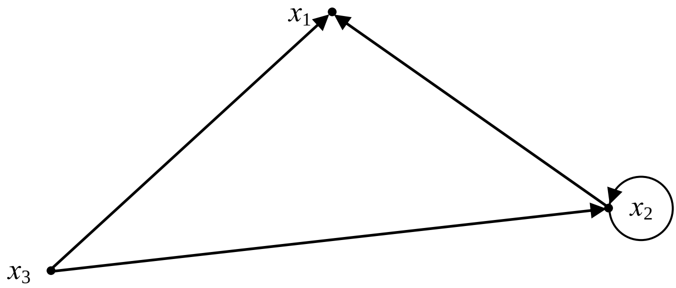


Рисунок 8 – **Диаграмма орграфа бинарного отношения**

Упражнение 5. Определить степени L^2, L^3, L^4 бинарного отношения L из примера 1.7 и транзитивное замыкание этого отношения.

Упражнение 6. Дана диаграмма орграфа некоторого бинарного отношения на множестве $X = \{ \tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3 \}$ (см. рисунок 5). Требуется:

а) определить матрицу этого бинарного отношения;

б) исследовать бинарное отношение на предмет наличия у него свойств (1–9) из п. 1.2.

Упражнение 7. Показать, что бинарное отношение R, заданное на множестве $X = \{x, y, z, t\}$ нижеследующей матрицей, является отношением нестрогого порядка:

R	x	y	z	t
x	1	0	0	0
y	1	1	0	0
z	0	0	1	0
t	1	1	0	1

.

Определить вид порядка (общий или частичный).

2. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ И НЕЧЕТКИЕ ГРАФЫ

2.1. Понятие нечеткого отношения и способы его задания

Следует отметить, что теория нечетких отношений находит приложение в задачах, в которых по традиции применяется теория обычных (четких) отношений. Аппарат теории четких отношений, как правило, используют при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы, когда связи носят дихотомический (дихотомия – сопоставленность, или противоположность, двух частей целого) характер и могут интерпретироваться в терминах «связь присутствует», «связь отсутствует», либо в случаях неприменимости по тем или иным причинам методов количественного анализа взаимосвязей и искусственной приводимости этих взаимосвязей к дихотомическому виду. Однако значительным недостатком этого подхода является то, что он приводит к потере информации о силе связей между объектами или требует проведения вычислений при разных порогах силы связей. Указанного недостатка не имеют методы анализа данных, основанные на теории нечетких отношений и позволяющие проводить качественный анализ систем с учетом различия в силе связей между объектами системы.

Описание нечеткого отношения, также как и отношения обычного, предполагает включение не только всех пар элементов исходного множества, но и значений характеристической функции (т. е. чисел из отрезка $[0;1]$), отражающих степени выполнения нечеткого отношения для этих пар. Для того чтобы описать отношение, указывают множества, на которых оно определено. Последние множества могут быть обычными или нечеткими. Бывает, что в нечетких множествах задают и обычное отношение. Мы будем рассматривать нечеткие отношения на обычных множествах.

Определение 2.1. *Нечетким отношением R на множествах X и Y* называется нечеткое подмножество декартова произведения $X \times Y$ с функцией принадлежности $\mu_R(x, y): X \times Y \to [0; 1]$.

Значение $\mu_R(x, y)$ этой функции понимается как субъективная мера или степень выполнения этого отношения и может быть любым числом из отрезка $[0;1]$.

В смысле этого определения обычные отношения выступают как частный случай нечетких отношений, функция принадлежности которых принимает лишь два значения 0 и 1.

Если $X = Y$, то нечеткое отношение R называется нечетким отношением на множестве X.

Как и для обычных отношений в теории нечетких отношений определяется *пустое нечеткое отношение* (Ø), как отношение, не содержащее ни одной пары. Можно заметить, что пустое нечеткое отношение совпадает с обычным пустым отношением. Другим крайним случаем является *универсальное нечеткое отношение* (U), содержащее все пары из произведения $X \times Y$ со значением функции $\mu_R(x, y)$ принадлежности, равным 1 для всех пар. Оно также совпадает со своим обычным универсальным отношением.

Существуют следующие способы задания нечетких отношений:

1. *Задание нечеткого бинарного отношения при помощи указания его характеристического свойства*. Например, «x намного меньше y», «x приблизительно равно y» на множестве чисел, «x не хуже y» на множестве наборов товаров и т. п.

2. *Перечисление списком* при сравнительно небольшом количестве пар в нечетком отношении. На первом месте указывают пару (x, y), а на втором – значение функции $\mu_R(x, y)$ принадлежности.

3. *Матричный способ*. Как и для обычных отношений, в случае конечности множеств X и Y $\left(X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}\right)$ для описания нечеткого отношения R используют матрицу $A_{m \times n} = (r_{ij})$, где $r_{ij} = \mu_R(x_i, y_j)$ – значение функции принадлежности пары (x_i, y_j) нечеткому отношению R $\left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\right)$. Если $r_{ij} = \alpha$, то это означает, что степень выполнения отношения $x_i R y_j$ равна α.

Пример 2.1. Пусть $X = \{$Èâàí, Äìèòðèé, Âàñèëèé$\}$, $Y = \{$Íèêîëàé , Ïåòð$\}$ – множества мужчин. Тогда нечеткое отношение $R =$ «сходство» между элементами X и Y можно записать, например, следующим образом:

R = $\{$((Иван, Николай); 0,9), ((Иван, Петр); 0,4), ((Дмитрий, Николай); 0,3), ((Дмитрий, Петр); 0,8), ((Василий, Николай); 0,2), ((Василий, Петр); 0,7)$\}$.

Матрица отношения R будет следующей:

R	Николай	Петр
Иван	0,9	0,4
Дмитрий	0,3	0,8
Василий	0,2	0,7

.

4. *Графический способ*, применяемый в случае невыполнения требования конечности множеств X и Y для описания нечеткого отношения R.

Существует некоторая промежуточная область перехода от пар, для которых отношение R явно выполняется к парам, для которых отношение R не выполняется. Отсутствие четкой границы множества R показывается изменением плотности штриховки (рисунок 9).

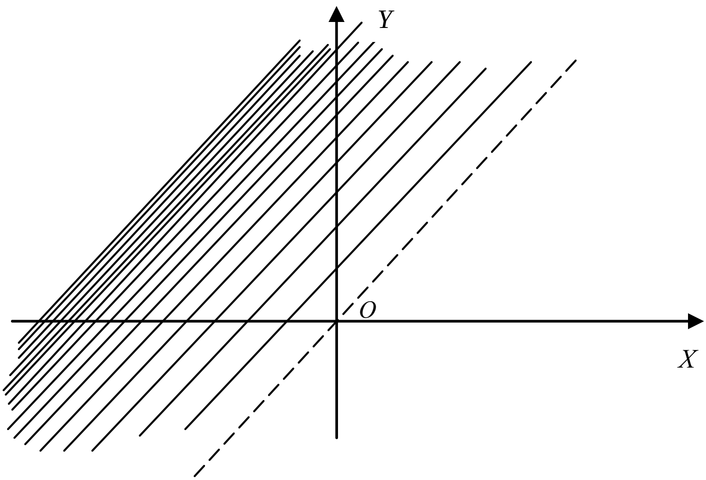


Рисунок 9 – **Графический способ задания нечеткого отношения на плоскости**

Пример 2.2. Изобразить на плоскости *XOY* множество точек, удовлетворяющих нечеткому отношению R = «y намного больше x».

Заметим, что точки прямой $y = x$ нашему отношению R не удовлетворяют. При удалении точки (x, y) от этой прямой значения функции $\mu_R(x, y)$ увеличиваются. Этот факт изображается увеличением плотности штриховки (см. рисунок 9).

В дополнение к указанным способам бинарные нечеткие отношения также могут быть заданы графически в виде некоторой поверхности $z = \mu_R(x, y)$ или множества изолированных точек в трехмерном пространстве. В этом случае две координаты (независимые переменные) соответствуют значениям универсальных множеств X, Y, а третья координата – значению $\mu_R(x, y)$ функции принадлежности, т. е. числу из интервала $[0;1]$. Например, поверхность, задаваемая функцией $z = 1 - x - y$ для $x, y \in [0;1]$, служит примером графического способа формального задания нечеткого отношения R = «x и y неотрицательны и близки к нулю». Это нечеткое отношение графически представлено на рисунке 10.

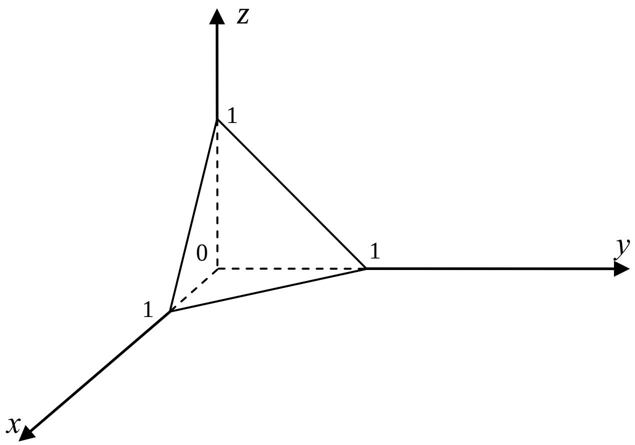


Рисунок 10 – **Графическое представление нечеткого отношения «*x* и *y* неотрицательны и близки к нулю»**

На рисунке 11 представлено нечеткое отношение R = «x и y приблизительно равны» на множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$ с матрицей

R	1	2	3	4
1	1	0,5	0,2	0,1
2	0,5	1	0,6	0,3
3	0,2	0,6	1	0,8
4	0,1	0,3	0,8	1

.

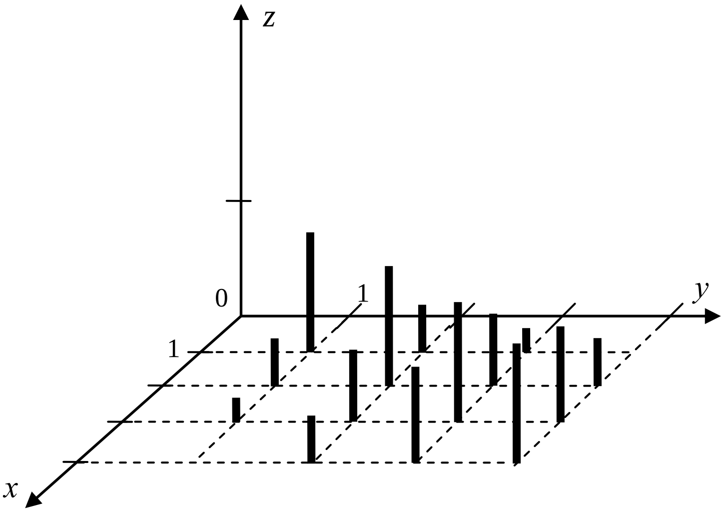


Рисунок 11 – **Графическое задание нечеткого отношения «*x* и *y* приблизительно равны для дискретных множеств»**

Для непрерывных множеств $\tilde{O} = Y = [0;\ 3]$ нечеткое отношение R = «x и y приблизительно равны» можно задать функцией принадлежности $\mu_R(x, y) = e^{-0,2(x-y)^2}$ [7]. Графическое изображение этой функции дано на рисунке 12.

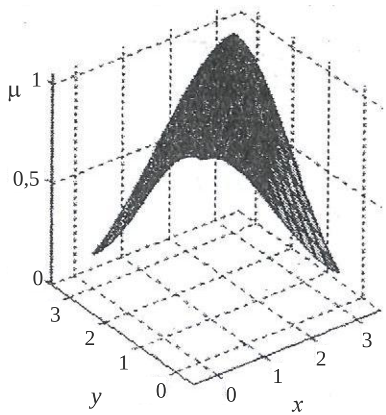


Рисунок 12 – **Графическое задание нечеткого отношения для непрерывных множеств**

5. Задание нечетких отношений *при помощи графов*. Нечеткому отношению на множествах X и Y ставится в соответствие двудольный взвешенный граф. Кроме того, нечеткому отношению на множестве X может быть поставлен в соответствие взвешенный орграф. (Подробнее этот вопрос рассматривается в п. 2.2.)

Определение 2.2. *Носителем нечеткого отношения* R называется обычное множество $S(R)$ упорядоченных пар (x, y), для которых функция $\mu_R(x, y)$ принадлежности положительна, т. е.

$$S(R) = \{(x, y) \mid \mu_R(x, y) > 0\}.$$

Пример 2.3. Пусть R – нечеткое отношение между множествами X, Y, заданное матрицей

R	$ó_1$	$ó_2$	$ó_3$	$ó_4$
$õ_1$	0,1	0	0,2	0
$õ_2$	0,3	0	0	0,9
$õ_3$	0,4	0,7	1	1

.

Тогда

$$S(R) = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}.$$

Обычное отношение $\underline{R}(x, y)$, ближайшее к нечеткому отношению $R(x, y)$, определяется следующим образом:

$$\mu_{\underline{B}}(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ åñëè } \mu_R(x, y) < 0{,}5, \\ 1, \text{ åñëè } \mu_R(x, y) > 0{,}5, \\ 0 \text{ èëè } 1, \text{ åñëè } \mu_R(x, y) = 0{,}5. \end{cases}$$

Определение 2.3. Пусть R и L – два нечеткие отношения на множествах X и Y. Нечеткое отношение R называется *содержащимся в* L (или L *содержащим* R), если для любой упорядоченной пары $(x, y) \in X \times Y$ $\mu_R(x, y) \le \mu_L(x, y)$.

Определение 2.4. *Объединением* $R \cup L (R + L)$ *двух нечетких отношений* R и L называется нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_{R \cup L}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_L(x, y)) \equiv \mu_R(x, y) \vee \mu_L(x, y)$.

Определение 2.5. *Пересечением* $R \cap L$ *двух нечетких отношений* R *и* L называется нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_{R\cap L}(x,y) = \min\left(\mu_R(x,y), \mu_L(x,y)\right) \equiv \mu_R(x,y) \wedge \mu_L(x,y)$.

Пример 2.4. Пусть нечеткие отношения R и L заданы своими матрицами

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,2	0,3	0,1	0	0,5
x_2	0,4	0,1	0,5	1	0,8
x_3	0,9	0,7	0,3	0,4	0,6
x_4	0,1	0,5	0	1	0,3

,

L	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,3	0,5	0,2	0	0,5
x_2	0,4	0,2	0,6	1	0,9
x_3	1	0,7	0,4	0,5	0,6
x_4	0,2	0,6	0	1	0,4

.

Осуществив проверку, убеждаемся, что нечеткое отношение L содержит нечеткое отношение R.

Пример 2.5. Пусть нечеткие отношения R и L заданы своими матрицами

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

,

L	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

.

Тогда

$R \cup L$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	1	1
x_3	0,6	0,9	0,4	0,2

,

$R \cap L$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	0	0,2
x_3	0,5	0	0,3	0

.

Определение 2.6. *Алгебраическим произведением* $R \cdot L$ *двух нечетких отношений* R *и* L называется нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_{R\cdot L}(x,y) = \mu_R(x,y) \cdot \mu_L(x,y)$.

Определение 2.7. *Алгебраической суммой* $R \hat{+} L$ *двух нечетких отношений* R *и* L называется нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_{R \hat{+} L}(x, y) = \mu_R(x, y) + \mu_L(x, y) - \mu_R(x, y) \cdot \mu_L(x, y)$.

Пример 2.6. Пусть R и L – нечеткие отношения из примера 2.5. Тогда

$R \cdot L$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,09	0	0,7	0
x_2	0,08	0,8	0	0,2
x_3	0,3	0	0,12	0

,

$R \hat{+} L$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,51	0,2	1	0
x_2	0,82	1	1	1
x_3	0,8	0,9	0,58	0,2

.

Определение 2.8. *Дополнением* $\overline{R}$ *нечеткого отношения* R называется нечеткое отношение с функцией принадлежности $\mu_{\overline{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$.

Пример 2.7. Пусть R – нечеткое отношение из примера 2.5. Тогда нечеткое отношение $\overline{R}$ будет представляться матрицей

$\overline{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,7	0,8	0	1
x_2	0,2	0	1	0,8
x_3	0,5	1	0,6	1

.

Определение 2.9. *Дизъюнктивной суммой* $R \oplus L$ *двух нечетких отношений* R *и* L называется нечеткое отношение, которое определяется равенством $R \oplus L = \left(R \cap \overline{L}\right) \cup \left(\overline{R} \cap L\right)$.

Множество $\rho(\tilde{O} \times Y)$ всех нечетких отношений между X и Y образует *дистрибутивную решетку* $\tilde{L}$ (другими словами, $\tilde{L}$ – частично упорядоченное множество, в котором любое непустое подмножество имеет наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю грани, а операции пересечения и объединения в $\tilde{L}$ удовлетворяют законам дистрибутивности) по отношению к операциям объединения и пересечения и удовлетворяет следующим тождествам:

1) идемпотентности:

$$R \cap R = R, R \cup R = R;$$

2) коммутативности:

$$R \cap L = L \cap R, R \cup L = L \cup R;$$

3) ассоциативности:

$$R \cap (L \cap S) = (R \cap L) \cap S,\ R \cup (L \cup S) = (R \cup L) \cup S;$$

4) дистрибутивности:

$$R \cap (L \cup S) = (R \cap L) \cup (R \cap S), R \cup (L \cap S) = (R \cup L) \cap (R \cup S).$$

Выполнение этих тождеств для множества $\rho(\tilde{O} \times Y)$ следует из выполнения соответствующих тождеств для решетки $\tilde{L}$. Во множестве $\rho(\tilde{O} \times Y)$ выполняется также следующее соотношение:

$$L \subseteq S \Rightarrow R \cup L \subseteq R \cup S, R \cap L = R \cap S.$$

Из полноты решетки $\tilde{L}$ вытекает, что она обладает наименьшим (0) и наибольшим (I) элементами. Эти элементы определяют, соответственно, *пустое* и *универсальное* нечеткие отношения:

$$\forall \tilde{o} \forall \acute{o}\, \varnothing(x, y) = 0,\ \forall \tilde{o} \forall \acute{o}\, U(x, y) = \mathrm{I}.$$

Пусть нам даны нечеткое отношение $R = \{(x_i, y_j); \mu_R(x_i, y_j)\}$, заданное на множествах *X*, *Y*, и нечеткое отношение $L = \{(y_j, z_k);$ $\mu_L(y_j, z_k)\}$, заданное на множествах *Y* и *Z*.

Определение 2.10. *Максиминной* $(max - min)$ *композицией* $R \circ L$ *двух нечетких отношений* R *и* L называется нечеткое отношение *S* на множествах X, Z, функция принадлежности которого определяется выражением

$$\mu_{R \circ L}(x_i, z_k) = \underbrace{\max}_{y_j \in Y}\Big(\min\big(\mu_R(x_i, y_j), \mu_L(y_j, z_k)\big)\Big),\ \big(\forall (x_i, z_k) \in X \times Z\big). \quad (2.1)$$

Определенную таким образом композицию бинарных нечетких отношений иногда называют *максиминной сверткой* нечетких отношений.

Пример 2.8. Пусть нечеткие отношения R и L заданы матрицами

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,2	0,3	1	0	0,8
x_2	0,7	0,4	0	0,1	1
x_3	0,1	0	0,9	0,5	0

,

L	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,4	1	0,5	0,7
y_2	0,6	0,2	1	0
y_3	0,1	1	0	0,8
y_4	0	0,3	0,6	0,4
y_5	1	0,4	0,7	1

.

Вычислим элементы матрицы нечеткого отношения $S = R \circ L$. Для этого определим вначале элемент $s_{11} = \mu_{L \circ R}(x_1, z_1)$ этой матрицы:

1) $\min\left(\mu_R(x_1, y_1); \mu_L(y_1, z_1)\right) = \min\left(0{,}2; 0{,}4\right) = 0{,}2$;

2) $\min\left(\mu_R(x_1, y_2); \mu_L(y_2, z_1)\right) = \min\left(0{,}3; 0{,}6\right) = 0{,}3$;

3) $\min\left(\mu_R(x_1, y_3); \mu_L(y_3, z_1)\right) = \min\left(1; 0{,}1\right) = 0{,}1$;

4) $\min\left(\mu_R(x_1, y_4); \mu_L(y_4, z_1)\right) = \min\left(0; 0\right) = 0$;

5) $\min\left(\mu_R(x_1, y_5); \mu_L(y_5, z_1)\right) = \min\left(0{,}8; 1\right) = 0{,}8$.

По формуле (2.1) находим:

$$s_{11} = \mu_S(x_1, z_1) = \max(0{,}2; 0{,}3; 0{,}1; 0; 0{,}8) = 0{,}8.$$

Далее вычислим элемент $s_{12} = \mu_{R \circ L}(x_1, z_2)$ матрицы нечеткого отношения $R \circ L$:

1) $\min\left(\mu_R(x_1, y_1); \mu_L(y_1, z_2)\right) = \min\left(0{,}2; 1\right) = 0{,}2$;

2) $\min\left(\mu_R(x_1, y_2); \mu_L(y_2, z_2)\right) = \min\left(0{,}3; 0{,}2\right) = 0{,}2$;

3) $\min\left(\mu_R(x_1, y_3); \mu_L(y_3, z_2)\right) = \min\left(1; 1\right) = 1$;

4) $\min\left(\mu_R(x_1, y_4); \mu_L(y_4, z_2)\right) = \min\left(0; 0{,}3\right) = 0$;

5) $\min\left(\mu_R(x_1, y_5); \mu_L(y_5, z_2)\right) = \min\left(0{,}8; 0{,}4\right) = 0{,}4$.

Тогда $\mu_{R \circ L}(x_1, z_2) = \max\left(\min \mu_R(x_1, y_i); \mu_L(y_i, z_2)\right) = \max\left(0{,}2; 0{,}2; 1; 0; 0{,}4\right) = 1 \left(i = \overline{1{,}5}\right)$.

Аналогичным образом вычисляя все остальные элементы матрицы нечеткого отношения $R \circ L$, окончательно получим ее выражение:

$R \circ L$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,8	1	0,7	0,8
x_2	1	0,7	0,7	1
x_3	0,1	0,9	0,5	0,8

.

Нечеткое отношение E на множестве X с функцией

$$\mu_{\text{Å}}(\tilde{o}, \acute{o}) = \begin{cases} 1, \text{ åñëè } \tilde{o} = \acute{o}, \\ 0, \text{ åñëè } \tilde{o} \neq \acute{o} \end{cases}$$

играет роль единицы по отношению к операции композиции, т. е. для любого нечеткого отношения R на X выполняется равенство

$$R \circ E = E \circ R = R.$$

В теории четких отношений отношение E называется *отношением равенства*.

Достоинством понятия нечеткого отношения является то, что оно достаточно хорошо описывает многие понятия из самых разных отраслей науки. К числу последних относится понятие инциденции (влияния, воздействия). Концепция инциденции ассоциируется с идеей совокупности объектов на некоторую другую совокупность или на саму себя. Так, плохая погода имеет инциденцию на продажу теплого осеннего платья (благоприятную), на продажу зонтиков (благоприятную), на посещаемость кинотеатров (благоприятную), на посещаемость пляжа (неблагоприятную). С математической точки зрения понятие инциденции связано с понятием функции.

Пример 2.9. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ – конечные множества из примера 2.8, на которых задано нечеткое отношение R.

Можно утверждать, что множество X каким-то образом воздействует (имеет инциденцию) на множество Y. Если $\mu_R(x_i, y_j) = \alpha$, то считается, что уровень инциденции x_i на y_j равен $\alpha \left(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}; 0 \le \alpha \le 1 \right)$. Можно предполагать, что инциденция x_1 на y_4 не существует, так как $\mu_R(x_1, y_4) = 0$. Мы утверждаем, что x_1 на y_1 воздействует почти без инциденции, так как $\mu_R(x_1, y_1) = 0{,}2$, и что x_3 на y_1 воздействует практически без инциденции, так как $\mu_R(x_3, y_1) = 0{,}1$. Так как $\mu_R(x_1, y_2) = 0{,}3$, то будем говорить, что инциденция x_1 на $\acute{o}_2$ является очень слабой. Так как $\mu_R(x_2, y_2) = 0{,}4$, то мы утверждаем, что инциденция x_2 на y_2 является слабой. В случае равенства значения функции принадлежности числу 0,5 говорят о средней инциденции, числу 0,6 – об ощутимой инциденции, числу 0,7 – о значительной инциденции, числу 0,8 – о сильной инциденции. В нашем случае $\mu_R(x_3, y_3) = 0{,}9$, $\mu_R(x_1, y_3) = 1$, и можно говорить о очень сильной и наибольшей инциденции x_3 на $\acute{o}_3$ и x_1 на y_3 соответственно. Операция максиминной композиции двух и более нечетких отношений позволяет рассмотреть инциденции второго и более высоких порядков.

Пример 2.10. В настоящее время в регионах страны идет процесс интенсивного развития сети рынков. Однако имеются проблемы с планированием их развития, инвестирования в инфраструктуру, а также ранжированием этих рынков. Наиболее достоверная оценка сети рынков может способствовать улучшению управления ассортиментом различного рода товаров. Допустим, что имеется некоторая схема расселения покупателей в семи районах города при наличии пяти основных рынков [8].

Пусть $\tilde{O} = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4, \tilde{o}_5, \tilde{o}_6, \tilde{o}_7\}$ – множество покупателей, расселенных в семи микрорайонах, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ – множество важных факторов рынка, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ – множество рынков. В качестве факторов, характеризующих сеть рынков, были выбраны следующие:

1) $\acute{o}_1$ – доступность рынков в целом по транспорту и времени;
2) $\acute{o}_2$ – качество обслуживания;
3) $\acute{o}_3$ – цена на товары;

4) $ó_4$ – качество товаров;

5) $ó_5$ – ассортимент товаров на рынке.

Предположим, что R – нечеткое отношение на множествах X и Y, а L – нечеткое отношение на множествах Y и Z. Пусть, по экспертным данным, матрицы нечетких отношений R, L имеют следующий вид:

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,8	0,5	0,7	0,4	0,3
x_2	0,6	1	0,8	0,6	1
x_3	0,7	0,5	0,7	0,6	0,3
x_4	1	0,7	1	0,7	1
x_5	1	0,8	1	0,7	0,8
x_6	1	0,7	0,5	0,8	0,8
x_7	0,7	0,6	1	0,8	0,5

,

L	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
y_1	0,5	0,8	1	1	0,3
y_2	0,5	0,4	0,5	0,4	0,2
y_3	0,8	0,8	1	1	0,8
y_4	0,8	0,6	0,7	0,6	0,6
y_5	1	0,8	0,8	0,6	0,4

.

Тогда композицией этих бинарных нечетких отношений будет бинарное нечеткое отношение $S = R \circ L$ с матрицей

S	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
x_1	0,7	0,8	0,8	0,8	0,7
x_2	1	0,8	0,8	0,8	0,8
x_3	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
x_4	1	0,8	1	1	0,8
x_5	0,8	0,8	1	1	0,8
x_6	0,8	0,8	1	1	0,6
x_7	1	0,8	1	1	0,8

.

Матрица J_S отношения S дает оценку степени благоприятствования рынка z_k покупателям микрорайона $\tilde{o}_i$ города.

Рассмотрим теперь опосредованные влияния в композиции $S = R \circ L$ нечетких отношений R и L. Например, $\mu_R(x_1, y_5) = 0{,}3 < 0{,}5$. Другими словами, суждение «покупатели микрорайона $\tilde{o}_1$ удовлетворены ассортиментом товаров на рынке» является скорее ложным, чем истинным. Кроме того, $\mu_L(y_5, z_5) = 0{,}4 < 0{,}5$, что говорит о сравнительно невысоком ассортименте товаров на рынке z_5. Но $\mu_S(x_1, z_5) =$ = 0,7, что указывает на существование значительной инциденции $\tilde{o}_1$ на z_5. Определим элементы, являющиеся посредниками данного влияния. Для этого вычислим схематически значение $\mu_S(x_1, z_5)$ по формуле (2.1):

$$\mu_S(x_1, z_5) = \max(\min(\mu_R(x_1, y_1); \mu_L(y_1 z_5));$$

$$\min(\mu_R(x_1, y_2); \mu_L(y_2, z_5)); \min(\mu_R(x_1, y_3); \mu_L(y_3, z_5));$$

$$\min(\mu_R(x_1, y_4); \mu_L(y_4, z_5)); \min(\mu_R(x_1, y_5); \mu_L(y_5, z_5)) =$$

$$= \max(\min(0{,}8;\ 0{,}3);\ \min(0{,}5;\ 0{,}2);\ \min(0{,}7;\ 0{,}8);\ \min(0{,}4;\ 0{,}6);$$

$$\min(0{,}3;\ 0{,}4) = \max(0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}7;\ 0{,}4;\ 0{,}3) = 0{,}7.$$

Делаем вывод, что влияние x_1 на z_5 в композиции $S = R \circ L$ отношений R и L осуществляется через y_3.

2.2. Нечеткие графы

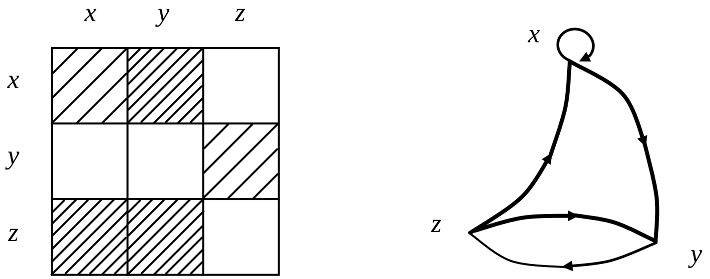
Наряду с понятием нечеткого отношения к числу понятий, играющих основную роль в приложениях математики, относится и понятие нечеткого графа. Так же как и многие другие понятия дискретной математики, понятие графа обобщено на случай нечетких подмножеств.

Пусть даны два множества X и Y, $x \in X$, $y \in Y$. Множество упорядоченных пар (x, y) определяет прямое произведение $X \times Y$.

Определение 2.11. *Нечетким графом* называется нечеткое множество G с функцией принадлежности $\mu_G(x,y): X \times Y \to [0;1]$.

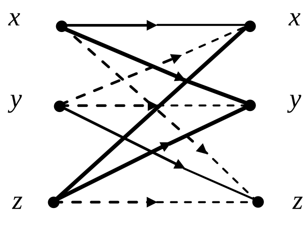
Графом Бержа называется такой граф G, где $X = Y$ и эти множества являются счетными, а граф G представляет собой подмножество упорядоченных пар $(x,y) \in G \subset X \times X$, такое, что $G \cap \overline{G} = \varnothing$ и $G \cup \overline{G} = X \times X$.

Для таких графов, являющихся лишь частным случаем графов, которые изучаются в обычной теории графов, можно получить обобщение на случай нечетких графов. В частности, на рисунке 13 (*а, б, в, г*) изображен один и тот же нечеткий граф Бержа, в то время как на рисунке 14 (*а, б, в, г*) показан один и тот же обычный граф Бержа.



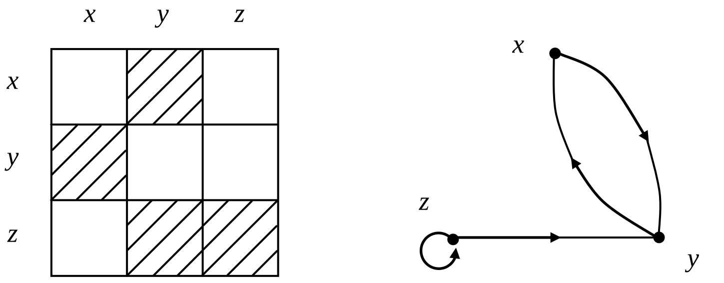
а *б*

	x	y	z
x	0,5	1	0
y	0	0	0,5
z	1	1	0



в *г*

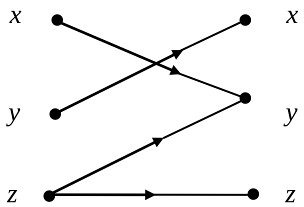
Рисунок 13 – **Нечеткий граф Бержа**



а *б*

	x	y	z
x	0	1	0
y	1	0	0
z	0	1	1

в



г

Рисунок 14 – **Четкий граф Бержа**

По аналогии с теорией обычных множеств понятие нечеткого графа достаточно хорошо объясняется в терминах понятия нечеткого отношения.

Определение 2.12. *Графом бинарного нечеткого отношения R* на множестве *X* называется взвешенный орграф, т. е. такой орграф, каждая дуга (*x*, *y*) ($\tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O}$) которого имеет вес, равный значению функции $\mu_{\hat{E}}(\tilde{o}, \acute{o})$ принадлежности.

Пример 2.11. Пусть *R* – бинарное нечеткое отношение «*x* значительно больше, чем *y*», заданное на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Это нечеткое отношение можно задать списком в виде множества пар *R* = $=\{$((5; 1); 1), ((4; 1); 0,9), ((3; 1); 0,6), ((2; 1); 0,3), ((5; 2); 0,9), ((4; 2);

0,6); ((3; 2); 0,3), ((5; 3); 0,6), ((4; 3); 0,3), ((5; 4); 0,3)$\}$. Матрицу J_R этого нечеткого отношения представим в виде следующей таблицы:

R	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0,3	0	0	0	0
3	0,6	0,3	0	0	0
4	0,9	0,6	0,3	0	0
5	1	0,9	0,6	0,3	0

.

На основании определения 2.12 строим орграф данного нечеткого отношения (рисунок 15).

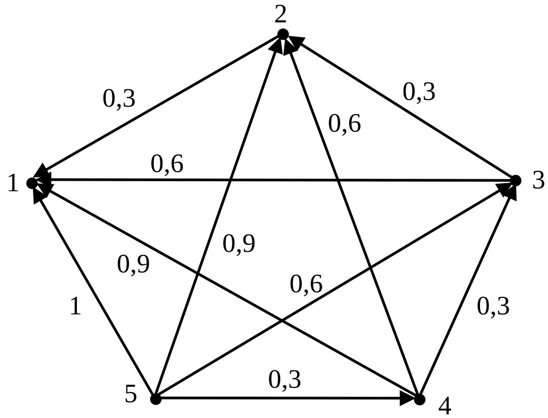


Рисунок 15 – **Орграф нечеткого отношения «*x* намного больше, чем *y*»**

Бинарные нечеткие отношения R на множествах X, Y удобно изображать в виде двудольных взвешенных орграфов, у которых стрелки направлены от элементов множества X к их образам во множестве Y, причем дуга (x, y), связывающая элементы $\tilde{o} \in \tilde{O}$ и $y \in Y$, существует тогда и только тогда, когда xRy и вес этой дуги равен соответствующему значению функции $\mu_R(x, y)$ принадлежности.

Пример 2.12. Пусть бинарное нечеткое отношение R на множествах $\tilde{O} = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ задано при помощи матрицы

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0,1	0,5	0
$\tilde{o}_2$	1	0	0,6	0,2
$\tilde{o}_3$	0,1	0,2	0	0,7

.

Двудольный взвешенный орграф этого отношения изображен на рисунке 16.

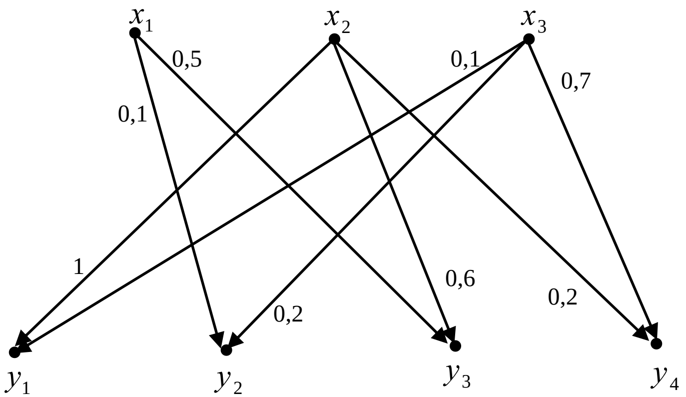


Рисунок 16 – **Двудольный взвешенный орграф бинарного отношения**

Пример 2.13. Пусть R – бинарное нечеткое отношение из примера 2.12 и L – бинарное нечеткое отношение, заданное матрицей

L	z_1	z_2	z_3
y_1	0,8	0	1
y_2	0	0,4	0,9
y_3	0,3	1	0,5
y_4	0,6	0,7	0

.

Найдем при помощи двудольных взвешенных графов композицию $S = R \circ L$ этих бинарных нечетких отношений R и L. С этой целью построим на рисунке 17 двудольные взвешенные графы этих нечетких отношений и объединим их. Затем выпишем все пути, которые ведут от элементов множества X к их образам в отношении $S = R \circ L$, промежуточные элементы в этих путях, а также согласно формуле (2.1) значение функции $\mu_S(x, y)$ принадлежности для каждой пары (x_i, z_k) бинарного нечеткого отношения S (таблица 4).

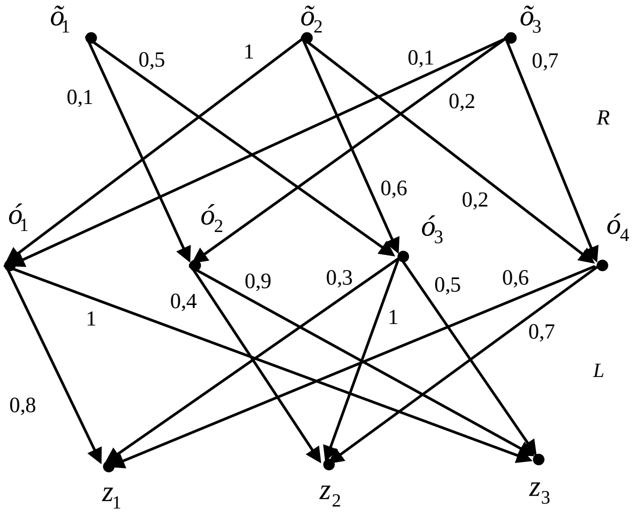


Рисунок 17 – **Объединение двудольных взвешенных орграфов в композиции нечетких отношений**

Таблица 4 – **Пути от элементов множества к их образам в композиции нечетких отношений**

Пути от элементов множества	Опосредованный элемент	Минимум значений функции принадлежности	Значение функции $\mu_S(x_i, z_k)$
$x_1 \to y_3 \to z_1$	y_3	Min (0,5; 0,3) = 0,3	$\mu_S(x_1, z_1) = 0{,}3$
$x_1 \to y_2 \to z_2$ $x_1 \to y_3 \to z_2$	y_2 y_3	Min (0,1; 0,4) = 0,1 Min (0,5; 1) = 0,5	$\mu_S(x_1, z_2) =$ = max (0,1; 0,5) = 0,5
$x_1 \to y_2 \to z_3$ $x_1 \to y_3 \to z_3$	y_2 y_3	Min (0,1; 0,9) = 0,1 Min (0,5; 0,5) = 0,5	$\mu_S(x_1, z_3) =$ = max (0,1; 0,5) = 0,5
$x_2 \to y_1 \to z_1$ $x_2 \to y_3 \to z_1$ $x_2 \to y_4 \to z_1$	y_1 y_3 y_4	Min (1; 0,8) = 0,8 Min (0,6; 0,3) = 0,3 Min (0,2; 0,6) = 0,2	$\mu_S(x_2, z_1) =$ = max (0,8; 0,3; 0,2) = = 0,8

Окончание таблицы 4

Пути от элементов множества	Опосредованный элемент	Минимум значений функции принадлежности	Значение функции $\mu_S(x_i, z_k)$
$x_2 \to y_3 \to z_2$ $x_2 \to y_4 \to z_2$	y_3 y_4	Min (0,6; 1) = 0,6 Min (0,2; 0,7) = 0,2	$\mu_S(x_2, z_2) =$ = max (0,6; 0,2) = 0,6
$x_2 \to y_1 \to z_3$ $x_2 \to y_3 \to z_3$	y_1 y_3	Min (1; 1) = 1 Min (0,6; 0,5) = 0,5	$\mu_S(x_2, z_3) =$ = max (1; 0,5) = 1
$x_3 \to y_1 \to z_1$ $x_3 \to y_4 \to z_1$	y_1 y_4	Min (0,1; 0,8) = 0,1 Min (0,7; 0,6) = 0,6	$\mu_S(x_3, z_1) =$ = max (0,1; 0,6) = 0,6
$x_3 \to y_2 \to z_2$ $x_3 \to y_4 \to z_2$	y_2 y_4	Min (0,2; 0,4) = 0,2 Min (0,7; 0,7) = 0,7	$\mu_S(x_3, z_2) =$ = max (0,2; 0,7) = 0,7
$x_3 \to y_1 \to z_3$ $x_3 \to y_2 \to z_3$	y_1 y_2	Min (0,1; 1) = 0,1 Min (0,2; 0,9) = 0,2	$\mu_S(x_3, z_3) =$ = max (0,1; 0,2) = 0,2

Матрица бинарного отношения S имеет вид

S	z_1	z_2	z_3
x_1	0,3	0,5	0,5
x_2	0,8	0,6	1
x_3	0,6	0,7	0,2

.

На основе полученных данных строим двудольный взвешенный орграф бинарного отношения $S = R \circ L$ (рисунок 18).

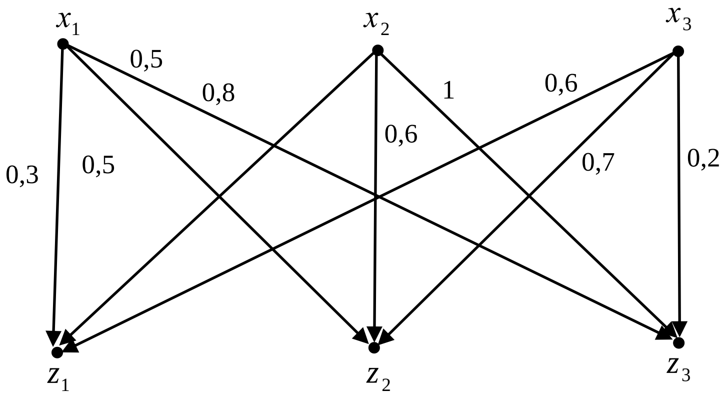


Рисунок 18 – **Двудольный взвешенный орграф композиции нечетких отношений**

2.3. Проекции нечетких отношений

Важную роль в теории нечетких множеств играет понятие проекции нечетких отношений [9].

Пример 2.14. Рассмотрим бинарное нечеткое отношение R = = «функция приблизительно равна корню квадратному из аргумента», заданное на множествах $X = Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ при помощи матрицы

R	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	$y_5 = 4$	$y_6 = 5$	$y_7 = 6$	$y_8 = 7$
$x_1 = 0$	1	0,3	0,1	0	0	0	0	0
$x_2 = 1$	0,3	1	0,1	0	0	0	0	0
$x_3 = 2$	0,1	0,7	0,6	0,1	0	0	0	0
$x_4 = 3$	0	0,5	0,8	0,2	0	0	0	0
$x_5 = 4$	0	0,3	1	0,4	0	0	0	0
$x_6 = 5$	0	0,2	0,8	0,6	0,1	0	0	0
$x_7 = 6$	0	0,2	0,7	0,5	0,1	0	0	0
$x_8 = 7$	0	0	0,5	0,8	0,4	0,1	0	0

.

Определение 2.13. *Проекцией бинарного отношения R на множество X* называется нечеткое множество R_X с функцией принадлежности

$$\mu_{R_X}(x_i) = \max_{y_j\,(j=1,\ldots,n)} \mu_R(x_i, y_j) \text{ при } i = \overline{1,m}. \tag{2.2}$$

Определение 2.14. *Проекцией бинарного отношения R на множество Y* называется нечеткое множество R_Y с функцией принадлежности

$$\mu_{R_Y}(y_j) = \max_{x_i\,(i=1,\ldots,m)} \mu_R(x_i, y_j) \text{ при } j = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Пример 2.15. Пусть R – нечеткое отношение из примера 2.14. Тогда проекцией этого отношения на множество X есть нечеткое множество R_X, значения функции принадлежности которого образуют транспонированный столбец

1	1	0,7	0,8	1	0,8	0,7	0,8

.

Это нечеткое множество R_X можно задать в виде таблицы (таблица 5).

Таблица 5

$\tilde{o}_i$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	$x_5 = 4$	$x_6 = 5$	$x_7 = 6$	$x_8 = 7$
$\mu_{R_X}(x_i)$	1	1	0,7	0,8	1	0,8	0,7	0,8

Аналогично проекцией нечеткого отношения R на множество Y является нечеткое множество R_Y, значениями функции принадлежности которого является столбец

1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0

.

По аналогии зададим нечеткое множество R_Y (таблица 6).

Таблица 6

y_j	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	$y_5 = 4$	$y_6 = 5$	$y_7 = 6$	$y_8 = 7$
$\mu_{R_Y}(y_j)$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0

Существенную роль в теории нечетких множеств играют цилиндрические продолжения проекций бинарного нечеткого отношения.

Определение 2.15. *Цилиндрическим продолжением проекции* $R_{\tilde{O}}$ *бинарного отношения* R называется нечеткое отношение $R_{X\ddot{O}}(\tilde{o}, \acute{o})$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{O}\ddot{O}}(\tilde{o}, \acute{o}) = \mu_{R_X}(x) \text{ для всех } y \in Y .$$

Определение 2.16. *Цилиндрическим продолжением проекции* R_Y *бинарного отношения* R называется нечеткое отношение $R_{Y\ddot{O}}(\tilde{o}, \acute{o})$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{Y\ddot{O}}(\tilde{o}, \acute{o}) = \mu_{R_Y}(y) \text{ для всех } x \in X .$$

Графическое изображение понятия цилиндрического отношения представлено на рисунке 19.

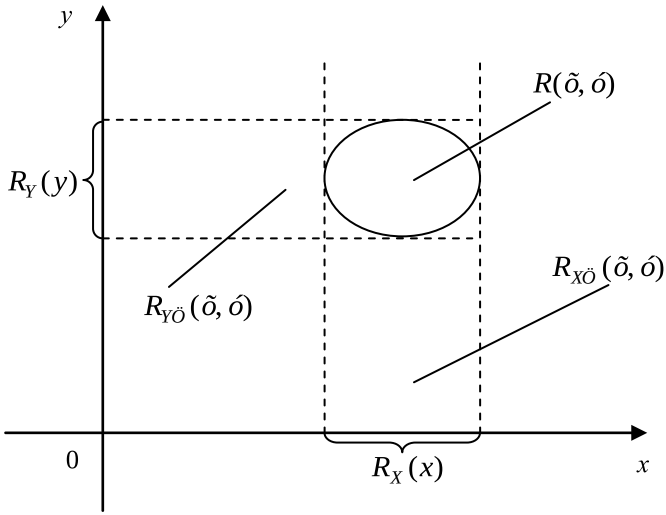


Рисунок 19 – **Графическое представление понятия цилиндрического отношения**

Цилиндрические продолжения проекций нечеткого отношения называются в литературе иначе – *цилиндрическими продолжениями нечеткого множества*, или *цилиндрическими множествами нечетких множеств*.

Пример 2.16. Цилиндрические продолжения $R_{XÖ}(õ, ó)$ и $R_{YÖ}(õ, ó)$ проекций нечеткого отношения R из примеров 2.14 и 2.15 представлены их матрицами

$R_{XÖ}(õ, ó)$	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	$y_5 = 4$	$y_6 = 5$	$y_7 = 6$	$y_8 = 7$
$x_1 = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_2 = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_3 = 2$	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
$x_4 = 3$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
$x_5 = 4$	1	1	1	1	1	1	1	1
$x_6 = 5$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
$x_7 = 6$	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
$x_8 = 7$	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8

,

$R_{YÖ}(\tilde{o}, \acute{o})$	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 2$	$y_4 = 3$	$y_5 = 4$	$y_6 = 5$	$y_7 = 6$	$y_8 = 7$
$x_1 = 0$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_2 = 1$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_3 = 2$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_4 = 3$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_5 = 4$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_6 = 5$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_7 = 6$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0
$x_8 = 7$	1	1	1	0,8	0,4	0,1	0	0

.

Упражнения

Упражнение 1. Пусть R и L – нечеткие отношения, заданные на множестве $X = \{x, y, z, t\}$ матрицами

R	x	y	z	t
x	0,1	0,6	0	1
y	0	0,4	0,7	0,2
z	0,5	0	1	0,8
t	0,7	1	0	0,9

,

L	x	y	z	t
x	0	0,3	0,4	0,7
y	1	0	0,5	0,6
z	0,4	0,8	0	0
t	0	1	0,3	1

.

Требуется:

а) найти объединение, пересечение, алгебраические пересечение и сумму, дополнение и дизъюнктивную сумму этих отношений;

б) представить эти нечеткие отношения в виде двудольных взвешенных графов и при помощи объединения последних найти двудольный взвешенный граф композиции $S = R \circ L$ этих отношений;

в) представить композицию $S = R \circ L$ отношений R, L в виде матрицы.

Упражнение 2. Пусть R и L – нечеткие отношения из примера 2.10.

Требуется:

а) задать эти отношения в виде двудольных взвешенных графов;

б) найти композицию этих отношений при помощи объединения графов.

Упражнение 3. Пусть R – нечеткое отношение «x значительно больше, чем y» из примера 2.11. Требуется найти степени R^2, R^3 этого нечеткого отношения при помощи двудольных графов и построить матрицы этих степеней.

Упражнение 4. Нечеткое отношение S, заданное двудольным взвешенным орграфом на рисунке 18, представить в виде списка и матричным способом.

Упражнение 5. Нечеткое отношение R = «быть намного меньше» задано на множестве $X = \{2, 5, 7, 9\}$ при помощи матрицы

R	2	5	7	9
2	0	0,4	0,7	1
5	0	0	0,3	0,6
7	0	0	0	0,3
9	0	0	0	0

.

Требуется:

а) задать это отношение графическим способом;

б) построить двудольный взвешенный орграф этого отношения;

в) найти степени R^2, R^3, R^4 этого отношения.

Упражнение 6. Нечеткое отношение R задано взвешенным орграфом на рисунке 20.

Требуется:

а) задать это нечеткое отношение списком и матричным способом;

б) найти степени R^2, R^3, R^4 этого бинарного отношения;

в) задать эти степени R^2, R^3, R^4 при помощи матрицы.

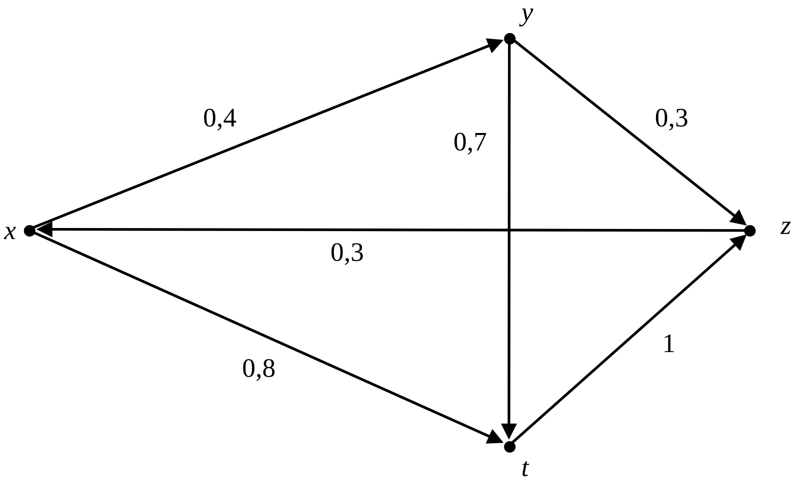


Рисунок 20 – **Взвешенный орграф нечеткого отношения**

Упражнение 7. Пусть R = «функция приблизительно равна кубу аргумента» – нечеткое отношение на множествах $X = Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, заданное при помощи матрицы

R	ó$_1$ = 0	ó$_2$ = 1	ó$_3$ = 2	ó$_4$ = 3	ó$_5$ = 4	ó$_6$ = 5
õ$_1$ = 0	1	0,4	0,1	0	0	0
õ$_2$ = 1	0,4	1	0,5	0,1	0	0
õ$_3$ = 2	0	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3
õ$_4$ = 3	0	0	0	0	0	0
õ$_5$ = 4	0	0	0	0	0	0
õ$_6$ = 5	0	0	0	0	0	0

.

Требуется:

а) задать это отношение в виде двудольного взвешенного орграфа;

б) найти проекции нечеткого отношения R на множества X и Y;

в) найти цилиндрические продолжения проекций этого отношения на X и Y.

3. СВОЙСТВА НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ

3.1. Свойства нечетких отношений на множестве

Различные типы *нечетких отношений* определяются с помощью свойств, аналогичных свойствам обычных отношений. Существенной чертой теории нечетких отношений является наличие различных способов обобщения этих свойств. В данном пособии рассматриваются лишь нечеткие отношения на множестве *X*.

Выделяют следующие свойства нечетких отношений:

1. *Рефлексивность*:

$$E \subseteq R, \forall x \in X \quad \mu_R(x,x) = 1. \tag{3.1}$$

Данная запись означает, что в матрице J_R рефлексивного отношения *R* на главной диагонали находятся лишь одни единицы. Особенностью орграфа рефлексивного отношения является наличие петель у каждой его вершины.

Примером нечеткого рефлексивного отношения является нечеткое отношение *R* = «*x* и *y* приблизительно равны» на множестве *X* = $= \{1, 2, 3, 4\}$ из примера 2.2.

2. *Слабая рефлексивность*:

$$\forall \tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O} \quad \mu_R(x,y) \leq \mu_R(x,x). \tag{3.2}$$

Пример 3.1. Пусть *R* – нечеткое отношение, заданное на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ матрицей

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	1	0,3	0,5	0,6
$\tilde{o}_2$	0,1	0,7	0,4	0,2
$\tilde{o}_3$	0,9	0	1	0,7
$\tilde{o}_4$	0,5	0,3	0	1

.

Можно увидеть, что это нечеткое отношение не является рефлексивным, но является слабо рефлексивным, так как выражение (3.2) выполняется для всех пар $(\tilde{o}, \acute{o}) \in \tilde{O} \times \tilde{O}$. Требование слабой рефлексивности является ослаблением требования (3.1).

3. *Сильная рефлексивность*:

$$\mu_R(x, x) = 1 \text{для всех } x \in X \text{ и } \mu_R(x, y) < 1 \text{ для всех } x \neq y .$$

В орграфе сильно рефлексивного отношения все вершины соединены дугами.

Пример 3.2. Пусть R – нечеткое отношение, заданное на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ матрицей

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	1	0,4	0	0,5
$\tilde{o}_2$	0,9	1	0,8	0,7
$\tilde{o}_3$	0,1	0,2	1	0,6
$\tilde{o}_4$	0	0,5	0,7	1

.

Из матрицы J_R видно, что это отношение является сильно рефлексивным. Требование сильной рефлексивности является усилением требования (3.1).

4. *Антирефлексивность:*

$$R \cap E = \varnothing, \text{ т. е. } \forall x \in X \quad \mu(x, x) = 0 . \qquad (3.3).$$

Требование антирефлексивности нечеткого отношения R означает, что все элементы главной диагонали матрицы J_R этого отношения равны нулю. Антирефлексивным является дополнение любого рефлексивного отношения.

Пример 3.3. Нечеткое отношение R, заданное на множестве $X =$ $= \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ матрицей

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0,4	0	0,8
$\tilde{o}_2$	0,2	0	0,5	0,6
$\tilde{o}_3$	0,9	0,7	0	0,3
$\tilde{o}_4$	0,2	1	0,1	0

,

является антирефлексивным, поскольку для всех его пар выполняется требование (3.3).

5. *Слабая антирефлексивность*:

$$\forall \tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O} \quad \mu_R(x,x) \le \mu_R(x,y)\,. \qquad (3.4)$$

Требование слабой антирефлексивности заключается в ослаблении условия антирефлексивности (3.3).

Пример 3.4. Нечеткое отношение, которое задано на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ при помощи нижеследующей матрицы, является слабо антирефлексивным:

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0,2	0,3	0,7	0,8
$\tilde{o}_2$	0,2	0	0,3	1
$\tilde{o}_3$	0,9	0,5	0	0,9
$\tilde{o}_4$	0,4	0,6	0,6	0

.

Требование (3.4) выполняется.

6. *Сильная антирефлексивность*:

$$\mu_R(x,x) = 0, \mu_R(x,y) > 0 \text{ для всех } x \ne y\,.$$

Требование сильной антирефлексивности означает усиление требования (3.3) антирефлексивности нечеткого отношения. В орграфах как антирефлексивного, так сильно антирефлексивного отношений, нет петель.

Пример 3.5. Нечеткое отношение, заданное на указанном ранее множестве X (см. примеры 3.2–3.4) с помощью нижеследующей матрицы, является сильно антирефлексивным:

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0,3	0,4	0,8
$\tilde{o}_2$	0,7	0	0,3	1
$\tilde{o}_3$	0,9	0,1	0	0,9
$\tilde{o}_4$	0,5	0,6	0,6	0

.

7. *Симметричность*:

$$R = R^{-1},\ \forall x, y \in X \text{ или } R(x, y) = R(y, x). \tag{3.5}$$

Нечеткие симметричные отношения обладают одним характеризующим их свойством: нечеткое отношение на множестве X является симметричным тогда и только тогда, когда его матрица J_R симметрична относительно своей главной диагонали.

Примером нечеткого симметричного отношения является нечеткое отношение R = «x и y приблизительно равны» на множестве $X =$ $= \{1, 2, 3, 4\}$ из примера 2.2. Симметричное отношение изображают обычно при помощи неориентированных взвешенных графов.

8. *Антисимметричность:*

$$R \cap R^{-1} \subset E, \text{ т. е. } \forall x, y \in X\,(x \neq y)\ \ \mu_{R\cap R^{-1}}(x, y) = 0. \tag{3.6}$$

Заметим, что в некоторых источниках [10] дается несколько иное определение антисимметричности:

$$\mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x) \text{ или } \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0. \tag{3.7}$$

Пример 3.6. Нечеткое отношение, которое задано на множестве X с помощью нижеследующей матрицы, является антисимметричным:

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0,3	0	0	0,1
$\tilde{o}_2$	1	0	1	0
$\tilde{o}_3$	0,9	0	0	0,9
$\tilde{o}_4$	0	0,6	0	1

.

9. *Асимметричность:*

$$R \cap R^{-1} = \varnothing, \text{ т. е. } \forall \tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O} \;\; \mu_{R \cap R^{-1}}(x, y) = 0.$$

Можно заметить, что нечеткое асимметричное отношение является частным случаем антисимметричных отношений.

Теорема 3.1. *Всякое асимметричное нечеткое отношение является антирефлексивным.*

Примером нечеткого асимметричного отношения является нечеткое отношение R = «x значительно больше, чем y», заданное на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

10. *Сильная линейность:*

$$R \cup R^{-1} = U, \forall x, y \in X \;\; \mu_{R \cup R^{-1}}(\tilde{o}, \acute{o}) = 1.$$

Другими словами, нечеткое отношение является сильно линейным, если его объединение с обратным отношением образует универсальное отношение.

Пример 3.7. Нечеткое отношение, заданное на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ с помощью нижеследующей матрицы, является сильно линейным:

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	1	0	1	0,1
$\tilde{o}_2$	1	1	1	1
$\tilde{o}_3$	0,9	0,2	1	0,3
$\tilde{o}_4$	1	0,6	1	1

.

11. *Слабая линейность*:

$$\forall \tilde{o}, \acute{o} \in \tilde{O} \ \ \mu_{R \cup R^{-1}}(\tilde{o}, y) > 0 .$$

Требование слабой линейности нечеткого отношения является ослаблением требования его сильной линейности.

Пример 3.8. Нечеткое отношение задано на множестве X = $= \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ при помощи матрицы

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0,1	0,4	0	0,1
$\tilde{o}_2$	1	1	0,7	1
$\tilde{o}_3$	0,9	0,2	0,8	0,3
$\tilde{o}_4$	0	0,6	0	1

.

Данное нечеткое отношение не является сильно линейным, но является слабо линейным.

12. *Транзитивность*:

$$R \circ R \subseteq R .$$

Нечеткое отношение R иначе называется транзитивным, если для любой пары $(\tilde{o}, \acute{o}) \in \tilde{O}^2$ выполняется неравенство

$$\mu_R(x, y) \geq \max_{z \in X} \left(\min\left(\mu_R(x, z)\right), \mu_R(z, y)\right). \qquad (3.8).$$

Особенностью орграфа транзитивного отношения является существование дуги (x, z) при условии существования в нем дуг (x, y) и (y, z).

Пример 3.9. Пусть R – бинарное нечеткое отношение «*x* значительно больше, чем *y*» из примера 2.11, заданное на множестве X = $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Матрица J_R этого нечеткого отношения представлена в виде таблицы

R	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0,3	0	0	0	0
3	0,6	0,3	0	0	0
4	0,9	0,6	0,3	0	0
5	1	0,9	0,6	0,3	0

.

Тогда по определению 2.10 нечеткое отношение R^2 будет представляться матрицей

R^2	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0,3	0	0	0	0
4	0,3	0,3	0	0	0
5	0,6	0,3	0,3	0	0

.

Сравнивая матрицы отношений R и R^2, делаем вывод, что отношение R^2 включается в R, т. е. $R \circ R \subseteq R$. Получаем заключение о том, что отношение R является транзитивным.

Известно, что совершенно антисимметричным отношением на множестве называется такое нечеткое отношение, что для любой пары $(\tilde{o}, \acute{o})$ из $\tilde{O}^2$ при $\tilde{o} \neq \acute{o}$ и $\mu_R(x, y) > 0$ выполняется равенство

$$\mu_R(\acute{o}, \tilde{o}) = 0\,.$$

Американский математик Л. А. Заде дает иное определение совершенной антисимметрии: нечеткое отношение R называется совершенно антисимметричным,

$$\text{если из } \mu_R(x, y) > 0 \text{ и } \mu_R(y, x) \geq 0 \text{ следует } \mu_R(y, x) = 0\,. \quad (3.9)$$

Требование совершенной антисимметрии является более сильным по сравнению с требованием антисимметричности: любое совершенно антисимметричное нечеткое отношение является антисимметричным.

3.2. Декомпозиция нечетких отношений

Одно из важнейших свойств *нечетких отношений* состоит в том, что их можно представить в виде совокупности обычных отношений. Кроме того, они могут быть упорядочены по включению, представляя собой иерархическую совокупность отношений. Разложение *нечеткого отношения* на совокупность обыкновенных отношений основывается на понятии α -*уровня нечеткого отношения*. Здесь для простоты будем полагать, что множество $\tilde{L}$ всех нечетких отношений является линейно упорядоченным [5].

Обычное отношение R_α называется α -уровнем нечеткого отношения *R* на множестве *X*, если оно определяется для всех $\alpha > 0$ следующим образом:

$$R_\alpha = \{(x, y) \,|\, (\tilde{o}, \acute{o}) \in \tilde{O}^2, \mu_R(x, y) > \alpha\}. \tag{3.10}$$

Пример 3.10. Определим обычное отношение $R_{0,7}$ для нечеткого отношения *R*, заданного на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ матрицей

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,5	0,7	1	0,8
x_2	0	0,3	0,2	0,9
x_3	0,6	0,4	0,3	0
x_4	0,7	0,2	0,9	1

.

Обычное отношение $R_{0,7}$, пользуясь формулой (3.10), можно задать списком: $R_{0,7} = \{(\tilde{o}_1, \acute{o}_2), (\tilde{o}_1, \acute{o}_3), (\tilde{o}_1, \acute{o}_4), (\tilde{o}_2, \acute{o}_4), (\tilde{o}_4, \acute{o}_1), (\tilde{o}_4, \acute{o}_3), (\tilde{o}_4, \acute{o}_4)\}$. Представим обычное отношение $R_{0,7}$ также в виде его матрицы

$R_{0,7}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
x_1	0	1	1	1
x_2	0	0	0	1
x_3	0	0	0	0
x_4	1	0	1	1

.

Можно также убедиться в том, что α -уровни нечетких отношений удовлетворяют соотношению

$$\alpha \le \beta \Rightarrow R_\alpha \supseteq R_\beta, \tag{3.11}$$

представляя собой совокупность вложенных друг в друга отношений.

Теорема 3.2. *Нечеткое отношение R обладает каким-либо свойством из вышеперечисленных (кроме сильной рефлексивности, сильной антирефлексивности, слабой линейности) в том и только в том случае, если этим свойством обладают все его* α *-уровни.*

Значение этой теоремы в теории нечетких отношений трудно переоценить. Она дает весьма ясный способ обобщения основных типов и свойств обычных отношений на случай нечетких отношений. Кроме того, теорема 3.2 показывает возможность представления основных типов нечетких отношений в виде иерархии обычных отношений этих же самых типов. И когда для решения практической задачи необходимо получение на множестве X некоторого отношения заданного типа, например эквивалентности или порядка, то построение на X соответствующего нечеткого отношения дает возможность получать сразу ансамбль необходимых обычных отношений, а это позволяет учитывать неоднозначность решений, присущих практическим ситуациям, и предоставляет лицу, принимающему решение, некоторую свободу выбора. Еще одним достоинством теоремы является то, что теория нечетких множеств, допуская подобную неоднозначность возможных решений, ограничений и целей, делает возможным оперирование сразу всей совокупностью таких объектов как единым целым.

Теорема 3.3. *Нечеткое отношение может быть представлено в виде*

$$R = \bigcup_\alpha \alpha R_\alpha, \tag{3.12}$$

где отношения αR_α *определяются следующим образом:*

$$\alpha R_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha, \text{ åñëè } R_\alpha(x,y) = 1, \\ 0, \text{ èíà÷å }. \end{cases}$$

Пример 3.11. Пользуясь теоремой (3.3), разложим нечеткое отношение R, заданное на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$ при помощи матрицы, представленной ниже, по его α-уровням:

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0,3	0,5	0	1
$\tilde{o}_2$	0,6	0,7	1	0,9
$\tilde{o}_3$	0,4	0	0,8	0,7
$\tilde{o}_4$	0,5	1	0,9	0,6

.

Используя формулу (3.12), имеем:

$$R = 0{,}3R_{0,3} \cup 0{,}4R_{0,4} \cup 0{,}5R_{0,5} \cup 0{,}6R_{0,6} \cup 0{,}7R_{0,7} \cup 0{,}8R_{0,8} \cup 0{,}9R_{0,9} \cup R_1.$$

Здесь запись αR_α фактически означает умножение всех элементов обычного отношения R_α на число α. Обычные отношения R_α определим по формуле (3.10). В итоге получим:

$R_{0,3}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	1	1	0	1
$\tilde{o}_2$	1	1	1	1
$\tilde{o}_3$	1	0	1	1
$\tilde{o}_4$	1	1	1	1

,

$R_{0,4}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	1	0	1
$\tilde{o}_2$	1	1	1	1
$\tilde{o}_3$	1	0	1	1
$\tilde{o}_4$	1	1	1	1

,

$R_{0,5}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	1	0	1
$\tilde{o}_2$	1	1	1	1
$\tilde{o}_3$	0	0	1	1
$\tilde{o}_4$	1	1	1	1

,

$R_{0,6}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0	0	1
$\tilde{o}_2$	1	1	1	1
$\tilde{o}_3$	0	0	1	1
$\tilde{o}_4$	0	1	1	1

,

$R_{0,7}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0	0	1
$\tilde{o}_2$	0	1	1	1
$\tilde{o}_3$	0	0	1	1
$\tilde{o}_4$	0	1	1	0

,

$R_{0,8}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0	0	1
$\tilde{o}_2$	0	0	1	1
$\tilde{o}_3$	0	0	1	0
$\tilde{o}_4$	0	1	1	0

,

$R_{0,9}$	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0	0	1
$\tilde{o}_2$	0	0	1	1
$\tilde{o}_3$	0	0	0	0
$\tilde{o}_4$	0	1	1	0

,

R_1	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0	0	0	1
$\tilde{o}_2$	0	0	1	0
$\tilde{o}_3$	0	0	0	0
$\tilde{o}_4$	0	1	0	0

.

Разложение нечетких отношением по их α-уровням на непрерывных множествах рассмотрены в источниках [4] и [10].

3.3. Транзитивное замыкание нечетких отношений

Транзитивные отношения имеют первостепенное значение в приложениях теории нечетких отношений. Им присущи многие удобные свойства и ими определяется некоторая правильная структура множества X. Примером сказанного является то, что если отношение R в X характеризуется сходством между объектами, то транзитивность этого отношения обеспечивает возможность разбиения множества X на непересекающиеся классы сходства. В случае же придания отношению в X смысла «предпочтения» или «доминирования», то транзитивность такого отношения дает возможность естественного упорядочения объектов множества X, существование «наилучших», «недоминируемых» объектов и т. д. Поэтому имеется значительный интерес в исследовании возможности преобразования исходного нетранзитивного отношения в транзитивное. Такое преобразование обеспечивает операция транзитивного замыкания нечеткого отношения.

Определение 3.1. Нечеткое отношение R^+ называется *транзитив-*

ным замыканием нечеткого отношения *R*, если:

1) R^{+} является транзитивным;

2) R^{+} является надмножеством *R*: $R \subset R^{+}$;

3) R^{+} является наименьшим транзитивным отношением, включающим *R*, если существует транзитивное отношение R', что $R \subset R'$, то $R^{+} \subseteq R'$.

Теорема 3.4. *Транзитивное замыкание R^{+} нечеткого отношения R равно объединению положительных степеней этого нечеткого отношения, т. е.*

$$R^{+} = R^{1} \cup R^{2} \cup \ldots \cup R^{k} \cup \ldots, \qquad (3.13)$$

где отношения R^{k} определяются рекурсивным образом:

$$R^{1} = R,\ R^{k} = R^{k-1} \circ R,\ k = 2, 3, \ldots .$$

Следствием теоремы 3.4 является утверждение, что нечеткое отношение *R* транзитивно тогда и только тогда, когда $R^{+} = R$.

Пример 3.12. Пусть *R* – нечеткое отношение на множестве *X* = = {*x*, *y*, *z*}, которое задано матрицей

R	*x*	*y*	*z*
x	0,2	0,8	0,7
y	0,7	0,7	0,5
z	0	0	0,3

.

Определим по формуле (2.1) степени R^{2}, R^{3}, R^{4} этого отношения. Получим:

R^{2}	*x*	*y*	*z*
x	0,7	0,7	0,5
y	0,7	0,7	0,7
z	0	0	0,3

,

$R^{3} = R^{4}$	*x*	*y*	*z*
x	0,7	0,7	0,7
y	0,7	0,7	0,7
z	0	0	0,3

.

По формуле (3.9) вычислим транзитивное замыкание нечеткого отношения R:

$$R^{+} = R^{1} \cup R^{2} \cup R^{3}. \qquad (3.14)$$

Произведя операцию объединения отношений R^{1}, R^{2}, R^{3}, в итоге получим:

R^{+}	x	y	z
x	0,7	0,7	0,7
y	0,7	0,7	0,7
z	0	0	0,3

.

Теорема 3.5. *Если множество X содержит n элементов, то транзитивное замыкание R^{+} нечеткого отношения R на этом множестве равно объединению первых n степеней этого отношения, т. е.*

$$R^{+} = R^{1} \cup R^{2} \cup ... \cup R^{n}. \qquad (3.15)$$

Нечеткое отношение R из примера 3.12 подтверждает справедливость утверждения теоремы 3.5 и равенства (3.10).

В случае, когда отношение R рефлексивно, имеют место вложения

$$R \subseteq R^{1} \subseteq ... \subseteq R^{n-1} = R^{n} = R^{n+1} = ... \qquad (3.16)$$

Пример 3.13. Иллюстрацией утверждения теоремы 3.5 является нечеткое отношение R, заданное на множестве $X = \{x, y, z\}$ при помощи матрицы

R	x	y	z
x	1	0	0,2
y	0,3	1	0
z	0	0,4	1

.

Отношение R является рефлексивным. Вычисляя степени этих отношений, отмечаем, что $R^2 = R^3$, что можно было бы получить на основании предыдущего утверждения, поскольку n = 3 и n – 1 = 2. Тогда по формуле (3.15) имеем: $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup R^3$. Но, учитывая равенство $R^2 = R^3$, в итоге получаем:

$$R^+ = R^1 \cup R^2 .$$

Приведем матрицы отношений $R^2 = R^3$, R^+:

$R^2 = R^3$	x	y	z
x	1	0,2	0,2
y	0,3	1	0,2
z	0,3	0,4	1

,

R^+	x	y	z
x	1	0,2	0,2
y	0,3	1	0,2
z	0,3	0,4	1

.

Весьма полезным фактом является утверждение следующей теоремы.

Теорема 3.6. *Для нечеткого отношения R* α*-уровень его транзитивного замыкания* R^+ *совпадает с транзитивным замыканием соответствующего уровня, т. е.*

$$(R^+)_\alpha = (R_\alpha)^+ \text{ для всех } \alpha \neq 0 .$$

Известно, что при транзитивном замыкании нечеткого отношения R в общем случае сохраняются лишь некоторые свойства этого отношения. Такими свойствами являются рефлексивность, симметричность, линейность и транзитивность.

Упражнения

Упражнение 1. Показать, что нечеткое отношение R, заданное на множестве $X = \{x, y, z\}$ матрицей, представленной ниже, является транзитивным:

R	x	y	z
x	0,2	1	0,4
y	0	0,6	0,2

z	0	0,8	0,1

.

Упражнение 2. Разложить нечеткое отношение R, заданное на множестве нижепредставленной матрицей, по его α-уровням:

R	$\acute{o}_1$	$\acute{o}_2$	$\acute{o}_3$	$\acute{o}_4$
$\tilde{o}_1$	0,5	0,4	0,6	0
$\tilde{o}_2$	1	0,4	0,9	0,8
$\tilde{o}_3$	0	0,6	0,4	0,9
$\tilde{o}_4$	0,8	0	1	0,5

.

Упражнение 3. Пусть R – нечеткое отношение «функция приблизительно равна корню квадратному из аргумента» из примера 2.14.

Требуется:

а) исследовать это отношение на предмет наличия у него свойств (1–12) из п. 3.1;

б) разложить это отношение по α-уровням;

в) построить двудольный орграф этого отношения;

г) найти транзитивное замыкание R^+ данного нечеткого отношения.

Упражнение 4. Пусть R – нечеткое отношение (см. раздел 2, упражнение 6), заданное взвешенным орграфом (рисунок 20).

Требуется:

а) исследовать это отношение на предмет наличия у него свойств (1–12) из п. 3.1;

б) разложить его по α-уровням;

в) определить степени R^2 и R^3 этого нечеткого отношения;

г) определить транзитивное замыкание R^+ данного нечеткого отношения.

Упражнение 5. Для нечеткого отношения R из примера 3.8, заданного на множестве $X = \{\tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4\}$, необходимо:

а) построить его двудольный орграф;

б) разложить это отношение по α-уровням;

в) найти транзитивное замыкание.

Упражнение 6. Найти транзитивные замыкания нечетких отношений R и L, заданных матрицами

R	x	y	z
x	0,2	0	0
y	0,4	0,6	0,6
z	0,5	0,7	0,8

,

L	x	y	z
x	0,7	0,2	0,4
y	0	0,3	0
z	0,9	0,1	0,3

.

Упражнение 7. Нечеткое отношение R задано на множестве $X =$ $= \{x, y, z\}$ при помощи матрицы

R	x	y	z
x	1	0,3	0
y	0	1	0,1
z	0,2	0	1

.

Требуется:

а) исследовать его на предмет наличия свойств (1–12) из п. 3.1;

б) построить орграф этого отношения;

в) найти транзитивное замыкание данного отношения.

4. ВИДЫ НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ

Все виды нечетких бинарных отношений на множестве в зависимости от того, какими свойствами они обладают, делятся на три класса:

1) симметричные отношения, характеризующие сходство или различие между элементами множества X и представляющиеся при помощи взвешенных н-графов;

2) антисимметричные отношения, заданные на универсальном множестве отношениями упорядоченности, доминирования, подчиненности (таковым соответствуют взвешенные орграфы с односторонней ориентацией дуг);

3) все остальные отношения, которым соответствуют взвешенные графы с двусторонней ориентацией дуг с необязательным совпадением весов противоположно направленных дуг.

Отношения каждого класса могут быть разделены на подклассы в зависимости от того, выполняются для них условия рефлексивности или антирефлексивности. С учетом этой классификации нечетких отношений мы и будем их рассматривать.

4.1. Нечеткие отношения сходства и несходства

Определение 4.1. *Нечеткими отношениями сходства* (*толерантности*, *безразличия*, или *неразличимости*) *на множестве X* называются рефлексивные симметричные отношения на этом множестве.

В дальнейшем эти отношения будем называть отношениями сходства и обозначать при помощи буквы «*T*» [11].

Антирефлексивные и симметричные отношения называются *отношениями несходства* ($\breve{O}$). Отношение несходства называется еще отношением *различия* [3]. Отношения сходства и несходства двойственны друг другу, т. е. они являются дополнениями по отношению друг к другу:

$$\mu_{\breve{O}}(\tilde{o}_i, y_j) = 1 - \mu_T(x_i, y_j). \tag{4.1}$$

Нечеткие отношения сходства, несходства и их частные виды встречаются при решении многих задач, например, автоматической классификации.

Отношения сходства могут быть заданы при помощи матриц сходства взвешенных н-графов. Способы задания нечетких отношений несходства связаны со способами задания отношений сходства при помощи равенства (4.1). Примером нечеткого отношения сходства является отношение «*x* и *y* приблизительно равны» из примера 2.2.

Пример 4.1. Пусть отношения *T*, $\breve{O}$ заданы на множестве $X = \{x, y, z\}$ матрицами

T	x	y	z
x	1	0,4	0,2
y	0,4	1	0
z	0,2	0	1

,

$\breve{O}$	x	y	z
x	0	0,6	0,8
y	0,6	0	1
z	0,8	1	0

.

Можно заметить, что отношение *T* является отношением сходства, а отношение $\breve{O}$ – отношением несходства. Графы этих отношений представлены соответственно на рисунках 21 и 22.

Матрицы отношений сходства, несходства с естественной интерпретацией свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности могут быть результатами не только измерения некоторого физического параметра, но и опросов экспертов. При этом в последнем случае для каждой пары элементов из множества X экспертами указывается степень сходства по некоторой шкале сравнений. В частности, такая шкала может содержать фразы типа «весьма сильное сходство», «очень-очень сильное сходство», «умеренное сходство» и т. д.

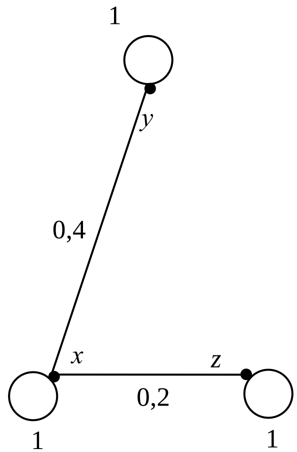


Рисунок 21 – **Н-граф нечеткого отношения сходства**

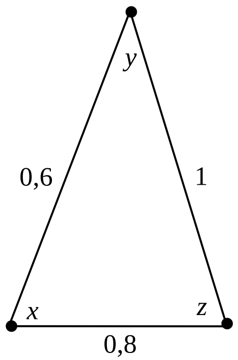


Рисунок 22 – **Н-граф нечеткого отношения несходства**

Наиболее интересным частным случаем отношения сходства является *нечеткое отношение S подобия* (или *отношение эквивалентности*).

Определение 4.2. Нечеткое отношение S на множестве X называется *нечетким отношением подобия*, или *нечетким отношением эквивалентности,* если оно обладает свойствами транзитивности, рефлексивности и симметричности.

Другими словами, нечеткое отношение эквивалентности – это отношение сходства, обладающее свойством транзитивности. Оно является обобщением обычного отношения эквивалентности.

Нечеткое отношение T из примера 4.1 отношением подобия не является, так как оно свойством транзитивности не обладает, т. е. отношение $\grave{O}^2$ не включается в отношение T (в этом можно убедиться самостоятельно).

Частным случаем отношения несходства является отношение различия (D), т. е. такое нечеткое отношение на множестве, которое обладает свойствами транзитивности, антирефлексивности и симметричности. Отношение *различия* двойственно отношению сходства, что можно записать в алгебраической форме как $D = \overline{S}$.

Значения функции принадлежности этих отношений могут быть получены друг из друга с помощью следующего равенства:

$$\mu_D(x, y) = 1 - \mu_S(x, y)\,. \tag{4.2}$$

В теории нечетких отношений отношение подобия обычно интерпретируют как взаимозаменяемость, одинаковость элементов множества.

Пример 4.2. Примером нечетких отношений S подобия и различия являются отношения, заданные на множестве $X = \{x, y, z, t\}$ матрицами

S	x	y	z	t
x	1	a	a	a
y	a	1	a	a
z	a	a	1	a
t	a	a	a	1

,

D	x	y	z	t
x	0	1-a	1-a	1-a
y	1-a	0	1-a	1-a
z	1-a	1-a	0	1-a
t	1-a	1-a	1-a	0

.

В этом можно убедиться, найдя нечеткое отношение S^2, которое равно S, что означает выполнение свойства транзитивности нечеткого отношения S. Кроме того, выполняются свойства рефлексивности (на главной диагонали матрицы отношения S находятся одни единицы) и симметричности (матрица отношения является симметричной относительно главной диагонали).

Можно показать, что любой α-уровень нечеткого отношения эквивалентности является обычным отношением эквивалентности и, значит, определяет разбиение множества объектов X на непересекающиеся классы эквивалентности. Из вложенности α-уровней нечеткого отношения следует и вложенность разбиений множества X, соответствующих различным α-уровням, причем с уменьшением числа α происходит укрупнение классов эквивалентности α-уровней. Таким образом, нечеткое отношение эквивалентности задает иерархическую совокупность разбиений множества X на непересекающиеся классы эквивалентности.

Нечеткое отношение эквивалентности в отличие от произвольного отношения сходства определяет совокупность разбиений множества X на классы эквивалентности благодаря тому, что условие транзитивности накладывает дополнительно сильные ограничения на возможные значения степени принадлежности. Нечеткое отношение эквивалентности обладает многими полезными свойствами из-за своего довольно специфического вида.

Пример 4.3. К числу нечетких отношений подобия и различия можно отнести нечеткие отношения, заданные на множестве $X = \{x, y, z\}$ матрицами

S	x	y	z
x	1	0,4	0,5
y	0,4	1	0,4
z	0,5	0,4	1

,

D	x	y	z
x	0	0,6	0,5
y	0,6	0	0,6
z	0,5	0,6	0

.

В соответствии с теоремой 3.3 о декомпозиции данное нечеткое отношение подобия можно представить в виде следующего объединения:

$$S = 0{,}4S_{0,4} \cup 0{,}5S_{0,5} \cup S_1 .$$

При этом $S_{0,4}, S_{0,5}, S_1$ – различные α-уровни данного нечеткого отношения S, каждое из которых на множестве $X = \{x, y, z\}$ согласно равенству (3.10) определяет обычное четкое отношение эквивалентности:

$S_{0,4}$	x	y	z
x	1	1	1
y	1	1	1
z	1	1	1

,

$S_{0,5}$	x	y	z
x	1	0	1
y	0	1	0
z	1	0	1

,

S_1	x	y	z
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

.

Каждое из этих четких отношений эквивалентности определяет разбиение множества $X = \{x, y, z\}$ на непересекающиеся классы эквивалентности. Напомним, что *классом эквивалентности* S_a обычного четкого отношения S эквивалентности называется множество всех вторых компонентов упорядоченных пар этого отношения, у которых первой компонентой является элемент a:

$$S_a = \{b \mid (a,b) \in S\} \text{ [12].}$$

Иначе говоря, классом эквивалентности называется пересечение отношения по элементу поля этого отношения.

Например, для 0,4-уровня из данного примера получим:

$$(S_{0,4})_x = (S_{0,4})_y = (S_{0,4})_z = \{x, y, z\}.$$

Другими словами, в четком отношении $S_{0,4}$ существует лишь один класс $\{x, y, z\}$ эквивалентности. То есть, с точки зрения свойств отношения $S_{0,4}$ элементы x, y, z являются неразличимыми в этом отношении. Произведя аналогичным образом разбиение каждого из полученных α-уровней на классы эквивалентности, получим систему разбиений множества $X = \{x, y, z\}$, соответствующих данному отношению S (таблица 7).

Таблица 7 – **Разбиение множества нечетким отношением подобия в систему классов эквивалентности**

α -уровень	Количество классов	Содержание классов
0,4	1	$\{x, y, z\}$
0,5	2	$\{x, z\}$, $\{y\}$
1	3	$\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$

Приведенный аппарат теории нечетких отношений подобия с успехом можно использовать для решения задач различного рода «вскрытия» внутренней структуры весьма сложных объектов в системах управления.

4.2. Нечеткие отношения предпорядка

Из формулы (3.12) следует, что если отношение R является рефлексивным, то $R^2 \supseteq R$. Отношение предпорядка выделяет из всех рефлексивных отношений транзитивные отношения.

Определение 4.3. Нечеткое отношение называется *нечетким отношением предпорядка*, если оно рефлексивно и транзитивно.

Транзитивные нечеткие отношения имеют важную роль в различных приложениях теории нечетких множеств, поскольку ими определяется некоторая правильная структура множества, на котором эти отношения заданы.

Теорема 4.1. *Если R – нечеткое отношение предпорядка, то* $R^k = R$ *для всех k = 1, 2, 3, … .*

Пример 4.4. Нечеткое отношение R задано на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ матрицей

R	x	y	z	t
x	1	0,3	0,4	0,5
y	0,5	1	0,7	0,8
z	0,6	0,3	1	0,9
t	0,7	0,2	0,3	1

.

Найдем ближайшее к нему отношение предпорядка.

Это нечеткое отношение является рефлексивным, но отношением предпорядка не является, так как оно не является транзитивным (не выполняется вложение R^2 в R). Поскольку отношение рефлексивно, то на основании вложения (3.12) (при n = 4, n – 1 = 3) $R^3 = R^4$ и по формуле (3.11) $R^+ = R^3$. Это и есть искомое отношение. В итоге получим:

R^2	x	y	z	t
x	1	0,3	0,4	0,5
y	0,5	1	0,7	0,8
z	0,7	0,3	1	0,9
t	0,7	0,3	0,4	1

,

R^+	x	y	z	t
x	1	0,3	0,4	0,5
y	0,7	1	0,7	0,8
z	0,7	0,3	1	0,9
t	0,7	0,3	0,4	1

.

Антисимметричное, транзитивное нечеткое отношение, которое мы будем обозначать буквой «P», называется *отношением упорядочения*, или *порядком*. В зависимости от того, какое дополнительное свойство (рефлексивности или антирефлексивности) применимо для отношений порядка, они делятся на нечеткие отношения нестрогого и строгого порядков.

Нечеткие отношения как нестрогого так и строгого порядка могут быть получены многими способами и допускают различную интерпретацию. Они способны выражать либо значение какого-либо параметра, который характеризует интенсивность доминирования x над y, либо усредненную по множеству критериев или индивидуумов силу предпочтения между объектами. Нечеткие отношения порядка могут быть получены с помощью шкалы сравнений, по которой эксперты измеряют интенсивность предпочтений при попарных сравнениях альтернатив, а также могут выражать уверенность, возможность, вероятность доминирования (в экономике – процесса господства, преобладания) и т. п. Любая задача принятия решений может быть сформулирована как задача нахождения максимального элемента во множестве альтернатив с заданным на нем отношением предпочтения. Но во многих реальных случаях при имеющихся альтернативах реальным является лишь нечеткое отношение предпочтения, т. е. указание для каждой пары альтернатив x и y лишь степеней, с которыми выполняются, например, предпочтения $x > y$ и $y > x$. Это говорит о важности вопросов исследования роли нечетких отношений порядка в теории нечетких отношений.

Определение 4.4. Нечеткое отношение R на множестве X называется *нечетким отношением нестрогого порядка*, если оно одновременно является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.

Иначе говоря, антисимметричное нечеткое отношение предпорядка называется нечетким отношением P нестрогого порядка.

Теорема 4.2. *Каждое нечеткое отношение R нестрогого порядка индуцирует нестрогий порядок (в смысле теории множеств) на своем универсальном множестве X при помощи неравенства*

$$\mu_R(\tilde{o}, \acute{o}) \geq \mu_R(y, x) \text{ [10].}$$

Этот порядок мы будем обозначать в дальнейшем следующим образом:

$$\acute{o} \geq \tilde{o}. \qquad (4.3)$$

Здесь элемент y доминирует над элементом x или равен ему.

Пример 4.5. Нечеткое отношение R, заданное на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ матрицей, представленной ниже, отношением порядка не является, так как оно свойством транзитивности не обладает:

R	x	y	z	t
x	1	0	0	0
y	0,6	1	0,3	0
z	0,5	0	1	0,4
t	0,2	0	0	1

.

Для нахождения ближайшего к *R* отношения нестрогого порядка найдем транзитивное замыкание R^{+} отношения *R*. Определив степени отношения *R*, можно заметить, что $R^{2} = R^{3} = \ldots$. И тогда транзитивное замыкание $R^{+} = R^{2}$ будет представляться матрицей

$P = R^{+} = R^{2}$	x	y	z	t
x	1	0	0	0
y	0,6	1	0,3	0,3
z	0,5	0	1	0,4
t	0,2	0	0	1

.

Взвешенный орграф данного отношения представлен на рисунке 23.

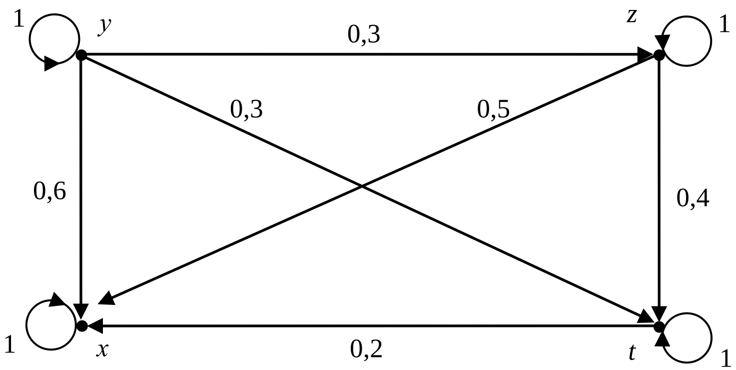


Рисунок 23 – **Взвешенный орграф нечеткого отношения порядка**

Определим порядок, индуцированный нечетким отношением $P = R^{+} = R^{2}$ порядка. Поскольку $\mu_{Ð}(\acute{o}, \tilde{o}) \geq \mu_{Ð}(\tilde{o}, \acute{o})$, то на основании теоремы 4.2 делаем вывод, что $\tilde{o} \geq \acute{o}$. Из неравенства $\mu_{Ð}(z, x) \geq$ $\geq \mu_{Ð}(x, z)$ вытекает соотношение $x \geq z$. Неравенство $\mu_{P}(t, x) \geq \mu_{P}(x, t)$ дает $x \geq t$. Соотношение $\mu_{P}(y, t) \geq \mu_{P}(t, y)$ позволяет нам сделать заключение, что $t \geq y$. Из того, что $\mu_{Ð}(\acute{o}, z) \geq \mu_{P}(z, y)$, следует $z \geq y$. И, наконец, из неравенства $\mu_{P}(z, t) \geq \mu_{P}(t, z)$ получается $t \geq z$. Сравнивая между собой полученные соотношения, между элементами

x, y, z, t множества X получаем следующее упорядочение этих элементов нечетким отношением P нестрогого порядка:

$$x \geq t \geq z \geq y\,.$$

Нечетким отношением строгого порядка называется всякое отношение, являющееся одновременно антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Известно, что по аналогии с теоремой 4.2 нечеткое отношение P строгого порядка индуцирует *строгий порядок*

$$\acute{o} > x \tag{4.4}$$

на множестве X, если только $\mu_P(x, y) > \mu_P(y, x)$. Здесь элемент y доминирует над элементом x.

Примером нечеткого отношения строгого порядка является нечеткое отношение R = «x значительно больше, чем y», заданное на множестве X = {1, 2, 3, 4, 5}, из примера 2.11. (Взвешенный орграф этого нечеткого отношения представлен на рисунке 15.)

Пример 4.6. Пусть P – нечеткое отношение, заданное на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ при помощи матрицы

P	x	y	z	t
x	0	0,4	0,2	0,2
y	0	0	0	0,1
z	0	0,7	0	0,6
t	0	0	0	0

.

Оно является нечетким отношением строгого порядка. Выполнение свойств антирефлексивности и антисимметричности очевидно. То, что для этого отношения выполняется требование транзитивности, доказывается простой проверкой. Определим строгий порядок, индуцируемый на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ данным нечетким отношением. По формуле (4.4) получим следующее:

1) так как $\mu_D(\tilde{o}, \acute{o}) > \mu_P(y, x)$, то $y > x$;

2) поскольку $\mu_{\text{Ð}}(\tilde{o}, z) > \mu_P(z, x)$, то $z > x$;

3) из неравенства $\mu_{\text{Ð}}(\tilde{o}, t) > \mu_P(t, x)$ вытекает $t > x$;

4) неравенство $\mu_{\text{Ð}}(y, t) > \mu_P(t, y)$ дает $t > y$;

5) из $\mu_{\text{Ð}}(z, y) > \mu_P(y, z)$ следует предпочтение $y > z$;

6) из неравенства $\mu_{\text{Ð}}(z, t) > \mu_P(t, z)$ получим $t > z$.

При помощи сравнения друг с другом полученных соотношений между элементами X получаем следующее упорядочение элементов из X нечетким отношением P строгого порядка:

$$t > y > z > x.$$

Взвешенный орграф данного нечеткого отношения R представлен на рисунке 24.

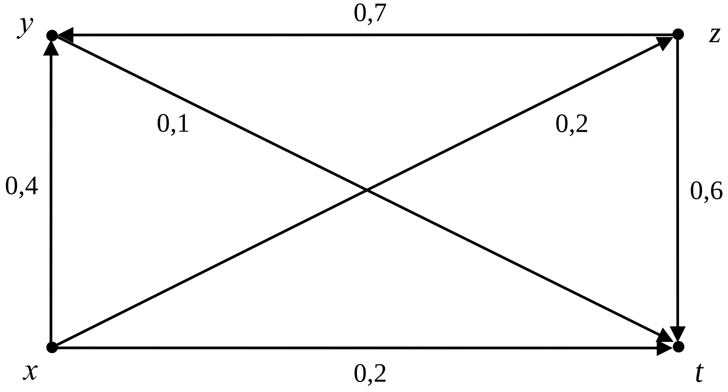


Рисунок 24 – **Взвешенный орграф нечеткого отношения строгого порядка**

4.3. Нечеткие отношения общего и частичного порядков

Определение 4.5. Четкое отношение ($Pч$) называется *четким отношением нестрогого порядка* (*четким нестрогим порядком*), соответствующим нечеткому отношению P нестрого порядка, если выполняются условия:

$$\begin{cases} \mu_{\text{Ð÷}}(\tilde{o}_i, y_j) = 1, \mu_{\text{Ð÷}}(y_j, x_i) = 0, \text{ åñëè } \mu_{\text{Ð}}(\tilde{o}_i, y_j) > \mu_P(y_j, x_i), \\ \mu_{P\div}(\tilde{o}_i, y_j) = \mu_{P\div}(y_j, x_i) = 0, \text{ èíà÷å }. \end{cases}$$

Пример 4.7. Пусть *P* – нечеткое отношение нестрогого порядка из примера 4.5. Тогда обычное четкое отношение *Ð÷* нестрогого порядка, соответствующее данному нечеткому отношению, можно будет задать матрицей

Pч	*x*	*y*	*z*	*t*
x	1	0	0	0
y	1	1	1	1
z	1	0	1	1
t	1	0	0	1

.

Определение 4.6. Нечеткое отношение *P* нестрогого порядка на множестве *X* называется *нечетким отношением общего порядка* (*общим порядком*), если соответствующее ему четкое отношение *Ð÷* является отношением общего (линейного) порядка. В противном случае нечеткое отношение *P* нестрогого порядка называется *нечетким отношением частичного порядка* (*частичным порядком*) [3].

Примером нечеткого отношения общего порядка является нечеткое отношение нестрогого порядка из примера 4.5, поскольку соответствующее ему четкое отношение (см. пример 4.7) является отношением общего порядка. В самом деле из матрицы $J_{P\div}$ этого отношения следует, что для любых двух элементов множества $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ упорядоченная пара этих элементов, взятых либо в данном, либо в обратном порядке, принадлежит этому отношению *Ð÷*. Однако нечеткое отношение нестрогого порядка далеко не всегда имеет общий порядок.

Пример 4.8. Пусть нечеткое отношение *P* задано на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ с помощью матрицы

P	*x*	*y*	*z*	*t*
x	1	0	0	0
y	0,2	1	0,3	0
z	0	0	1	0
t	0,4	0	0	1

.

Можно убедиться, что отношение *P* совпадает со своим квадратом ($Đ^2 = Đ$), а также является рефлексивным и антисимметричным. Следовательно, *P* – отношение нестрогого порядка. По определению 4.5 соответствующее ему четкое отношение *Đ÷* будет представляться матрицей

Pч	*x*	*y*	*z*	*t*
x	1	0	0	0
y	1	1	1	0
z	0	0	1	0
t	1	0	0	1

.

Это отношение *Pч* задает на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ нестрогий порядок. Но оно будет не общего, а лишь частичного порядка, поскольку во множестве *X* существуют по крайней мере два элемента *z* и *t*, такие, что $(z,t) \notin P÷$ и $(t,z) \notin P÷$.

Из множества отношений третьего класса, обозначаемых буквой «*R*», выделяют обычно лишь рефлексивные отношения, которые называются *нечеткими отношениями слабого порядка*, или *слабыми порядками*. Примеров таких отношений в данном пособии приведено достаточно много.

Упражнения

Упражнение 1. Показать, что нечеткое отношение *T*, заданное на множестве $X = \{x, y, z\}$ матрицей J_T, является отношением сходства:

T	*x*	*y*	*z*
x	1	0,2	0,9
y	0,2	1	0,5
z	0,9	0,5	1

.

Требуется найти матрицу двойственного ему отношения несходства и построить н-графы этих отношений.

Упражнение 2. Найти транзитивное замыкание T^+ нечеткого отношения T на множестве $X = \{x, y, z\}$ из упражнения 1. Кроме того, требуется:

а) разложить нечеткое отношение $S = T^+$ по его α-уровням;

б) найти разбиения множества $X = \{x, y, z\}$ каждым α-уровнем отношения $S = T^+$ в систему непересекающихся классов эквивалентности.

Упражнение 3. Для нечеткого отношения R, заданного на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z, t\}$ нижеследующей матрицей, найти ближайшее к нему отношение предпорядка:

R	x	y	z	t
x	1	0,6	0,4	0,3
y	0,2	1	0,3	0,8
z	0,7	0,5	1	0,6
t	0,9	0,2	0,3	1

.

Упражнение 4. Показать, что нечеткое отношение P на множестве $X = \{x, y, z\}$, заданное при помощи нижеследующей матрицы, является нечетким отношением порядка:

P	x	y	z
x	1	0,2	0
y	0	1	0
z	0,3	0,4	1

.

Необходимо построить взвешенный орграф этого отношения и определить порядок, индуцированный нечетким отношением P на множестве X.

Упражнение 5. Определить строгий порядок, индуцируемый на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ нечеткое отношение R = «x значительно больше, чем y» из примера 2.11.

Упражнение 6. Определить, является ли нечеткое отношение R, представленное на рисунке 20 в виде взвешенного орграфа, нечетким отношением строгого порядка. Указать, как надо изменить это отношение, чтобы оно определяло строгий порядок на множестве $X =$ $= \{x, y, z, t\}$.

Упражнение 7. Показать, что нечеткое отношение P на множестве $\tilde{O} = \{x, y, z\}$, заданное нижеследующей матрицей, является нечетким отношением нестрого порядка:

P	x	y	z
x	1	0,2	0
y	0	1	0
z	0,3	0,4	1

.

Определить, какой порядок индуцирует отношение P на X – общий или частичный.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Губко, М. В.** Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации / М. В. Губко. – М. : НПУ РАН, 2004.

2. **Чернов, В. Г.** Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие для вузов / В. Г. Чернов. – Владимир : Владимир. гос. ун-т, 2010. – 96 с.

3. **Борисов, В. В.** Основы теории нечетких отношений : учеб. пособие для вузов / В. В. Борисов, А. С. Федулов, М. М. Зернов. – М. : Телеком, 2014. – 86 с.

4. **Конышева, Л. К.** Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. – СПб. : Питер, 2011. – 192 с.

5. **Основы** дискретной математики : пособие : в 3 ч. / авт.-сост. : Н. Д. Романенко. – Гомель : Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп., 2008. – Ч. 1 : Элементы теории множеств. – 80 с.

6. **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов : учеб. для вузов / Ф. А. Новиков. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2007. – 364 с.

7. **Белов, А. А.** Основы теории нечеткости : учеб. пособие / А. А. Белов, Т. В. Гвоздева. – Иваново : Иванов. гос. энергет. ун-т им. В. И. Ленина, 2005. – 120 с.

8. **Невзоров, В. В.** Оценка сети рынков по нечетким экспертным данным / В. В. Невзоров, О. А. Скрыпниченко // Социальное партнерство в условиях социально-правового государства: региональный аспект : материалы IX межвуз. науч.-практ. конф., Гомель, 3 февр. 2005 г. / Бел. торгово-экон. ун-т потребит. кооп. – Гомель, 2005. – С. 250–254.

9. **Матвеев, М. Г.** Модели и методы искусственного интеллекта. Применение в экономике : учеб. пособие / М. Г. Матвеев, А. С. Свиридов, Н. А. Алейникова. – М. : Финансы и статистика, 2014. – 448 с.

10. **Ибрагимов, В. А.** Элементы нечеткой математики : учеб. пособие / В. А. Ибрагимов. – Баку : АзГНА, 2010. – 392 с.

11. **Вятченин, Д. А.** Нечеткие методы автоматической классификации : моногр. / Д. А. Вятченин. – Минск : Технопринт, 2004 – 219 с.

12. **Плотников, А. Д.** Дискретная математика : учеб. пособие / А. Д. Плотников. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Новое знание, 2006. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ, НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I и II ступеней

В трех частях

Часть 2

Нечеткие отношения и нечеткие графы

Авторы-составители:

Романенко Николай Денисович
Тютин Виталий Иванович

Редактор Е. В. Седро
Компьютерная верстка Л. Ф. Барановская

Подписано в печать 21.11.14. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага типографская № 1. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 5,00. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/138 от 08.01.2014.
Просп. Октября, 50, 246029, Гомель.
http://www.i-bteu.by

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра высшей математики

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ, НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Пособие
для реализации содержания образовательных программ высшего образования I и II ступеней

В трех частях

Часть 2

Нечеткие отношения и нечеткие графы

Гомель 2014