УДК 510
ББК 22.122
Э 45

Авторы-составители: Н. Д. Романенко, канд. физ.-мат. наук, доцент;
В. И. Тютин, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензенты: А. А. Бабич, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого;
А. Н. Семенюта, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 1 от 11 октября 2011 г.

Э 45 **Элементы** теории нечетких множеств, нечеткой логики и их применение в экономике : пособие для студентов экономических специальностей, аспирантов и соискателей. В 3 ч. Ч. 1. Нечеткие множества / авт.-сост. : Н. Д. Романенко, В. И. Тютин. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2012. – 80 с.
ISBN 978-985-461-966-8

**УДК 510**
**ББК 22.122**

**ISBN 978-985-461-966-8**

торгово-экономический университет
потребительской кооперации», 2012

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Теория нечетких множеств (ТНМ), нечеткая логика (НЛ) являются естественным обобщением и развитием теории обычных канторовских множеств и строгой математической логики.

По ТНМ и НЛ, их приложениям имеется обширная научная литература. Однако учебно-методической литературы, где систематически излагались бы эти вопросы, издано немного.

Данное пособие составлено так, чтобы материал подавался постепенно и чтобы у читателя – не математика по профессии, использующего математику в своей работе, не возникло слишком больших затруднений при его изучении.

Приведенные в пособии примеры предназначены для того, чтобы проверить, хорошо ли усвоены читателем новые понятия.

В конце каждого параграфа приведены упражнения, которые также помогают быстрой проверке того, насколько усвоен читателем новый материал.

Для лучшего понимания идей и понятий теории нечетких множеств целесообразно вначале внимательно изучить их четкие аналоги.

Используемые обозначения являются стандартными, в противном случае для них в пособии приведены подробные пояснения.

# § 1. ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА

## 1.1. Понятие характеристической функции

В этом пункте будем рассматривать обычные (четкие) множества, т. е. совокупность некоторых элементов.

Часто будем ограничиваться рассмотрением лишь всевозможных подмножеств одного и того же множества $X$, которое в таком случае будет называться *основным*, или *универсальным*, множеством. Если $A$ – подмножество множества $X$, то этот факт можно записать с помощью $A \subset X$. Пусть $R$ – некоторое свойство. Множество тех элементов из $X$, которые обладают свойством $R$, определяется как

$$A = \{x \mid x \in X, R(x)\}.$$

Если элемент $x$ множества $X$ является и элементом подмножества $A$, то этот факт будем записывать $x \in A$. Если же элемент $x$ не принадлежит подмножеству $A$, то применяют запись $x \notin A$.

В классической математике для любого элемента $x$ рассматриваются лишь две возможности: либо элемент $x$ принадлежит данному подмножеству $A$ (т. е. $x$ обладает свойством $R$), либо $x$ не принадлежит $A$ (не обладает свойством $R$), т. е. такие подмножества имеют «четкие границы», отделяющие элементы, принадлежащие подмножеству, от остальных элементов множества $X$.

Наряду с последними записями для выражения принадлежности элемента $x$ подмножеству $A$ можно использовать характеристическую функцию $\mu_A(x)$ [7, с. 19], значения которой указывают на то, является ли (да или нет) $x$ элементом $A$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \textit{если } x \in A, \\ 0, \textit{если } x \notin A. \end{cases}$$

***Пример 1.1.*** Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $A = \{x_1, x_3, x_6\}$.

Для каждого элемента из $X$ выпишем степень его принадлежности множеству $A$ (т. е. значение его характеристической функции): $\mu_A(x_1) = 1$, $\mu_A(x_2) = 0$, $\mu_A(x_3) = 1$, $\mu_A(x_4) = 0$, $\mu_A(x_5) = 0$, $\mu_A(x_6) = 1$.

Данный подход позволяет представить подмножество $A$ через все элементы множества $X$, сопроводив при этом каждый из них значением его функции принадлежности:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0), (x_6, 1)\}.$$

Можно сказать, подмножество $A$ задается простым перечислением таких элементов $x$ из $X$, что $\mu_A(x) = 1$, так как элементы, для которых $\mu_A(x) = 0$, не принадлежат подмножеству $A$.

В булевой алгебре известно понятие дополнения $\overline{A}$ подмножества $A$ относительно $X$, т. е. такое подмножество множества $X$, которое обладает следующими свойствами:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing; \qquad (1.1)$$

$$A \cup \overline{A} = X. \qquad (1.2)$$

Если $x \in \overline{A}$, то $x \notin A$. Этот факт можно записать так: $\mu_{\overline{A}}(x) = 1$, $\mu_A(x) = 0$. Для графического представления множества достаточно построить точки $(x_i, \mu_A(x_i))$, где $x_i$ – элементы универсального множества $X$, $\mu_A(x)$ – соответствующее значение функции принадлежности.

На рисунке 1 представлено множество $A$ из примера 1.1. Графическое представление функции $\mu_A(x)$ удобно применять в том случае, если нельзя перечислять все элементы универсального множества $X$ (рисунок 2). Иногда оно является незаменимым.

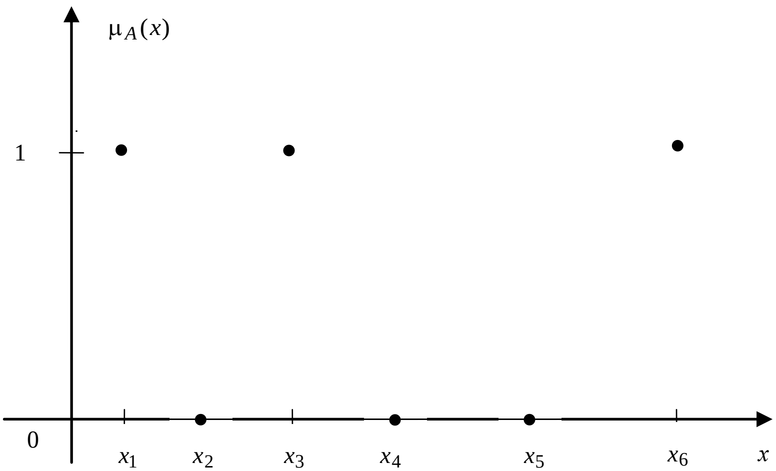


Рисунок 1

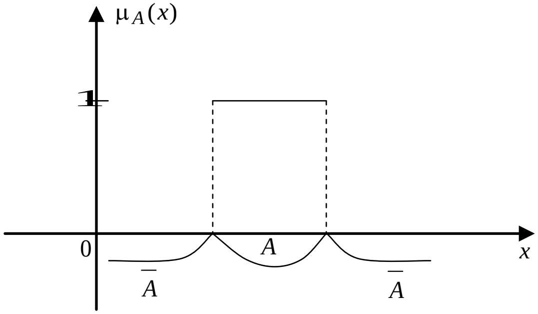


Рисунок 2

Для элементов множеств *X* и *A* из рассмотренного примера 1.1 можно написать: $\mu_{\overline{A}}(x_1)=0$, $\mu_{\overline{A}}(x_2)=1$, $\mu_{\overline{A}}(x_3)=0$, $\mu_{\overline{A}}(x_4)=1$, $\mu_{\overline{A}}(x_5)=1$, $\mu_{\overline{A}}(x_6)=0$.

Тогда дополнение множества *A* можем записать:

$$\overline{A}=\{(x_1,0),(x_2,1),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,1),(x_6,0)\}.$$

Пусть даны подмножества *A* и *B* множества *X* и $A\cap B$ – их пересечение. Тогда

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A,\\ 0, \text{ если } x\notin A,\end{cases}\quad \mu_B(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in B,\\ 0, \text{ если } x\notin B,\end{cases}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A\cap B,\\ 0, \text{ если } x\notin A\cap B.\end{cases}$$

Поэтому можно записать, что $\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$.

Операция $(\cdot)$ называется булевым произведением. Аналогично для двух подмножеств *A* и *B* определяется операция $(\dot{+})$ объединения (или булевая сумма):

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in A\cup B,\\ 0, \text{ если } x\notin A\cup B.\end{cases}$$

Она обладает свойством

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\dot{+}\mu_B(x).$$

Операция $(\dot{+})$ булевой суммы определена таблицей на рисунке 3.

| $(\dot{+})$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Рисунок 3

Операция $(\cdot)$ булевого умножения совпадает с операцией обычного умножения.

***Пример 1.2.*** Пусть $X$ – множество из примера 1.1, $A$ и $B$ – два его подмножества:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0), (x_6, 1)\};$$

$$B = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0), (x_6, 1)\}.$$

Тогда

$$A \cap B = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0), (x_5, 0), (x_6, 1)\};$$

$$A \cup B = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0), (x_6, 1)\}.$$

Эти два подмножества имеют соответствующие дополнения:

$$\overline{A \cap B} = \{(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1), (x_6, 0)\};$$

$$\overline{A \cup B} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0), (x_5, 1), (x_6, 0)\}.$$

## 1.2. Неопределенная информация и человеческий способ рассуждений

При моделировании свойств объектов реального мира, процессов и явлений в природе и обществе уже на стадии концептуальной постановки стоит задуматься над тем, насколько однозначно определены параметры, в терминах которых осуществляется математическое описание моделируемого объекта. Для каждого параметра на этом этапе следует определить, допустимо ли его считать однозначно определенным или ему в некоторой степени присуща *неопределенность*.

В зависимости от того, насколько полно описан объект, неопределенность можно разбить на три основные группы: неизвестность, недостоверность, неоднозначность [10].

*Неизвестность* – это начальная стадия описания неопределенности, характерной чертой которой является полное отсутствие информации.

*Недостоверность* является второй стадией описания неопределенности. Для различных стадий сбора информации она может классифицироваться как неполнота, недостаточность, недоопределенность и неадекватность. *Неполнота* характерна тем, что собрана не вся возможная информация. *Недостаточность* характеризуется собранием не всей необходимой информации. При *недоопределенности* является характерным то, что для некоторых элементов определены не их точные описания, а всего лишь множества, которым эти описания принадлежат. При неадекватности ряд элементов исследуемого объекта описан по аналогии с уже имеющимися описаниями подобных элементов, т. е. имеется так называемое «замещающее» описание, не всегда удовлетворяющее целям исследования [4, с. 185].

*Неоднозначность* – конечная степень неопределенности, при которой вся возможная информация собрана, но полного необходимого описания не получилось.

Существуют две причины возникновения неоднозначности (лингвистическая и физическая).

*Физическая неопределенность* является связанной либо с наличием нескольких возможностей, каждая из которых *случайным* образом может стать реальностью, либо с *неточностью* вычислений или измерений.

*Лингвистическая неопределенность* связана с использованием некоторого естественного языка и порождается, во-первых, множественностью значений слов (*полисемией*), во-вторых – *неоднозначностью* смысла фраз.

Выделяют два вида полисемии (омонимия и нечеткость).

*Омонимия* характерна тем, что одним и тем же словом можно определять различного рода физические объекты. В случае сходства по сути объектов описания, которые описывают некоторое множество понятий, ситуацию относят к *нечеткой*. Нечеткость – отсутствие определенных границ. Понятие нечеткости является общенаучным и может быть определено как внешнее выражение качества внутренней основы явлений, специфика которого заключается в непрерывности перехода от отсутствия проявления к полному выявлению качества предметов, свойств и отношений реального мира, что находит свое отражение в познавательной и мыслительной деятельности индивида [5, с. 17–18].

Математически неопределенность описывают стохастически, статистически, с позиций теории нечетких множеств, интервально.

При неопределенности возможности прямого использования классических методов планирования эксперимента ограничены.

Например, любой субъект экономики, будь-то промышленное или финансовое предприятие, торговая или страховая компания, осуществляет свою деятельность, являясь одним из элементов рыночной экономики. Всякие изменения в последней прямым или косвенным образом влияют на функциональное развитие этого субъекта. Изменения налоговых или таможенных условий, действия конкурентов, научно-технические достижения или открытия в области информатики, изменения в области социальной или политической сферы в большей или меньшей мере оказывают воздействия на решения, принимаемые внутри указанного субъекта.

Количество взаимосвязей является настолько большим, что управление решением, определяющим существенные характеристики инвестирования предприятия в текущий период и в стратегической перспективе, определяется из комплекса заключений, которые опираются все чаще не столько на строгие экономические расчеты, требующие применения экономико-математических методов, сколько на профессиональную интуицию лиц, принимающих решение (ЛПР).

Любой процесс принятия решений в экономике связан с двумя категориями – субъективностью и неопределенностью. Если раскрыть механизм влияния последних на принимаемые решения и обеспечить ЛПР соответствующим инструментарием, могущим их учитывать, а не устранять, можно значительно усилить роль математических методов.

Совокупность внешней (рыночной, не только экономической, но и, например, политической, технической) и внутренней (хозяйственной) информации образуют источник для принятия всякого решения. Но даже сама информация об объектах экономики может быть неоднозначной, что обуславливается сложностью ее структуры, динамики, множеством взаимосвязей. Она может быть недостаточной, избыточной, обладающей противоречиями, субъективной в той степени, насколько является следствием анализа других лиц. Иными словами, информация может нести в себе большую или меньшую неопределенность.

Одно из выдающихся свойств интеллекта человека – его способность принимать правильные решения в условиях неопределенной нечеткой информации. Поэтому одной из важнейших проблем науки является построение модели приближенных человеческих рассуждений и их использование в компьютерных системах будущих поколений.

### 1.3. Определение нечеткого множества

Американский математик и кибернетик Л. А. Заде смог значительно продвинуться в решении указанной в пункте 1.2 проблемы, расширив ставшее уже классическим канторовское понятие множества [1].

Рассмотрим теперь подмножество $A$ множества $X$ из примера 1.1.

Каждый из шести элементов, содержащихся в $X$, или принадлежит или не принадлежит подмножеству $A$, т. е. обладает свойством $R$ или не обладает им. Другими словами, характеристическая функция $\mu_A(x)$ принимает только два значения: 1 или 0. Здесь речь идет, таким образом, о четком мире.

Подходить к формализации понятия нечеткого множества будем в обобщении понятия принадлежности.

Допустим теперь, что характеристическая функция $\mu_A(x)$ принимает любое значение из отрезка [0, 1]. Это означает, что элемент $x_i$ $\left(i=\overline{1,6}\right)$ из $X$ может не принадлежать $A$ (тогда $\mu_A(x_i) = 0$), может быть элементом $A$ лишь в небольшой степени (тогда $\mu_A(x_i)$ близко к 0), может быть элементом $A$ в значительной степени (тогда $\mu_A(x_i)$ близко к 1), может быть элементом $A$ (тогда $\mu_A(x_i)=1$) и т. д. Другими словами, переход от полной непринадлежности некоторого объекта (элемента) определенному классу (множеству элементов, обладающих свойством $R$) к полной его принадлежности происходит не скачком, а плавно, постепенно, причем принадлежность элемента $x$ некоторому подмножеству $A$ выражается числом $\mu_A(x)\in[0,1]$.

Такой подход позволяет более адекватно описывать объекты окружающей действительности.

***Пример 1.3.*** Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ – полное (или универсальное) множество.

Математический объект, который определяется выражением $A=\{(x_1, 0{,}9), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0{,}1), (x_5, 0{,}2), (x_6, 0{,}8)\}$, – пример нечеткого подмножества множества $X$. Здесь $x_i \in X$ $\left(i=\overline{1,6}\right)$, число же после запятой – значение характеристической функции $\mu_A(x)$ на этом элементе. Можем сказать, что это нечеткое подмножество $A$ не содержит $x_2$, содержит в небольшой степени $x_4$, содержит $x_5$ в немного большей степени чем $x_4$, в значительной мере содержит $x_6$, еще в более значительной мере чем $x_6$ содержит $x_1$, полностью содержит $x_3$.

Нечеткое подмножество тем отличается от обычного, что для его элементов нет однозначного ответа (да или нет) относительно наличия свойства $R$.

Одной из целей данного пособия является описание математической структуры, позволяющей оперировать с относительно неполно определенными элементами, принадлежность которой к данному подмножеству иерархически упорядочена лишь в какой-то степени. Можно привести следующие примеры таких структур: в заданном множестве людей – нечеткое подмножество полных людей; во множестве стран мира – нечеткое подмножество экономически развитых стран; во множестве деревьев города – нечеткое подмножество очень высоких деревьев и т. п.

***Определение 1.1.*** Пусть $X$ – некоторое множество, счетное или нет, и $x \in X$. ***Нечетким подмножеством*** (или нечетким множеством (НМ)) $A$ называется совокупность $\{x, \mu_A(x)\}$ упорядоченных пар, где $x \in X$, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, ставящая в соответствие каждому элементу $x$ некоторое действительное число из некоторого вполне упорядоченного множества $M$ (например, $M = [0, 1]$), т. е. эта функция определяется в виде отображения:

$$\mu_A(x) : x \to M.$$

Значение $\mu_A(x)$ этой функции для элемента $x$ называется еще иначе *степенью принадлежности его НМ A*. В настоящее время спектр мнений по вопросу, что следует понимать под характеристической функцией, очень широк. Будем понимать под функцией $\mu_A(x)$ принадлежности некоторое *невероятностное субъективное измерение неточности* [1]. Считаем, что функция $\mu_A(x)$ отлична от плотности вероятности и функции распределения вероятности.

Множество $M$ называется *множеством принадлежностей*. В примере 1.3 множество $M$ состоит из 6 элементов: $M = \{0, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}8, 0{,}9, 1\}$. Если же $M = \{0, 1\}$, то НМ можно рассматривать как обычное или четкое множество. Как уже было отмечено в примере 1.3, равенство $\mu_A(x) = 1$ означает определенную принадлежность элемента $x$ НМ $A$, а равенство $\mu_A(x) = 0$ – определенную непринадлежность элемента $x$ этому НМ. Поэтому обычные множества являются частным случаем нечетких.

Теория нечетких множеств является результатом обобщения и переосмысления важнейших направлений классической математики. Указанная теория представляет собой развитие идей и достижений многозначной логики, которая указала на возможности перехода от двух к произвольному числу значений функции принадлежности и поставила проблему оперирования понятиями с изменяющимся содержанием; теории вероятностей, которая, породив большое количество различных способов статистической обработки экспериментальных данных, открыла пути определения и интерпретации функции принадлежности; дискретной математики, которая предложила инструмент для построения моделей многомерных и многоуровневых систем, удобный при решении практических задач.

В настоящее время теория нечетких (размытых, расплывчатых) множеств – область прикладной математики, изучающая методы описания и модели объектов, обладающих специфической формой неопределенности (например, неточностью, свойственной конструкциям естественного языка или возникающей при анализе сложных систем).

Из определения НМ видно, что функция $\mu_A(x)$ принадлежности является исчерпывающей характеристикой НМ, поэтому удобно использовать для его обозначения эту функцию. Мы будем отождествлять НМ $A$ с функцией $\mu_A(x)$.

## 1.4. Способы задания нечетких множеств

Если число элементов НМ конечно и является сравнительно небольшим, то задают это множество *перечислением элементов*.

В общем виде НМ $A$ (в случае его дискретности) можно записать как $A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \ldots, (x_n, \mu_A(x_n)), \ldots\}$ или в более короткой записи $A = \underset{x \in X}{U} (x, \mu_A(x))$.

Кроме обозначения НМ $A$ с помощью записи $A = \{(x, \mu_A(x))\}$ используют и другие различные представления НМ. В частности, НМ $A$ из примера 1.3 может быть представлено в виде

$A = \{(x_1, 0{,}9) + (x_2, 0) + (x_3, 1) + (x_4, 0{,}1) + (x_5, 0{,}2) + (x_6, 0{,}8)\}$ или в виде таблицы 1.

Таблица 1

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_A(x)$ | 0,9 | 0 | 1 | 0,1 | 0,2 | 0,8 |

НМ можно, как и обычное, задавать также *графическим способом*. В частности, НМ из примера 1.3 представлено на рисунке 4.

Если $A$ – непрерывное множество, то для его представления, как сказано ранее, будем применять характеристическую функцию $\mu_A(x)$ (см. пример 1.4).

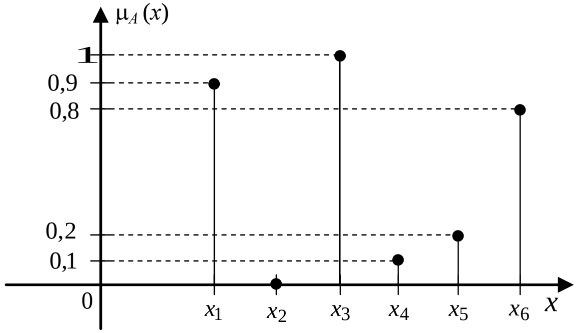


Рисунок 4

Часто для задания НМ его функцию принадлежности $\mu_A(x)$ описывают *аналитически*.

***Пример 1.4.*** Допустим, что $X = [0, 100]$ и элементы $x$ этого множества $X$ означают возраст человека. Тогда НМ $A$ = «молодой» можно представить с помощью функции принадлежности $\mu_A(x) = 1$ для $x \in [0, 25]$ и $\mu_A(x) = \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}$ для $x \in (25, 100]$. Аналогично, НМ $B$ = «старый» можно представить с помощью функции

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, \text{если}\, x \in [0, 50], \\ \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, \text{если}\, x \in (50, 100]. \end{cases}$$

Графики функций $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ приведены соответственно на рисунках 5 и 6.

Как видно, понятие НМ тесно связано с понятием множества и дает возможность изучать нестрого или частично определенные понятия с использованием математических структур.

***Пример 1.5.*** Пусть $A$ – НМ чисел, близких к трем. Графически функция $\mu_A(x)$ изображена на рисунке 7. Отметим, что вид этой функции зависит от того смысла, который мы вкладываем в понятие «близко» в контексте анализируемой ситуации.

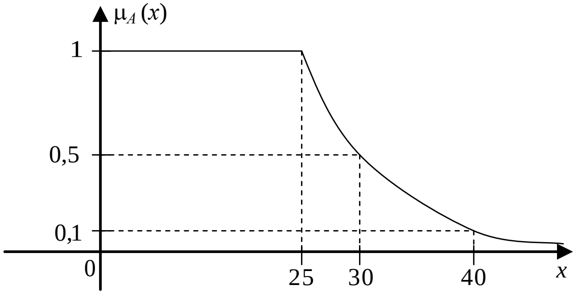


Рисунок 5

***Пример 1.6.*** Пусть $A$ – будущая прибыль некоторого предприятия. Ее эксперт оценивает как некоторое НМ $A = \{(20, 0), (21, 0{,}6), (22, 1), (23, 0{,}8), (24, 0{,}4), (25, 0{,}2), (26, 0)\}$. По мнению эксперта, прибыль будет составлять не менее 20 и не более 26 денеж. ед. С достаточно высоким значением функции принадлежности, равным 0,6, она составит 21 денеж. ед., т. е. $\mu_A(21) = 0{,}6$. Экспертом сделаны выводы, что $\mu_A(23) = 0{,}8$, $\mu_A(24) = 0{,}4$. Наиболее возможное значение прибыли равно 22 денеж. ед.

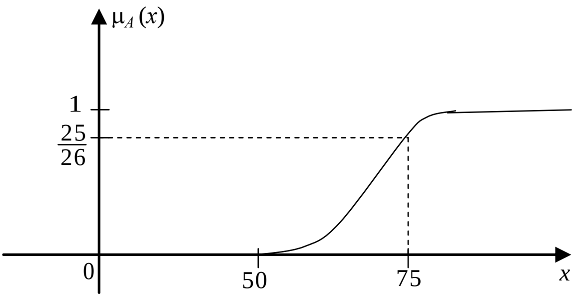


Рисунок 6

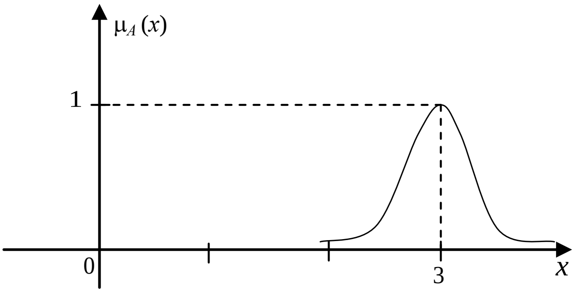


Рисунок 7

***Пример 1.7.*** Важной для предприятия является оценка возможностей персонала для выполнения определенных задач или его ориентации на другие задачи [8]. Эта задача подпадает под действие теории НМ, так как речь идет о многокритериальной проблеме с детерминированными нечеткими данными. Допустим, что существует 6 видов деятельности предприятия

$$\eta = \{a, b, c, d, e, f\}. \tag{1.3}$$

Эксперт по отбору определяет оценку качеств каждого кандидата по каждому из этих видов деятельности, выражаемую с помощью дроби от 0 до 1. Некоторые из этих оценок могут быть измеримыми, другие же имеют субъективный характер. Таким образом, квалификация кандидата $q$ представляется, например, НМ

$$Q = \{(a, 0{,}7), (b, 0{,}3), (c, 0), (d, 0{,}4), (e, 1), (f, 0{,}6)\}. \tag{1.4}$$

## 1.5. Основные характеристики нечеткого множества

***Определение 1.2.*** НМ $A$ называется *пустым*, если для любого $x \in X$ $\mu_A(x) = 0$. В дальнейшем пустое НМ будет обозначаться символом Ø.

***Определение 1.3.*** *Носителем* (основанием) НМ $A$ называется обычное подмножество $\{x | x \in X, \mu_A(x) > 0\}$.

***Определение 1.4.*** *Высотой* (height – hgt) НМ $A$ в $X$ называется число $hgt A = \sup \mu_A(x)$ $(x \in X)$. НМ $A$ с $hgt A = 1$ называется *нормальным*, а при $hgt A < 1$ – *субнормальным*.

***Определение 1.5.*** *Ядром* (core), или *центром*, НМ $A$ называется множество $core\,A = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$.

***Определение 1.6.*** НМ $A$ называется *унимодальным*, если равенство $\mu_A(x) = 1$ выполняется лишь для одного $x \in X$.

Таким образом, ядро унимодального множества состоит из одного элемента, который называется его *модой*.

***Определение 1.7.*** *Точкой перехода* НМ $A$ называется такой элемент $x$ этого множества, для которого $\mu_A(x) = 0{,}5$.

***Определение 1.8.*** $\alpha$-*срезом* $A_\alpha$ НМ $A$ называется множество таких его элементов, для которых характеристическая функция $\mu_A(x)$ принимает значение, не меньшее заданного числа $\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), т. е.

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

***Определение 1.9.*** *Границами* НМ $A$ называются такие значения элементов универсального множества $X$, для которых значения характеристической функции $\mu_A(x)$ отличны от 0 и 1. Иными словами, границы НМ $A$ состоят из тех и только тех элементов $x \in X$, для которых выполняется неравенство $0 < \mu_A(x) < 1$. Можно заметить, что границы являются подмножеством носителя.

***Определение 1.10.*** Четкое множество $A_\text{o}$ называется ближайшим к НМ $A$, если

$$\mu_{A_\text{o}}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_A(x) < 0{,}5, \\ 1, \text{ если } \mu_A(x) > 0{,}5, \\ 0 \text{ или } 1, \text{ если } \mu_A(x) = 0{,}5. \end{cases}$$

***Пример 1.8.*** Пусть $A$ – НМ из примера 1.3. Тогда носителем НМ $A$ будет множество $\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, а границами – множество $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$. Высотой $hgt\,A$ данного нечеткого множества $A$ является число $hgt\,A = 1$, так как в $A$ имеется элемент $x_3$ со значением $\mu_A(x_3) = 1$ функции принадлежности. НМ $A$ является поэтому нормальным. Ядро НМ $A$ состоит из одного элемента $x_3$: $core\,A = \{x_3\}$. $A_{0,2} = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$. Поэтому это НМ является унимодальным. Примером другого унимодального НМ является НМ из примера 1.5. Его ядро состоит из одного элемента 3. Ядром НМ $A$ = «молодой» является отрезок [0, 25]. Четким множеством $A_o$, ближайшим к НМ $A$, является множество $\{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 0), (x_6, 1)\}$ или попросту $\{x_1, x_3, x_6\}$.

***Пример 1.9.*** Пусть $A$ – НМ, заданное при помощи таблицы 2.

Таблица 2

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_A(x)$ | 0,5 | 0 | 1 | 0,3 | 0,2 | 1 | 0,9 |

Данное НМ является нормальным, но не унимодальным, так как $core\,A = \{x_3, x_6\}$. Носителем его выступает множество $\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$, а границами – множество $\{x_1, x_4, x_5, x_7\}$. Точкой перехода данного НМ является элемент $x_1$.

***Определение 1.11.*** НМ $A$, определенное на универсальном множестве $X$, называется *выпуклым*, если для любых значений $x$, $a$, $b$, при которых $a < x < b$ и $a \neq b$, его характеристическая функция $\mu_A(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_A(x) \geq \min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}.$$

Графики функций принадлежности выпуклого и невыпуклого НМ изображены соответственно на рисунках 8 и 9.

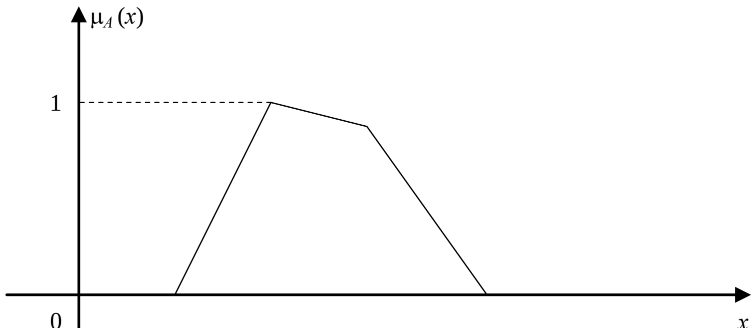

Рисунок 8

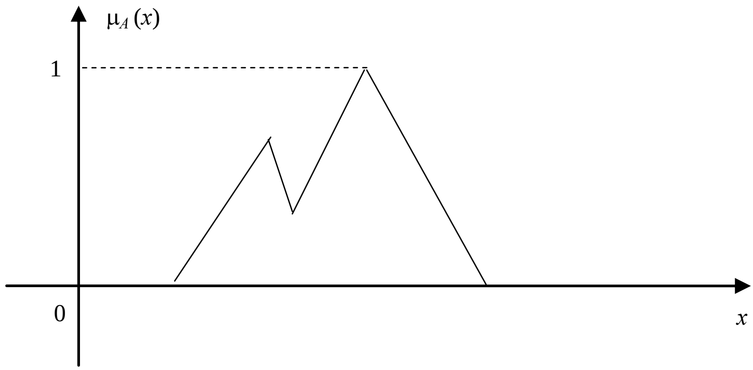


Рисунок 9

### *Упражнения*

***Упражнение 1.*** Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – универсальное множество, а $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ – подмножества из $X$. Необходимо:

- определить подмножества $\overline{A}, \overline{B}, \ A \cap B, A \cup B$;
- представить подмножества $A, B, \ \overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B$ через элементы универсального множества $X$ с сопровождением соответствующих значений характеристической функции;
- изобразить подмножества из вышеприведенного пункта графически.

***Упражнение 2.*** Для универсального множества $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и нечетких подмножеств

$A = \{(a, 0{,}4), (b, 0), (c, 1), (d, 0{,}7), (e, 0{,}9), (f, 0{,}3), (g, 0{,}2), (h, 0{,}6)\}$;

$B = \{(a, 0{,}7), (b, 0{,}1), (c, 0), (d, 0{,}5), (e, 1), (f, 0{,}4), (g, 0{,}8), (h, 0{,}2)\}$;

$C = \{(a, 1), (b, 0{,}4), (c, 0), (d, 0{,}9), (e, 0{,}6), (f, 0), (g, 1), (h, 0{,}1)\}$

определить их основные характеристики, 0,6-срезы; задать эти подмножества графически, изобразив элементы множества $X$ точками числовой прямой.

***Упражнение 3.*** Пусть $A$, $B$ – НМ из примеров 1.4, 1.5. Необходимо:

- определить носители, границы, высоты, ядра НМ $A$ и $B$;
- указать, являются ли НМ $A$, $B$ нормальными, унимодальными.

# § 2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ И МЕТОДЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

## 2.1. Основные типы функций принадлежности

Кроме примеров характеристических функций, приведенных в пункте 1.4, существует и много других.

Для представления НМ $A$ формальное представление его не накладывает никаких ограничений на выбор конкретной функции $\mu_A(x)$ принадлежности. Тем не менее, практически целесообразно использовать лишь функции, допускающие аналитическое представление, т. е. представление с помощью математических формул.

К первому типу функций принадлежности относятся так называемые *кусочно-линейные* функции. Наиболее характерными их примерами являются *треугольная* (рисунок 10) и *трапециевидная* (рисунок 11) функции принадлежности [9].

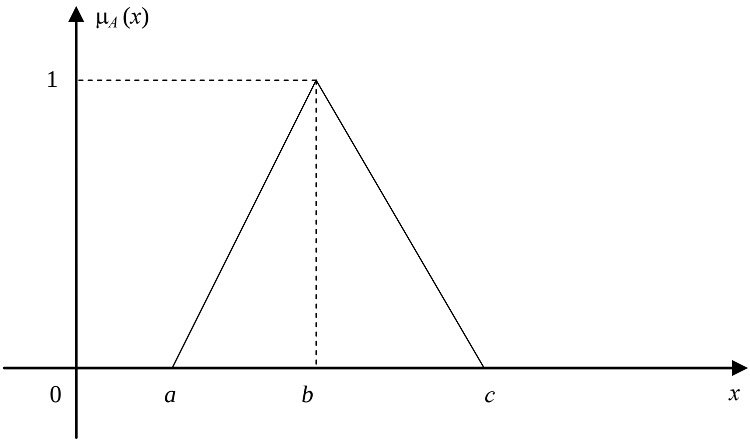


Рисунок 10

Треугольная функция принадлежности аналитически может быть задана с помощью следующего выражения:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, b \le x \le c, \\ 0, x \ge c. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Вторая функция принадлежности может быть задана при помощи следующего выражения:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ 1, b \le x \le c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, c \le x \le d, \\ 0, x \ge d. \end{cases} \qquad (2.2)$$

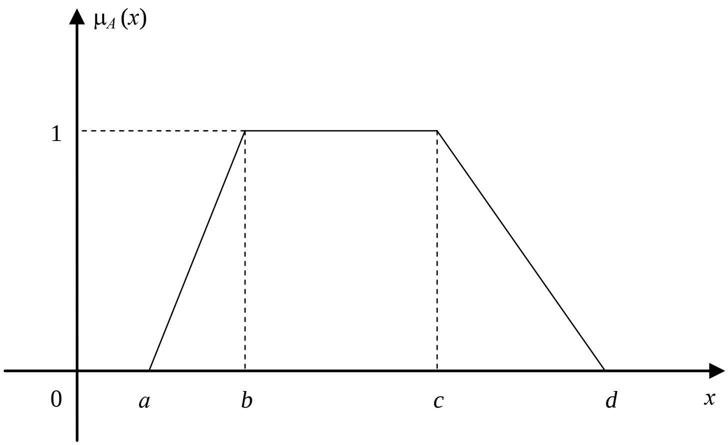


Рисунок 11

Эти функции используют для задания свойств НМ, характеризующих неопределенность типа: «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет» и т. п. Их также используют для представления нечетких чисел и интервалов, которые будут рассмотрены в § 5.

Довольно часто применяемыми среди функций принадлежности являются $z$- и $s$-*образные кривые* (рисунки 12, 13).

Первая (т. е. z-образная) функция принадлежности может быть аналитически задана одним из следующих двух выражений:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x < a, \\ 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right), a \le x \le b, \\ 0, x > b, \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \le a, \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, a < x < \dfrac{a+b}{2}, \\ 2\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2, \dfrac{a+b}{2} < x < b, \\ 0, x \ge b. \end{cases}$$

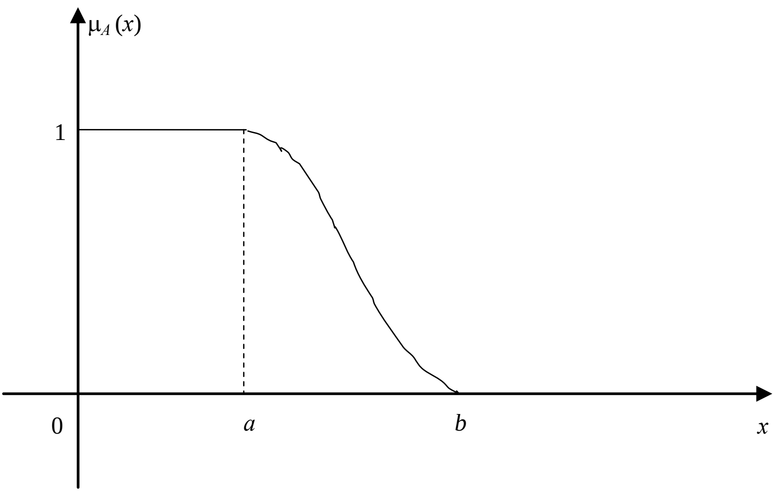


Рисунок 12

Эту функцию принадлежности часто используют для представления свойств НМ, которые характеризуются неопределенностью следующего типа: «малое количество», «небольшое значение», «незначительная величина», «низкая себестоимость продукции», «низкий уровень цен или доходов», «низкая процентная ставка» и т. п. Для всех таких ситуаций общей чертой является слабая степень проявления того или иного качественного или количественного признака. В этом случае особенность нечеткого моделирования проявляется в представлении соответствующих НМ при помощи невозрастающих (монотонно убывающих) характеристических функций.

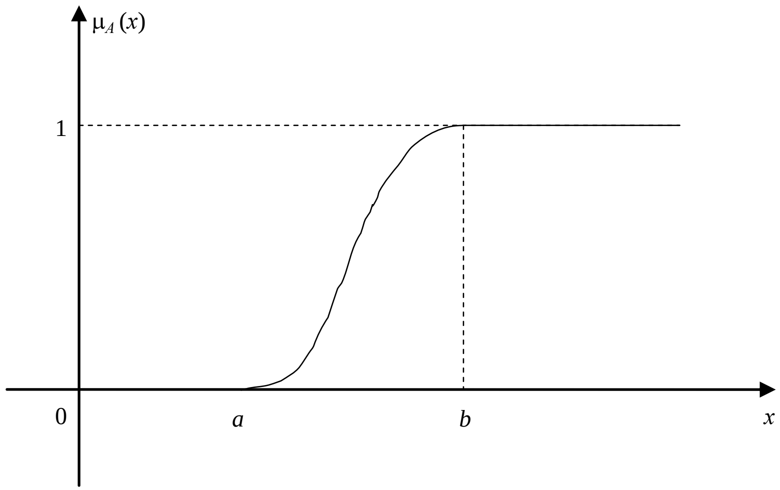


Рисунок 13

Вторую (т. е. s-образную) функцию принадлежности можно задать при помощи одного из следующих двух выражений:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\dfrac{x-b}{b-a}\pi\right), a \le x \le b, \\ 1, x > b, \end{cases}$$

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, x\le a,\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, a<x\le\dfrac{a+b}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2, \dfrac{a+b}{2}<x<b,\\ 1, x\ge b.\end{cases}$$

Последняя рассмотренная функция принадлежности используется при представлении НМ, характеризующихся неопределенностью следующего типа: «большое количество», «большое значение», «значительная величина», «высокий уровень доходов и цен», «высокая норма прибыли», «высокое качество услуг», «высокий сервис обслуживания» и т. п.

Важными частными случаями рассмотренных z- и s-образных функций принадлежности являются *линейная z-образная* (рисунок 14) и *линейная s-образная* (рисунок 15) функции.

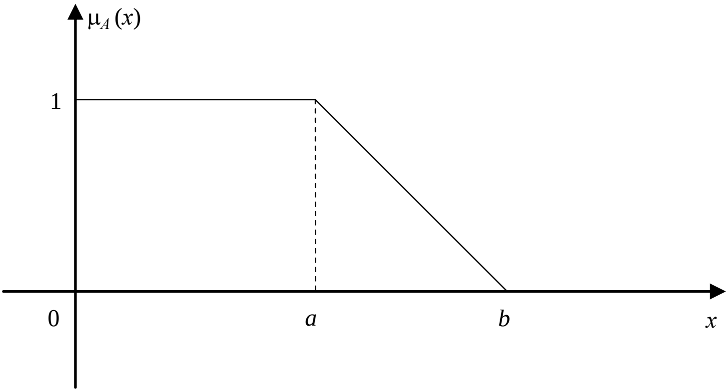


Рисунок 14

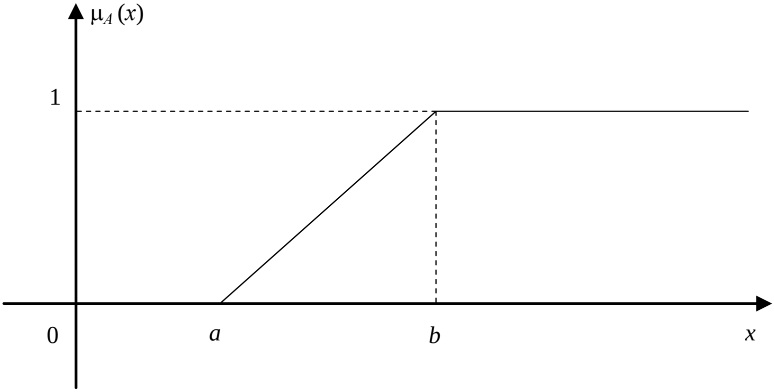


Рисунок 15

В конце приведем еще один тип функции принадлежности:

$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{\delta^2}}$ – колоколообразная (нормальная) кривая. Здесь $m$ – заданное число, $\delta$ – показатель нечеткости, $x \in R$. На рисунке 7 приведен график такой функции принадлежности при $m$ = 3.

При решении различных научно-исследовательских задач нечеткого управления широко используются следующие функции принадлежности:

1) $\mu_A(x) = e^{-kx}$, $x > 0$;

2) $\mu_A(x) = 1 - ax^k$, $0 \le x \le a^{-\frac{1}{k}}$, $a > 0$;

3) $\mu_A(x) = \left(1 + kx^2\right)^{-1}$, $k > 1$.

### 2.2. Прямые и косвенные методы нахождения функции принадлежности

В основе всякой теории из любой области науки лежит очень важное, основополагающее для ее построения понятие элементарного объекта (например, для механики – это материальная точка, для электродинамики – вектор напряженности поля). Для теории нечетких множеств таким основополагающим понятием является понятие нечеткого множества, которое характеризуется функцией принадлежности.

При помощи нечеткого множества можно строго описывать присущие языку человека расплывчатые элементы, без формализации которых нет надежды существенно продвинуться вперед в моделировании интеллектуальных процессов. Но основная трудность, которая мешает интенсивному применению теории нечетких множеств при решении задач практики, заключается в том, что функция принадлежности должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена средствами теории. В каждом методе построения функции принадлежности, который существует в настоящее время, формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения.

Для построения характеристической функции $\mu_A(x)$ является важным выполнение некоторых правил, содержание которых предопределяется видом неопределенности, учитываемой при построении нечеткой модели конкретного явления или процесса.

С каждым НМ ассоциируется некоторое свойство, признак или атрибут, характеризующие изучаемую совокупность объектов универсального множества. При применении ТНМ для решения задач практики предполагается в качестве первого шага формализация используемых нечетких понятий и отношений. Следовательно, важным является вопрос построения функции принадлежности НМ по результатам опроса или при помощи анализа документов. *Прямые методы* используются для измеримых понятий, таких как, например, объем товарооборота, темп прироста, величина прибыли и т. п. Такой подход предусматривает применение групповых прямых методов, при которых группе экспертов в количестве $n_1 + n_2$ человек или коллективному ЛПР предъявляют конкретный объект, т. е. любое предприятие, фирму, магазин, и каждый эксперт обязан дать по каждому параметру один из двух возможных ответов такого, например, типа: «Этот параметр $x$ в норме» или «Этот параметр $x$ не в норме». Тогда количество $n_1$ положительных ответов, деленное на число $n_1 + n_2$ всех экспертов, дает значение $\mu_A(x)$ функции принадлежности для НМ $A$ параметров, находящихся в норме:

$$\mu_A(x) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}.$$

При прямом построении функции $\mu_A(x)$ принадлежности важно учитывать то, что ТНМ не требует абсолютно точного ее задания. Чаще всего достаточно зафиксировать наиболее характерные значения и тип функции $\mu_A(x)$.

***Пример 2.1.*** Пусть надо построить НМ, представляющее свойство «*дневной товарооборот магазина около 90 млн р.*». На первом этапе достаточно представить НМ с помощью треугольной функции принадлежности с параметрами $a$ = 80 млн р., $b$ = 90 млн р. и $c$ = 100 млн р. В случае же необходимости построения НМ, представляющего свойство «*дневной товарооборот магазина находится приблизительно в пределах 90–100 млн р.*», на начальном этапе может быть достаточным представление соответствующего НМ с помощью трапециевидной функции принадлежности с параметрами $a$ = 84 млн р., $b$ = 90 млн р., $c$ = 100 млн р., $d$ = 106 млн р. В будущем эти функции могут быть уточнены на основе анализа результатов решения конкретных задач.

Процесс построения или задания НМ на основе некоторых известных количественных значений измеримого признака получил специальное название – *фаззификация*, или приведение к нечеткости.

В тех случаях, когда отсутствуют количественные признаки, необходимые для определения НМ, для построения функции $\mu_A(x)$ используются *косвенные методы*.

В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворять заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходными данными для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки. Примерами дополнительных условий могут служить следующие: функция принадлежности должна отражать близость к заранее выделенному эталону; объекты множества $X$ являются точками в параметрическом пространстве; результатом процедуры обработки должна быть функция принадлежности, удовлетворяющая условиям интервальной шкалы; при попарном сравнении объектов, если один объект оценивается в $\alpha$ раз сильнее, чем другой, то второй объект оценивается только в $\frac{1}{\alpha}$ раз сильнее, чем первый, и т. д.

Если гарантируется, что люди далеки от случайных ошибок и работают как «надежные и правильные приборы», то можно спрашивать их непосредственно о значениях функции принадлежности. Однако имеются искажения (например, субъективная тенденция сдвигать оценки объектов в направлении концов оценочной шкалы). Следовательно, прямые измерения, основанные на непосредственном определении принадлежности, должны использоваться только в том случае, когда такие ошибки незначительны или маловероятны.

Косвенные методы основаны на более пессимистических представлениях о людях как об «измерительных приборах». Рассмотрим, например, понятие «УДОБСТВО», которое, в отличие от понятий «ОБЪЕМ» или «ЦЕНА», – сложное и трудно формализуемое. Практически не существует универсальных элементарных измеримых свойств, через которые определяется удобство. В таких случаях используются только ранговые измерения при попарном сравнении объектов. Косвенные методы более трудоемки, чем прямые, но их преимущество – в стойкости по отношению к искажениям в ответе. Для косвенных методов можно выдвинуть условие «безоговорочного экстремума»: при определении степени принадлежности множество исследуемых объектов должно содержать, по крайней мере, два объекта, численные представления которых на интервале [0, 1] принимают значения 0 и 1 соответственно. Итак, выделены две основные группы методов построения функции принадлежности (прямые и косвенные). Однако функция принадлежности может отражать как мнение группы экспертов, так и мнение одного эксперта. Следовательно, возможны, по крайней мере, четыре группы методов: прямые и косвенные для одного эксперта, прямые и косвенные для группы экспертов. Кроме этого, необходимо рассмотреть методы построения функции принадлежности терм-множеств.

## 2.3. Построение функции принадлежности на основе парных сравнений

Пусть $X = \{x\}$ – универсальное множество, состоящее из $n$ элементов. Нечеткое подмножество $A$ множества $X$ согласно определению 1.1 есть множество $\{x, \mu_A(x)\}$ упорядоченных пар, в каждой из которых на втором месте находится значение $\mu_A(x)$ функции принадлежности для элемента $x$. Будем требовать, чтобы для всех элементов $x$ множества $A$ выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) = 1.$$

Значения функции принадлежности элементов множеству $A$ будем находить при помощи метода парных сравнений [3, с. 7], являющегося косвенным методом.

Для этого используются оценки, которые приведены в таблице 3.

Таблица 3

| Оценка важности | Качественная оценка | Примечание |
|---|---|---|
| 1 | Одинаковая значимость | По данному критерию альтернативы имеют одинаковый ранг |
| 3 | Слабое превосходство | Соображения о предпочтении одной альтернативы перед другой малоубедительны |
| 5 | Сильное (существенное) превосходство | Имеются надежные доказательства существенного превосходства одной альтернативы |
| 7 | Очевидное превосходство | Существуют убедительные свидетельства в пользу одной альтернативы |
| 9 | Абсолютное превосходство | Свидетельство в пользу предпочтения одной альтернативы перед другой |
| 2, 4, 6, 8 | Промежуточные значения между соседними оценками | Используется, когда необходим компромисс |

Оценку элемента $x_i$ по сравнению с элементом $x_j$ с точки зрения свойства $A$ обозначим при помощи $b_{ij}$. Для того чтобы обеспечить согласованность примем $b_{ij} = \dfrac{1}{b_{ji}}$. В результате такого подхода появилась квадратная матрица $B = (b_{ij})$ $n$-го порядка. Определим собственный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ матрицы $B$, для чего следует решить характеристическое уравнение $\mathbf{Bw} = \lambda\mathbf{w}$, где $\lambda$ – собственное число матрицы $B$. Вычисленные значения $\omega_i, i = \overline{1,n}$, составляющие собственный вектор $\mathbf{w}$, принимаются в качестве значений характеристической функции элементов $x$ НМ $A$:

$$\mu_A(x_i) = \omega_i, i = \overline{1,n}.$$

В силу выполнения равенства $\mathbf{Bw} = n\mathbf{w}$, найденные значения $\omega_i$ являются тем более точными, чем ближе $\lambda_{\max}$ к $n$. Отклонение $\lambda_{\max}$ от $n$ является мерой согласованности суждений экспертов.

***Пример 2.2.*** Рассмотрим задачу оценки эффективности работы четырех однородных организаций. Экономическая эффективность работы организации – сложная и многогранная категория в экономике, которая может быть выражена целой системой экономических показателей. Для нахождения оценок эффективности этих организаций в зависимости от целого ряда экономических показателей был проведен эксперимент. Оценки эффективности работы проводили независимо друг от друга две группы экспертов. Результатами их работы являются следующие две матрицы парных сравнений:

1. Матрица парных сравнений первой группы экспертов имеет вид

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор **w**, который удовлетворяет условию **Bw** = λ**w**, где λ – характеристическое число матрицы.

Для нахождения собственных векторов матрицы обратимся к решению системы (**B** – λ**E**)**w** = 0. Эта однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель ее матрицы **B** – λ**E** равен нулю. Вычислим этот определитель:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 & 6 \\ \frac{1}{3} & 1-\lambda & 2 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1-\lambda & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 - \frac{67}{24}\lambda - 0{,}105.$$

Приравняв этот определитель к нулю, получим уравнение

$\lambda^4 - 4\lambda^3 - \frac{67}{24}\lambda - 0{,}105 = 0,$ которое имеет решение

$$\lambda_1 = 0{,}036;\ \lambda_2 = -0{,}064 + 0{,}146i;\ \lambda_3 = -0{,}064 - 0{,}146i;\ \lambda_4 = 4{,}163.$$

Значит, $\lambda_{\max} = 4{,}163$. Находим собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} 1-4{,}163 & 3 & 5 & 6 \\ \frac{1}{3} & 1-4{,}163 & 2 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1-4{,}163 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1-4{,}163 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Вводим условие нормировки: $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -3{,}163\omega_1 + 3\omega_2 + 5\omega_3 + 6\omega_4 = 0, \\ \frac{1}{3}\omega_1 - 3{,}163\omega_2 + 2\omega_3 + 5\omega_4 = 0, \\ 0{,}2\omega_1 + 0{,}5\varpi_2 - 3{,}163\omega_3 + 4\omega_4 = 0, \\ \frac{1}{6}\omega_1 + 0{,}2\omega_2 + 0{,}25\omega_3 - 3{,}163\omega_4 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Эта система имеет только нулевое решение. Поэтому для того чтобы найти собственный вектор **w**, заменим одно из уравнений системы (2.3) условием нормировки. Решая полученную указанным способом систему, будем иметь собственный вектор:

$\omega_1 = 0{,}567$; $\omega_2 = 0{,}233$; $\omega_3 = 0{,}144$; $\omega_4 = 0{,}056$ (при $\lambda_{\max} = 4{,}163$).

2. Матрица парных сравнений второй группы экспертов имеет вид

$$B_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы **B** – λ**E** согласно приведенному ранее описанию:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 & 7 \\ 0{,}5 & 1-\lambda & 3 & 4 \\ 0{,}25 & \dfrac{1}{3} & 1-\lambda & 2 \\ \dfrac{1}{7} & 0{,}25 & 0{,}5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 - \frac{31}{84} - \frac{1}{336}.$$

Приравнивая найденный определитель к нулю, находим решение полученного уравнения:

$$\lambda_1 = -0{,}278;\ \lambda_2 = 0{,}126 - 0{,}398i;\ \lambda_3 = 0{,}126 + 0{,}398i;\ \lambda_4 = 4{,}026.$$

Замечаем, что $\lambda_{\max} = 4{,}026$. Находим соответствующий этому собственному числу собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} -3{,}026 & 2 & 4 & 7 \\ 0{,}5 & -3{,}026 & 3 & 4 \\ 0{,}25 & \dfrac{1}{3} & -3{,}026 & 2 \\ \dfrac{1}{7} & 0{,}25 & 0{,}5 & -3{,}026 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} -3{,}026\omega_1 + 2\omega_2 + 4\omega_3 + 7\omega_4 = 0, \\ 0{,}5\omega_1 - 3{,}026\omega_2 + 3\omega_3 + 4\omega_4 = 0, \\ 0{,}25\omega_1 + \dfrac{1}{3}\varpi_2 - 3{,}026\omega_3 + 2\omega_4 = 0, \\ \dfrac{1}{7}\omega_1 + 0{,}25\omega_2 + 0{,}5\omega_3 - 3{,}026\omega_4 = 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

при условии $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1$.

Последняя система имеет лишь нулевое решение, поэтому для определения собственного вектора **w** произведем замену одного из уравнений системы (2.4) на условие нормировки. В результате решения полученной таким образом системы будем иметь собственный вектор:

$$\omega_1 = 0{,}51;\ \omega_2 = 0{,}296;\ \omega_3 = 0{,}136;\ \omega_4 = 0{,}058\ (\text{при}\ \lambda_{\max} = 4{,}026).$$

Заметим, что если поочередно подставлять условие нормировки вместо одного из уравнений системы (2.4), то результат решения остается без изменения.

Известно, что матрица, в которой используются обратные величины ($b_{ij} = \dfrac{1}{b_{ji}}$), выражает согласованные суждения в том и только в том случае, если $\lambda_{\max} = n.$ Известно также, что всегда $\lambda_{\max} \geq n,$ следовательно, разность $\lambda_{\max} - n$ дает нам меру несогласованности и указывает, в каком случае суждения экспертов следует проверить. В первом эксперименте при $n$ = 4 $\lambda_{\max} = 4{,}163,$ мера несогласованности равна 0,163. Во втором эксперименте $\lambda_{\max} = 4{,}026,$ мера несогласованности равна 0,026. Делаем вывод о том, что во втором эксперименте согласованность суждений экспертов выше, чем в первом.

## *Упражнения*

***Упражнение 1.*** Пусть $A_i, i = \overline{1,6}$ – НМ, порожденное соответственно следующими функциями принадлежности:

- треугольной (рисунок 10);
- трапециевидной (рисунок 11);
- z-образной (рисунок 12);
- s-образной (рисунок 13);
- линейной z-образной (рисунок 14);
- линейной s-образной (рисунок 15).

Следует для каждого из указанных НМ найти:

- носитель;
- высоту;
- границы;
- ядро.

Необходимо дать ответы о каждом из указанных НМ на следующие вопросы:

1. Является данное НМ нормальным или субнормальным?
2. Является ли данное НМ унимодальным?
3. Является ли данное НМ выпуклым?

***Упражнение 2.*** Для каждого из указанных ниже НМ построить характеристическую функцию и ее график:

• $A$ = «Низкий уровень доходов организации», z-образная характеристическая функция, $a = 4$, $b = 7$;

• $A$ = «Высокий сервис обслуживания», s-образная характеристическая функция, $a = 5$, $b = 9$;

• $A$ = «Среднее значение», треугольная характеристическая функция, $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$.

***Упражнение 3.*** Рассмотрим задачу оценки освещенности предметов [4, с. 7–8]. Освещенность поверхности определяется как количество светового потока на единицу площади. Для нахождения различий в освещенности четырех идентичных объектов в зависимости от их расстояния до источника был проведен следующий эксперимент. Визуальное сравнение интенсивности освещенности проводили независимо друг от друга две группы людей. Предметы находились на таких расстояниях от источника света, как 9, 15, 21 и 28 единиц длины. Матрицы $B_{01}$, $B_{02}$ представляют парные сравнения освещенности предметов, пронумерованных в возрастающем порядке в зависимости от их близости к источнику света:

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить значения функции принадлежности элементов НМ $A$ = «Освещенный предмет» в первом и втором экспериментах.

## § 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Вообще говоря, операции над НМ можно определять разными способами. Так как обычные множества охватываются классом НМ, то вводимые операции над НМ должны согласовываться в частном случае с соответствующими операциями обычной теории множеств. Исключением являются, конечно, те операции, которые в обычной теории множеств не имеют смысла (операции концентрирования, растяжения и др.). Основные элементарные операции над НМ подразделяются на *логические* и *алгебраические*.

### 3.1. Логические операции над нечеткими множествами

***Определение 3.1.*** Пусть $X$ – универсальное множество, $A$, $B$ – два НМ из $X$. Будем говорить, что *$A$ содержится* в $B$, если для любого $x \in X$

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x), \tag{3.1}$$

и пользоваться в этом случае записью $A \subset B$.

***Определение 3.2.*** Пусть $X$ – универсальное множество, $A$, $B$ – два НМ из $X$. Эти подмножества будем называть *равными* (*эквивалентными*), если для любого $x \in X$

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \tag{3.2}$$

и пользоваться в этом случае записью $A = B$.

Если существует хотя бы один элемент $x$ из $X$, для которого равенство (3.2) не выполняется, то будем говорить, что НМ $A$ и $B$ не равны друг другу, и писать $A \neq B$.

***Определение 3.3.*** Пусть $A$, $B$ – два НМ из $X$. Эти подмножества называются *взаимно дополняющими друг друга* в $X$, если для любого $x \in X$

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x). \tag{3.3}$$

В этом случае будем писать $B = A$ или $A = B$.

Операция дополнения соответствует логическому отрицанию «НЕ».

***Определение 3.4.*** *Объединением* НМ $A$ и $B$ в $X$ называется такое НМ $A \cup B$, что функция принадлежности его имеет вид:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_A(x)\} \equiv \mu_A(x) \vee \mu_A(x),\ x \in X. \tag{3.4}$$

Очевидно, что $A \cup B$ – наименьшее НМ, которое содержит как $A$, так и $B$.

Операция объединения моделирует логическую связку «ИЛИ».

***Определение 3.5.*** *Пересечением* НМ $A$ и $B$ в $X$ называется такое НМ $A \cap B$ в $X$, что функция принадлежности его имеет вид:

$$\mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\} \equiv \mu_A(x) \wedge \mu_B(x),\ x \in X. \qquad (3.5)$$

Очевидно, что $A \cap B$ – наибольшее НМ, содержащееся одновременно в $A$ и $B$.

Операция пересечения моделирует логическую связку «И».

В случае, когда $M = \{0, 1\}$, из определений 3.3–3.4 следуют соответственно определения операций дополнения, объединения, пересечения для обычных канторовских множеств.

В задачах управления в ходе трудовой деятельности часто приходится принимать решения в отношении планирования и реализации определенных действий в условиях нечеткого определения, характеристики ситуации, при наличии нескольких одновременно действующих оценочных показателей возможных результатов.

***Пример 3.1.*** В условиях производственной деятельности весьма частыми являются задачи выбора тех или иных действий из множества возможных при одновременном учете двух основных показателей: эффективности (полезности) и рентабельности (экономичности). При этом каждое из альтернативных действий практически имеет разное субъективное оценочное значение. Предположим, что руководитель некоторого предприятия должен выбрать один из 6 различных вариантов планового задания:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

В глазах руководителя оценка каждого из них в смысле эффективности определяет НМ

$$A = \{(x_{1,}, 0{,}4), (x_2, 0{,}6), (x_3, 0{,}7), (x_4, 0{,}8), (x_5, 0{,}5), (x_6, 0{,}9)\}$$

производственных процессов. В отношении же рентабельности ( экономичности материальных и трудовых ресурсов) эти производственные процессы оцениваются НМ

$$B = \{(x_1, 0{,}6), (x_2, 0{,}7), (x_3, 0{,}8), (x_4, 0{,}9), (x_5, 0{,}4), (x_6, 0{,}5)\}.$$

Тогда НМ $C$ эффективных и экономичных производственных процессов будет представляться пересечением $A \cap B$ НМ $A$ и $B$, т. е.

$$C = \{(x_1, 0{,}4), (x_2, 0{,}6), (x_3, 0{,}7), (x_4, 0{,}8), (x_5, 0{,}4), (x_6, 0{,}5)\}.$$

Значения характеристической функции $\mu_C(x)$ НМ $C$, т. е. в данном случае числа 0,4, 0,6, 0,7, 0,8, 0,4, 0,5, указывают, насколько хорошо каждый из перечисленных производственных процессов удовлетворяет требованиям быть «экономичным и эффективным». В рассматриваемом случае, по всей видимости, оптимальным является выбор четвертого варианта $x_4$, имеющего максимальное значение $\mu_C(x_4) = 0{,}8$.

***Пример 3.2.*** Пусть НМ $A$ и $B$ определены своими функциями $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$, которые изображены на рисунке 16. Функция принадлежности $\mu_{A \cup B}(x)$ изображена на этом рисунке жирной линией, а функция принадлежности $\mu_{A \cap B}(x)$ – нежирной.

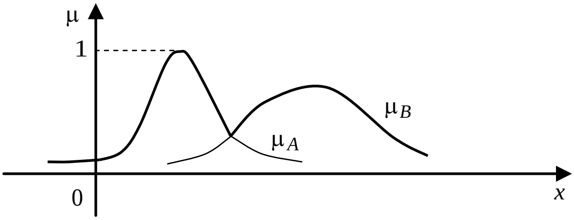


Рисунок 16

***Пример 3.3.*** Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ – универсальное множество и даны его НМ

$$A = \{(x_1, 0{,}3), (x_2, 0), (x_3, 0{,}5), (x_4, 0{,}7), (x_5, 0{,}8), (x_6, 0{,}1), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0), (x_9, 1)\};$$

$$B = \{(x_1, 0{,}4), (x_2, 0{,}5), (x_3, 0{,}6), (x_4, 0), (x_5, 0{,}3), (x_6, 0{,}9), (x_7, 1), (x_8, 0{,}3), (x_9, 0{,}6)\};$$

$$C = \{(x_1, 0{,}1), (x_2, 0), (x_3, 0{,}3), (x_4, 0{,}5), (x_5, 0{,}7), (x_6, 0), (x_7, 0{,}4), (x_8, 0), (x_9, 0{,}8)\}.$$

Так как $\mu_C(x) \le \mu_A(x)$ для всех $x \in X$, то на основании определения 1.8 делаем вывод, что $C \subset A$.

По определению 3.3 дополнениями для НМ $A$, $B$, $C$ будут НМ

$$\overline{A} = \{(x_1, 0{,}7), (x_2, 1), (x_3, 0{,}5), (x_4, 0{,}3), (x_5, 0{,}2), (x_6, 0{,}9), (x_7, 0{,}1), (x_8, 1), (x_9, 0)\};$$

$$\overline{B} = \{(x_1, 0{,}6), (x_2, 0{,}5), (x_3, 0{,}4), (x_4, 1), (x_5, 0{,}7), (x_6, 0{,}1), (x_7, 0), (x_8, 0{,}7), (x_9, 0{,}4)\};$$

$$\overline{C} = \{(x_1, 0{,}9), (x_2, 1), (x_3, 0{,}7), (x_4, 0{,}5), (x_5, 0{,}3), (x_6, 1), (x_7, 0{,}6), (x_8, 1), (x_9, 0{,}2)\}.$$

По определению 3.4

$$A \cup B = \{(x_1, 0{,}4), (x_2, 0{,}5), (x_3, 0{,}6), (x_4, 0{,}7), (x_5, 0{,}8), (x_6, 0{,}9), (x_7, 1), (x_8, 0{,}3), (x_9, 1)\}.$$

По определению 3.5

$$A \cap B = \{(x_1, 0{,}3), (x_2, 0), (x_3, 0{,}5), (x_4, 0), (x_5, 0{,}3), (x_6, 0{,}1), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0), (x_{9,}, 0{,}6)\}.$$

Для НМ важно иметь визуальное представление (например, родственное представлению обычных множеств с помощью диаграмм Венна). В основе такого представления лежит определение 3.1 включения НМ *A* в НМ *B*.

Пусть дана прямоугольная система координат, в которой на оси ординат будем откладывать значения характеристической функции $\mu_A(x)$, а на оси абсцисс – элементы универсального множества *X*. На рисунке 17 факт принадлежности элементов из *X* НМ *A* изображается его ординатой. НМ *A* вместе со всеми НМ, которые содержатся в *A,* наглядно представляется заштрихованной частью прямоугольника.

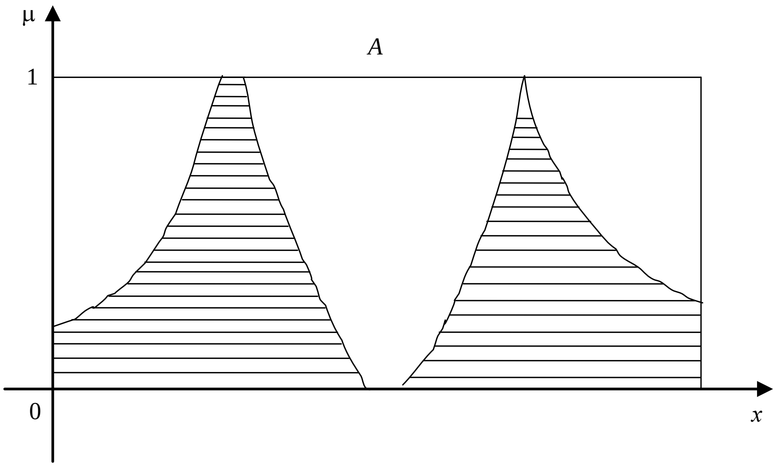

Рисунок 17

Указанное визуальное представление НМ дает возможность сделать более зримыми простейшие операции над НМ. На рисунках 18–22 проиллюстрировано использование этого представления.

На рисунках 18–20 показано свойство включения. Рисунки 19, 21 иллюстрируют операцию дополнения. Операции объединения и пересечения представлены на рисунках 17, 19, 22. При этом НМ $A \cup B$ представляется точками фигуры, заштрихованной хоть одним способом, а НМ $A \cap B$ – точками фигуры, заштрихованной как горизонтальными, так наклонными линиями.

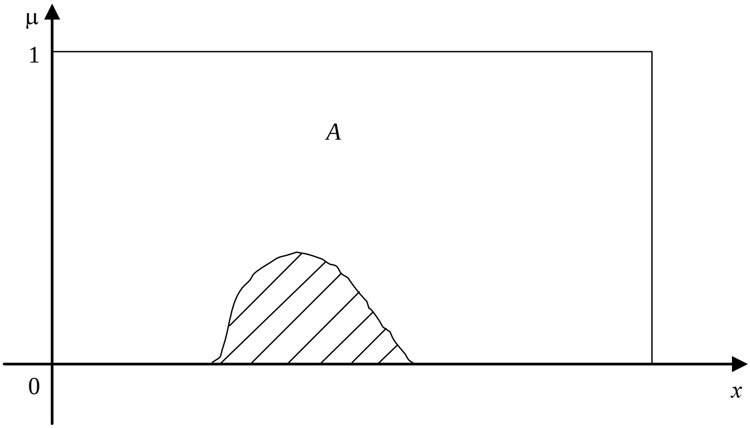


Рисунок 18

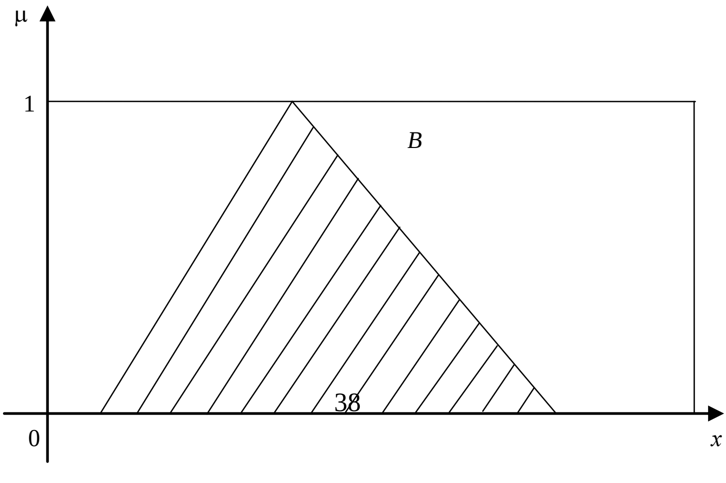

Рисунок 19

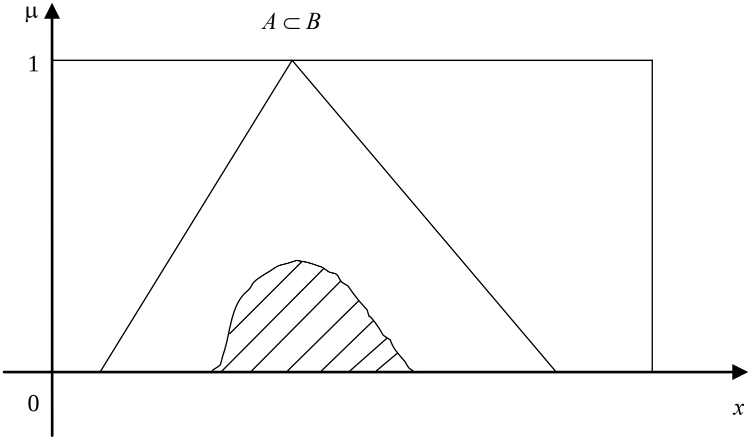


Рисунок 20

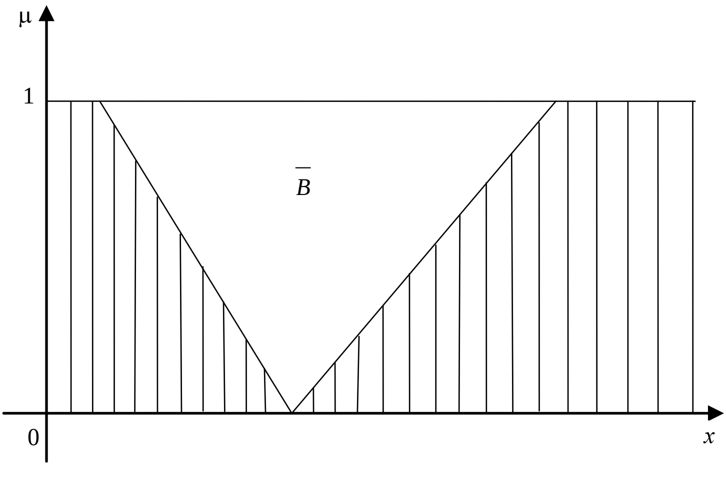


Рисунок 21

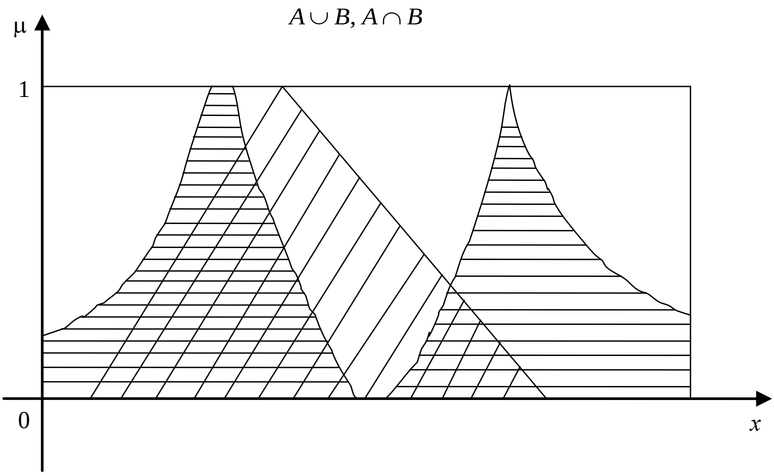


Рисунок 22

***Определение 3.6.*** *Дизъюнктивной суммой* $A \oplus B$ двух НМ $A$ и $B$ называется НМ $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ [8].

***Определение 3.7.*** *Разностью* $A - B$ двух НМ $A$ и $B$ называется НМ $A - B = A \cap \overline{B}$.

Если $M = \{0, 1\}$, то определение 3.7 превращается в определение разности обычных четких множеств.

***Пример 3.4.*** Пусть $A$, $B$ – НМ универсального множества $X$ из примера 3.3. По определению 3.6

$$A \oplus B = \{(x_1, 0{,}3), (x_2, 0), (x_3, 0{,}5), (x_4, 0{,}7), (x_5, 0{,}7), \\ (x_6, 0{,}1), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0), (x_9, 0{,}6)\}.$$

По определению 3.7

$$A - B = \{(x_1 \mid 0{,}3), (x_2 \mid 0), (x_3 \mid 0{,}4), (x_4 \mid 0{,}7), (x_5 \mid 0{,}7),$$
$$(x_6 \mid 0{,}1), (x_7 \mid 0), (x_8 \mid 0), (x_9 \mid 0{,}4)\}.$$

## 3.2. Свойства логических операций над нечеткими множествами

Пусть теперь *A*, *B*, *C* – НМ универсального множества *X*. Операциям дополнения, объединения и пересечения присущи следующие свойства:

1. *Коммутативность*, т. е.

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A, \\ A \cup B = B \cup A. \end{cases}$$

2. *Ассоциативность*, т. е.

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \end{cases}$$

3. *Идемпотентность*, т. е.

$$\begin{cases} A \cap A = A, \\ A \cup A = A. \end{cases}$$

4. Дистрибутивность, т. е.

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{cases}$$

5. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. $A \cup \varnothing = A$.
7. $A \cap X = A$.
8. $A \cup X = X$.
9. *Инволюция* $\bar{\bar{A}} = A$.
10. *Теоремы Де Моргана* для НМ:

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}. \end{cases}$$

Эти свойства НМ являются справедливыми и для обычных множеств. Кроме того, для обычного множества $A$ имеют место следующие свойства:

11. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

12. $A \cup \overline{A} = X$.

Но эти свойства не являются справедливыми для произвольного НМ $A$.

***Пример 3.5.*** Пусть $A$ – НМ чисел, гораздо больших двух, функция принадлежности этого НМ имеет вид, который показан на рисунке 23 (сплошная кривая). Тогда дополнение $A$ является НМ чисел, не являющихся гораздо большими двух.

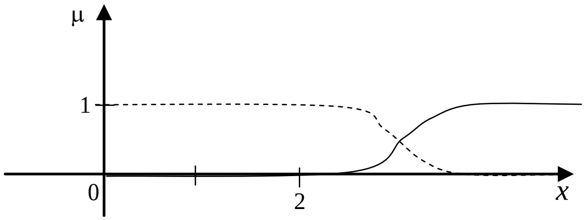


Рисунок 23

Функция $\mu_{\overline{A}}(x)$ изображена графически пунктирной линией. Непустое НМ $A \cap \overline{A}$ представляет собой множество чисел, «гораздо больших двух и одновременно не являющихся гораздо большими двух». Непустота этого НМ объясняется тем фактом, что понятие «быть гораздо большим» описано нечетко. Из этого следует, что некоторые числа могут с определенными степенями принадлежать и тому и другому НМ. Это пересечение можно рассматривать в некотором смысле в качестве нечеткой «границы» между множествами $A$ и $\overline{A}$.

*Замечание.* В решении различных проблем управления имеются отклонения от двузначной логики «принадлежности – непринадлежности». В самом деле, при помощи обычных подмножеств можно выразить дороговизну или дешевизну некоторого товара, но термины «дорогой», «дешевый» не дают абсолютно точного его описания.

Действительно, можно найти товар, который будет дорогим при цене 30, в то же время другой товар не будет дорогим и при цене 300. Каким образом сделать анализ того, является товар дорогим или дешевым? Может ли быть такая ситуация, когда товар будет тем и другим одновременно? Эти и многие другие оттенки такого рода различаются в ТНМ.

По аналогии с примером 3.5 пересечение между «дорогим» и «дешевым» здесь является непустым множеством, как это наблюдается в обычных множествах. Отметим также, что в обыденной речи понятие «недорого» не совсем соответствует понятию «дешево».

Свойства $A \cup \overline{A} \neq X$, $A \cap \overline{A} \neq \varnothing$ можно проследить и с помощью рассмотренного в пункте 3.2 визуального представления НМ. В справедливости этих свойств можно убедиться на примере, когда НМ задано треугольной функцией принадлежности, рассмотрев рисунки 19, 21, 24, 25.

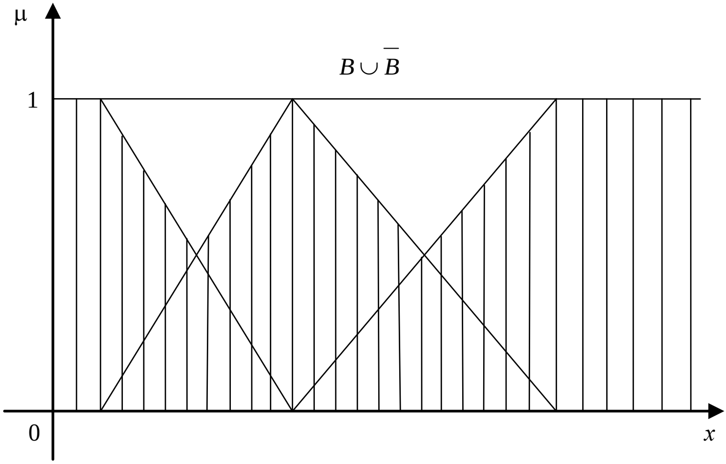


Рисунок 24

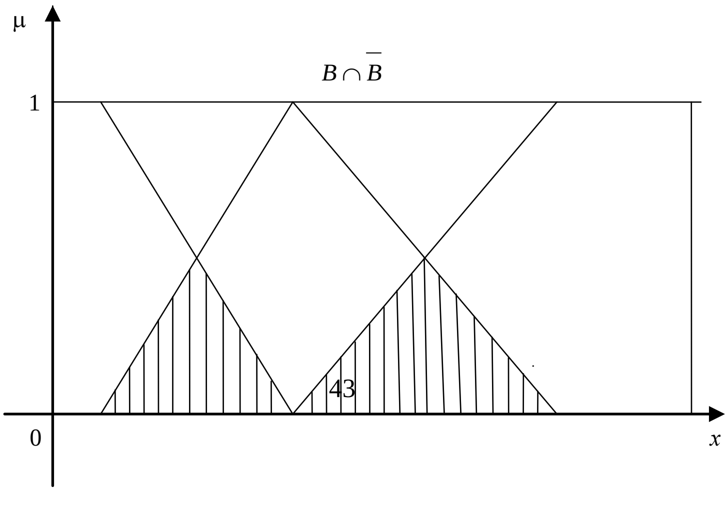

Рисунок 25

## 3.3. Алгебраические операции над нечеткими множествами

Алгебраические операции над НМ являются во многом альтернативными по отношению к максиминным операциям над НМ. Целесообразность их применения часто обуславливается спецификой конкретных практических задач и стремлением к повышению адекватности интерпретации используемых нечетких моделей на основе учета различных смысловых оттенков соответствующих им связок «И» и «ИЛИ».

***Определение 3.8.*** *Алгебраическим произведением* $A \cdot B$ двух НМ $A$ и $B$ называется такое НМ, что функция принадлежности его имеет вид: $\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$, $x \in X$.

Таким образом, значение функции принадлежности НМ $A \cdot B$ равно обычному арифметическому произведению соответствующих значений функций принадлежности НМ $A$ и НМ $B$.

Операции алгебраического произведения и объединения двух бесконечных НМ, заданных линейными z-образными функциями принадлежности на одном и том же универсальном множестве $X$, проиллюстрированы графически в декартовой системе координат на рисунках 26, 27.

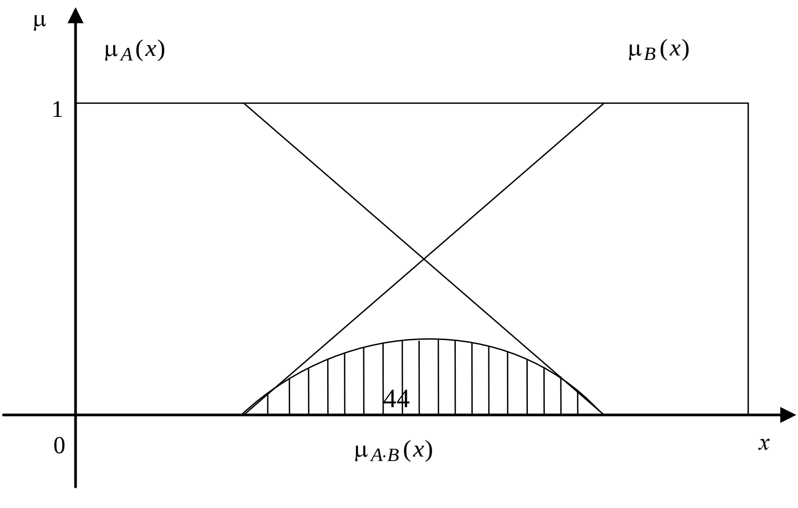

Рисунок 26

***Определение 3.9.*** *Алгебраической суммой* $A \hat{+} B$ двух НМ $A$ и $B$ называется такое НМ, что функция принадлежности его имеет вид: $\mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x),\ x \in X$.

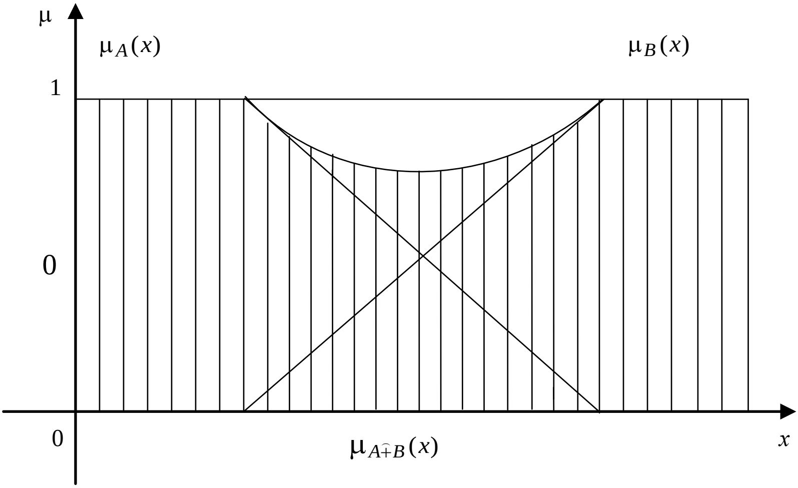


Рисунок 27

В правой части формулы характеристической функции НМ $A \hat{+} B$ использованы обычные арифметические операции.

Из определений 3.8, 3.9 в случае $M = \{0, 1\}$ (т. е. в случае обычных множеств) следуют соответственно определения их объединения, пересечения. Таким образом, видно, что на роль обобщений операций объединения и пересечения канторовских множеств претендуют не только максиминные логические операции, но и соответствующие алгебраические операции согласно определениям 3.6, 3.7. Несколько позже рассмотрим и другие обобщения.

Заметим, что значительная свобода в выборе основных конструкций является как сильной (дополнительные возможности), так и слабой (недостаточная стройность) стороной ТНМ.

***Пример 3.6.*** Пусть $A$, $B$ – НМ универсального множества $X$ из примера 3.3. По определению 3.8

$$A \cdot B = \{(x_1, 0{,}12), (x_2, 0), (x_3, 0{,}3), (x_4, 0), (x_5, 0{,}24), \\ (x_6, 0{,}09), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0), (x_9, 0{,}6)\}.$$

По определению 2.9

$$A \overset{\wedge}{+} B = \{(x_1, 0{,}58), (x_2, 0{,}5), (x_3, 0{,}8), (x_4, 0{,}7), (x_5, 0{,}86), \\ (x_6, 0{,}91), (x_7, 1), (x_8, 0{,}3), (x_9, 1)\}.$$

На основе операции алгебраического произведения введем операцию *возведения в степень* $\alpha$ НМ $A$.

***Определение 3.10.*** *Степенью* $A^{\alpha}$ ($\alpha$ – положительное число) НМ $A$ будем называть такое НМ, что функция принадлежности его имеет вид: $\mu_{A^{\alpha}}(x) = (\mu_A(x))^{\alpha}$, $x \in X$.

Частными случаями операции возведения в степень являются *операция концентрирования и операция растяжения*. Первая из них определяется следующим образом:

$$CON(A) = A^2.$$

Вторая операция определяется так:

$$DIL(A) = A^{0,5}.$$

Операция $CON$ дает возможность уменьшить степень принадлежности НМ $A$. В реальных задачах это может означать поступление какой-то новой информации, которая позволит более четко описать данное НМ. В случае высокого значения степени принадлежности это уменьшение относительно мало, для элементов же с малой степенью принадлежности – относительно велико. В нашем естественном языке это соответствует усиливающему терму «очень».

Операция $DIL$ повышает степень нечеткости, применяется для моделирования ситуаций, связанных с потерей информации. Эта операция является противоположной по своему смыслу операции концентрации и соответствует терму «довольно» = «более-менее».

***Пример 3.7.*** Пусть $X$ и $A$ – соответственно универсальное множество и НМ из примера 3.3. По определению 3.10 при $\alpha = 2$ получим:

$$CON\,(A) = A^2 = \{(x_1\,|\,0{,}09),(x_2\,|\,0),(x_3\,|\,0{,}25),(x_4\,|\,0{,}49),\\ (x_5\,|\,0{,}64),(x_6\,|\,0{,}01),(x_7\,|\,0{,}81),(x_8\,|\,0),(x_9\,|1)\};$$

$$DIL(A) = \{(x_1\,|\,0{,}55),(x_2\,|\,0),(x_3\,|\,0{,}71),(x_4\,|\,0{,}84),(x_5 0{,}89),\\ (x_6\,|\,0{,}32),(x_7\,|\,0{,}95),(x_8\,|\,0),(x_9\,|1)\}.$$

## 3.4. Свойства алгебраических операций над нечеткими множествами

Хотя операции $\cdot$ и $\hat{+}$ алгебраических произведения и суммы будут использоваться значительно реже, чем соответствующие максиминные операции $\cap$, $\cup$, тем не менее они интересны для других направлений исследований.

Как можно непосредственно проверить, для указанных операций $\cdot$ и $\hat{+}$ на множестве $\{A, B, C, \ldots\}$ всех нечетких подмножеств выполняются лишь следующие свойства:

1. *Коммутативность,* т. е.

$$\begin{cases} A \cdot B = B \cdot A, \\ A \hat{+} B = B \hat{+} A. \end{cases}$$

2. *Ассоциативность*, т. е.

$$\begin{cases} (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \\ (A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C). \end{cases}$$

Имеет место существование *единичных элементов* Ø, $X$ относительно операций алгебраических суммы и произведения (свойства 3 – 6):

3. $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

4. $A \hat{+} \varnothing = A$.

5. $A \cdot X = A$.

6. $A \hat{+} X = X$.

7. *Инволюция*, т. е. $\overline{(\overline{A})} = A$.

8. *Теоремы Де Моргана* для алгебраических операций умножения и сложения

$$\begin{cases} \overline{A \cdot B} = \overline{A} \hat{+} \overline{B}, \\ \overline{A \hat{+} B} = \overline{A} \cdot \overline{B}. \end{cases}$$

Но остальные свойства, которые являются справедливыми для классических операций объединения и пересечения множеств, для алгебраических операций умножения и сложения НМ в общем случае не имеют место.

9. Не являются справедливыми законы *дистрибутивности* операций алгебраического произведения и объединения НМ относительно друг друга:

$$A \hat{+} (B \cdot C) \neq (A \hat{+} B) \cdot (A \hat{+} C);$$

$$A \cdot (B \hat{+} C) \neq (A \cdot B) \hat{+} (A \cdot C).$$

10. Не являются справедливыми законы *идемпотентности* операций алгебраических произведения и объединения НМ:

$$A \cdot A \neq A; \qquad A \hat{+} A \neq A.$$

11. Не имеют места поглощение одного из НМ при операциях алгебраического произведения и объединения НМ:

$$A \hat{+} (A \cdot B) \neq A; \qquad A \cdot (A \hat{+} B) \neq A.$$

12. Не являются справедливыми закон исключенного третьего и закон тождества (свойства дополняемости операций алгебраического произведения и объединения) для НМ:

$$A \cdot \overline{A} \neq \varnothing; \qquad A \hat{+} \overline{A} \neq X.$$

Отсутствие свойств 9–12 для операций алгебраического произведения и объединения во многом обедняет структуру.

## 3.5. Другие альтернативные операции над нечеткими множествами

***Определение 3.11.*** *Граничным пересечением* $A \circ B$ двух НМ $A$ и $B$ называется такое НМ, заданное на универсальном множестве $X$, на котором определены НМ $A$, $B$, что для любого $x \in X$ $\mu_{A \circ B}(x) = \max\{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1{,}0\}$.

***Определение 3.12.*** *Граничным объединением* $A(+)B$ двух НМ $A$ и $B$

называется такое НМ, заданное на том же универсальном множестве $X$, на котором определены НМ $A$ и $B$, что для любого $x \in X$ $\mu_{A(+)B}(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\}$.

В правых частях формул, определяющих функции принадлежности НМ $A \circ B$ и $A(+)B$, использованы обычные арифметические операции.

***Пример 3.8.*** Пусть $A$, $B$ – НМ из примера 2.3. Тогда

$$A \circ B = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0{,}1), (x_4, 0), (x_5, 0{,}1), (x_6, 0), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0), (x_9, 0{,}6)\};$$

$$A(+)B = \{(x_1, 0{,}7), (x_2, 0{,}5), (x_3, 1), (x_4, 0{,}7), (x_5, 1), (x_6, 1), (x_7, 1), (x_8, 0{,}3), (x_9, 1)\}.$$

Результаты операций граничного пересечения и объединения двух бесконечных НМ $A$ и $B$, заданных линейными z-образными функциями принадлежности, изображены с помощью штриховки соответственно на рисунках 28, 29.

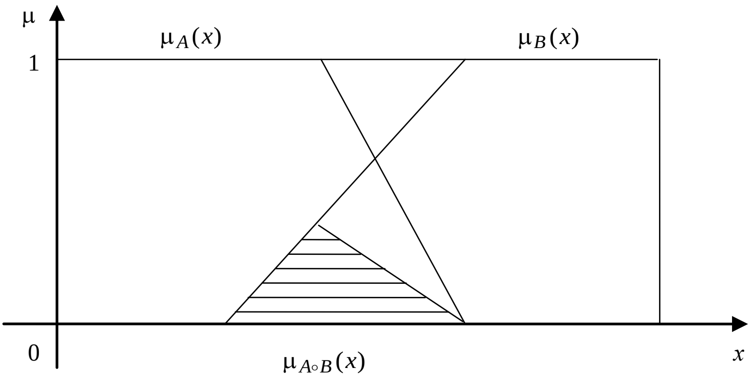


Рисунок 28

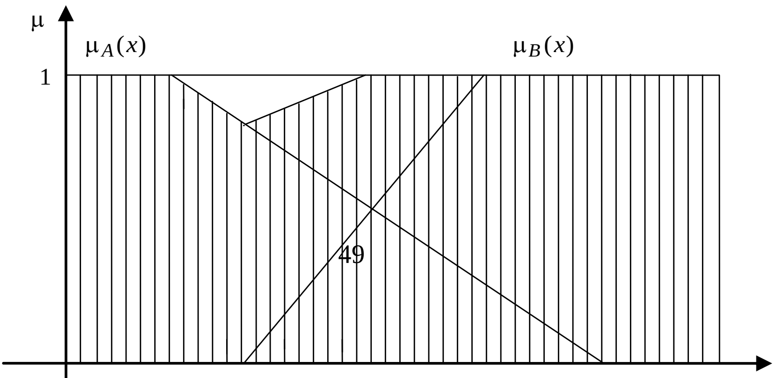

Рисунок 29

***Определение 3.13.*** *Драстическим пересечением* $A \Delta B$ (от англ. *drastic* – решительный, радикальный) двух НМ *A* и *B* называется такое НМ, заданное на том же универсальном множестве *X*, на котором определены НМ *A* и *B*, что для любого $x \in X$ функция принадлежности его определяется по формуле

$$\mu_{A\Delta B}(x) = \begin{cases} \mu_B(x), \textit{если}\ \mu_A(x) = 1, \\ \mu_A(x), \textit{если}\ \mu_B(x) = 1, \\ 0, \textit{иначе.} \end{cases}$$

***Определение 3.14.*** *Драстическим объединением* $A \nabla B$ двух НМ *A* и *B* называется такое НМ, заданное на том универсальном множестве *X*, на котором определены НМ *A* и *B*, что для любого $x \in X$

$$\mu_{A\nabla B}(x) = \begin{cases} \mu_B(x), \textit{если}\ \mu_A(x) = 0, \\ \mu_A(x), \textit{если}\ \mu_B(x) = 0, \\ 1, \textit{иначе.} \end{cases}$$

***Пример 3.9.*** Пусть *A* и *B* – НМ из примера 2.3. Тогда

$$A \Delta B = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0), (x_5, 0), (x_6, 0), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0), (x_9, 0{,}3)\};$$

$$A \nabla B = \{(x_1, 1), (x_2, 0{,}5), (x_3, 1), (x_4, 0{,}7), (x, 1), (x_6, 1), (x_7, 0{,}9), (x_8, 0{,}3), (x_9, 1)\}.$$

Результаты операций драстического пересечения и объединения двух бесконечных НМ *A* и *B*, заданных линейными z-образными функциями принадлежности, изображены с помощью штриховки соответственно на рисунках 30, 31.

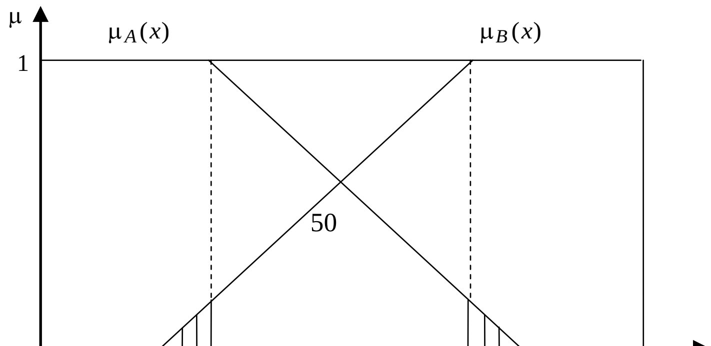

Рисунок 30

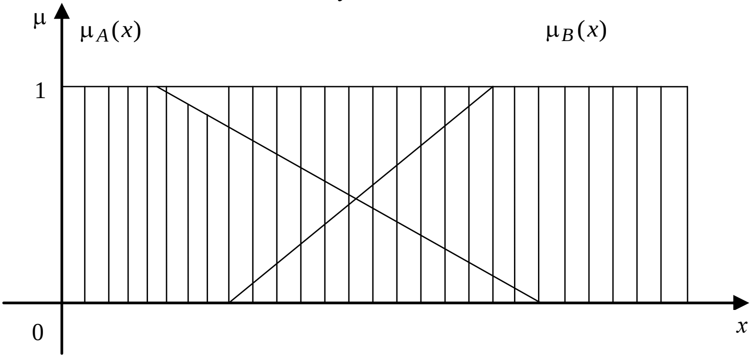


Рисунок 31

***Определение 3.15.*** λ-*суммой* двух НМ $A$ и $B$ называется такое НМ $C = A +_{\lambda} B$, заданное на том же универсальном множестве $X$, на котором определены НМ $A$ и $B$, что для любого $x \in X$

$$\mu_C(x) = \lambda \cdot \mu_A(x) + (1-\lambda) \cdot \mu_B(x),$$

где параметр $\lambda \in [0, 1]$.

***Определение 3.16.*** *Произведением НМ А на неотрицательное число* $\alpha$, такое, что $\alpha \cdot hgt A \le 1$, будем называть такое НМ $\alpha A$, что функция принадлежности его имеет вид:

$$\mu_{\alpha A}(x) = \alpha \mu_A(x), \ x \in X.$$

***Пример 3.10.*** Пусть $X$ – универсальное множество, $A$ и $B$ – НМ из примера 3.3. По определению 3.15 при $\lambda = 0{,}4$

$$\mu(A +_{0,4} B) = \{(x_1, 0{,}36), (x_2, 0{,}3), (x_3, 0{,}56), (x_4, 0{,}28), (x_5, 0{,}5), (x_6, 0{,}58), (x_7, 0{,}96), (x_8, 0{,}18), (x_9, 0{,}76)\}.$$

По определению 3.16

$$0{,}3A=\{(x_1,0{,}09),(x_2,0),(x_3,0{,}15),(x_4,0{,}21),(x_5,0{,}24),$$
$$(x_6,0{,}03),(x_7,0{,}27),(x_8,0),(x_9,0{,}3)\}.$$

***Определение 3.17.*** *Выпуклой комбинацией* НМ $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ в $X$ называется такое НМ $A$, что функция принадлежности его имеет вид:

$$\mu_A(x)=\varpi_1\mu_{A_1}(x)+\varpi_2\mu_{A_2}(x)+\ldots+\varpi_n\mu_{A_n}(x),$$

где $x\in X$, $\varpi_1$, $\varpi_2$, …, $\varpi_n$ – неотрицательные весовые коэффициенты с суммой, равной единице.

Выпуклые комбинации НМ используются, в частности, в задачах принятия решений с несколькими нечеткими целями и нечеткими ограничениями.

Функция принадлежности НМ $A +_\lambda B$ представляет собой среднее между функциями $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ принадлежности НМ $A$ и $B$ с весами $\lambda$ и $1-\lambda$ соответственно.

Контрастной интенсификацией НМ $A$ называется такое НМ $INT(A) = B$, функция принадлежности которого имеет вид:

$$\mu_B(x)=\begin{cases}2(\mu_A(x))^2,\ \textit{если}\ 0\le\mu_A(x)\le 0{,}5,\\ 1-2(1-\mu_A(x))^2,\ \textit{если}\ 0{,}5<\mu_A(x)\le 1.\end{cases}$$

Эта операция увеличивает значения $\mu_A(x)$, большие 0,5, и уменьшает те, которые меньше 0,5. Данная операция уменьшает нечеткость $A$.

## *Упражнения*

***Упражнение 1.*** Для НМ $A=\{(a, 0{,}1), (b, 0{,}2), (c, 0{,}3), (d, 0{,}4), (e, 0{,}5), (f, 0{,}6), (g, 0{,}7)\}$, $B = \{(c, 1), (d, 0{,}9), (e, 0{,}8), (f, 0{,}7), (g, 0{,}6), (h, 0{,}5), (m, 0{,}4), (n, 0{,}3)\}$ универсального множества $X = \{a, b, c, d, t, f, g, h, m, n\}$ необходимо найти:

- результаты основных логических и алгебраических операций над НМ $A$ и $B$;
- НМ $A^2$ и $B^2$;
- НМ $(A\cdot B\cup\overline{A})\cdot\overline{B}$;
- задать множества $A$ и $B$ графически.

***Упражнение 2.*** Проводится выбор проекта в будущем некоторого строящегося предприятия. Может быть выбран один из 7 имеющихся различных проектов:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.$$

В глазах руководства отрасли и города оценка каждого из имеющихся проектов предприятия в смысле экологической чистоты технологий производства определяет собой НМ

$$A = \{(x_1, 0{,}7), (x_2, 0{,}6), (x_3, 0{,}8), (x_4, 0{,}5), (x_5, 0{,}4), (x_6, 0{,}3), (x_7, 0{,}9)\}.$$

В отношении же надежности работы оборудования оценка каждого из проектов в совокупности представляет собой НМ

$$B = \{(x_1, 0{,}4), (x_2, 0{,}5), (x_3, 0{,}9), (x_4, 0{,}6), (x_5, 0{,}3), (x_6, 0{,}4), (x_7, 0{,}7)\}.$$

Следует найти такой вариант проекта предприятия, технологии производства которого были экологически чистыми и надежными в работе.

***Упражнение 3.*** Пусть $A$ – НМ чисел, гораздо больших трех. Требуется определить НМ $\overline{A}$. Необходимо изобразить графически функции принадлежности НМ $A$, $\overline{A}$.

***Упражнение 4.*** Следует найти граничные пересечение и объединение, драстические пересечение и объединение НМ $A$ и $B$ из упражнения 1.

## § 4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

### 4.1. Расстояние между нечеткими множествами

***Определение 4.1.*** Расстоянием Хемминга между множествами $A$ и $B$ из $X$ называется величина

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \left|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right| \left(i = \overline{1, n}\right).$$

***Пример 4.1.*** Пусть $A$ и $B$ – два множества из $X$:

$$A = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 0), (x_4, 1), (x_5, 0), (x_6, 0), (x_7, 1)\};$$

$$B = \{(x_1, 1), (x_2, 0), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0), (x_6, 1), (x_7, 0)\}.$$

Тогда

$$d(A,B)=|1-1|+|1-0|+|0-1|+|1-1|+|0-0|+|0-1|+|1-0|=$$
$$=0+1+1+0+0+1+1=4.$$

***Определение 4.2.*** Относительным расстоянием Хемминга между *множествами $A$ и $B$ из универсального множества $X$ мощности $n$ называется величина* $\delta(A,B)=\dfrac{1}{n}d(A,B)$.

***Пример 4.2.*** Пусть $A$ и $B$ – два множества из примера 4.1, мощность универсального множества $X$ равна $n$ = 7. Тогда по определению 4.2 $\delta(A,B)=\dfrac{4}{7}$ .

***Определение 4.3.*** Обобщенным относительным расстоянием Хемминга между двумя НМ $A$ и $B$ из универсального множества $X$ мощности $n$ называется величина

$$d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right|.$$

***Определение 4.4.*** Обобщенным относительным расстоянием Хемминга *между двумя НМ $A$* и *$B$ из универсального множества $X$ мощности $n$ называется величина* $\delta(A,B)=\dfrac{1}{n}d(A,B)$.

***Пример 4.3.*** Пусть $A$ и $B$ – два НМ универсального множества $X$ из примера 3.3. Тогда по определению 4.3

$$d(A,B)=|0{,}3-0{,}4|+|0-0{,}5|+|0{,}5-0{,}6|+|0{,}7-0|+|0{,}8-0{,}3|+$$
$$+|0{,}1-0{,}9|+|0{,}9-1|+|0-0{,}3|+|1-0{,}6|=0{,}1+0{,}5+0{,}1+0{,}7+0{,}5+$$
$$+0{,}8+0{,}1+0{,}3+0{,}4=3{,}5.$$

По определению 4.4 $\delta(A,B)=\dfrac{1}{9}\cdot 3{,}5=0{,}3(8)$.

## 4.2. Оценка персонала с помощью нечетких множеств

В примере 2.5 рассмотрено применение НМ для решения вопроса об оценке качеств кандидата на занятие вакантной должности в некотором предприятии относительно каждого из 6 видов деятельности. Рассмотрим один из многих возможных критериев оценки кандидатов, использующий НМ, заключающийся в том, чтобы максимально приблизиться к определенному контуру посредством уровней. Для этого предположим известным контур компетенций $K$ с исходным множеством $Q$:

$$Q = \{a, b, c, d, e, f\};$$
$$K = \{(a, 0{,}8), (b, 0{,}9), (c, 1), (d, 0{,}3), (e, 0{,}6), (f, 0{,}4)\}.$$

Допустим, что имеется 4 кандидата для занятия вакантной должности, и с помощью усреднения оценок возможностей каждого из них получены следующие НМ:

$$A_1 = \{(a, 0{,}7), (b, 0{,}6), (c, 0{,}4), (d, 0{,}8), (e, 0{,}9), (f, 0{,}3)\};$$
$$A_2 = \{(a, 0{,}3), (b, 0{,}7), (c, 0{,}2), (d, 0{,}6), (e, 0{,}8), (f, 1)\};$$
$$A_3 = \{(a, 0{,}2), (b, 0{,}8), (c, 0{,}5), (d, 0{,}3), (e, 0{,}6), (f, 0{,}8)\};$$
$$A_4 = \{(a, 0{,}6), (b, 0{,}5), (c, 0{,}7), (d, 0{,}9), (e, 0{,}4), (f, 0{,}9)\}.$$

Теперь перейдем к определению «различие», которое существует между каждым из кандидатов и необходимым уровнем компетенции для занятия рабочего места. Эти уровни определены контуром компетенции. Для этого сравним каждое из НМ $A_i$ = ($i$ = 1, 2, 3, 4) с НМ $K$ с помощью понятия обобщенного относительного расстояния Хемминга:

$$\delta(A_1, K) = \frac{1}{6}\big(|0{,}7 - 0{,}8| + |0{,}6 - 0{,}9| + |0{,}4 - 1| + |0{,}8 - 0{,}3| + |0{,}9 - 0{,}6| + \\ + |0{,}3 - 0{,}4|\big) = 0{,}31(6);$$

$$\delta(A_2, K) = \frac{1}{6}\big(|0{,}3 - 0{,}8| + |0{,}7 - 0{,}9| + |0{,}2 - 1| + |0{,}6 - 0{,}3| + |0{,}8 - 0{,}6| + \\ + |1 - 0{,}4|\big) = 0{,}4(3);$$

$$\delta(A_3, K) = \frac{1}{6}\big(|0{,}2 - 0{,}8| + |0{,}8 - 0{,}9| + |0{,}5 - 1| + |0{,}3 - 0{,}3| + |0{,}6 - 0{,}6| + \\ + |0{,}8 - 0{,}4|\big) = 0{,}2(6);$$

$$\delta(A_4, K) = \frac{1}{6}\big(|0{,}6 - 0{,}8| + |0{,}5 - 0{,}9| + |0{,}7 - 1| + |0{,}9 - 0{,}3| + |0{,}4 - 0{,}6| + \\ + |0{,}9 - 0{,}4|\big) = 0{,}3(6).$$

При помощи этого сравнения кандидаты упорядочиваются по убыванию их «близости» к контуру $K$:

$$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2.$$

Как видим, кандидат $A_3$ является наиболее «близким» к контуру $K$ компетенций. Другими словами, этот кандидат является наиболее подходящим для занятия вакантного места. Но такое упорядочивание, возможно, будет другим при использовании иного понятия расстояния.

Предположим, что на месте работы $t$ нужны различные уровни квалификации для каждого из видов деятельности $\eta$. Допустим, что из этих уровней квалификации также образуется НМ

$$T = \{(a, 0{,}9), (b, 0{,}3), (c, 0{,}8), (d, 1), (e, 0{,}9), (f, 0)\}.$$

Коэффициент адекватности кандидата $q$ (см. пример 2.5) относительно $t$ построим таким образом.

Если $\mu_Q(x) \geq \mu_T(x)$, то будем писать $K_x(q \to t) = 1$.

Если же $\mu_Q(x) < \mu_T(x)$, то будем записывать

$$K_x(q \to t) = 1 - \mu_T(x) + \mu_Q(x).$$

Или в более общей форме

$$K_x(q \to t) = 1 \wedge \left(1 - \mu_T(x) + \mu_Q(x)\right).$$

Для получения коэффициента $K(q, t)$ адекватности суммируем $K_x(q \to t)$ и делим полученную сумму на мощность $|\eta|$ множества $\eta$ (в результате получим число из отрезка $[0, 1]$). Имеем:

$$K_a(q \to t) = 1 \wedge (1 - 0{,}9 + 0{,}7) = 0{,}8;$$
$$K_b(q \to t) = 1 \wedge (1 - 0{,}3 + 0{,}3) = 1;$$
$$K_c(q \to t) = 1 \wedge (1 - 0{,}8 + 0) = 0{,}2;$$
$$K_d(q \to t) = 1 \wedge (1 - 1 + 0{,}4) = 0{,}4;$$
$$K_e(q \to t) = 1 \wedge (1 - 0{,}9 + 1) = 1;$$
$$K_f(q \to t) = 1 \wedge (1 - 0 + 0{,}6) = 1;$$
$$K\left(q, t\right) = \frac{1}{6}\left(0{,}8 + 1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 1 + 1\right) = 0{,}5(6).$$

Допустим, что предприятию требуется определить наилучшего среди имеющихся $n$ кандидатов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ для занятия рабочего места $t$. Для каждого кандидата с этой целью определим коэффициент $K(q, t)$

адекватности и выбираем кандидата с наиболее высоким коэффициентом. Сделаем это, например, для 4 кандидатов $a_i$, заданных ранее НМ $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, и вакантного рабочего места, заданного НМ $T$:

$$K(a_1, t) = \frac{1}{6}(0{,}8 + 1 + 0{,}6 + 0{,}8 + 1 + 1) = 0{,}8(6);$$

$$K(a_2, t) = \frac{1}{6}(0{,}4 + 1 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}9 + 1) = 0{,}71(6);$$

$$K(a_3, t) = \frac{1}{6}(0{,}3 + 1 + 0{,}7 + 0{,}3 + 0{,}7 + 1) = 0{,}(6);$$

$$K(a_4, t) = \frac{1}{6}(0{,}7 + 1 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}5 + 1) = 0{,}8(3).$$

Делаем вывод, что кандидат $a_1$ наилучшим образом соответствует рабочему месту по критерию с использованием коэффициента $K(q, t)$.

*Замечания*:

1. Кандидат, полностью соответствующий всем видам деятельности, получит, конечно же, коэффициент адекватности $K = 1$. В то же время, кандидат, имеющий оценку 0 по всем видам деятельности, получит коэффициент адекватности не 0, как можно предположить, а минимально возможную оценку:

$$\frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}2 + 0 + 0{,}1 + 1) = 0{,}35.$$

2. Рабочее место $t$, которое не требует никакой квалификации (это означает $\mu = 0$ для всех видов деятельности в НМ $T$), и кандидат $q$, не обладающий никакой квалификацией (аналогичное значение характеристической функции по всем видам деятельности в НМ $Q$), получат коэффициент адекватности $K(q, t) = 1$. В то же время кандидат, который имеет положительные значения этой функции в разных видах деятельности, получит меньший коэффициент $K$ адекватности для этого рабочего места $t$. Указанный результат не вызывает удивления, так как для работы, не требующей никакой квалификации, больше всего подходит кандидат, не имеющий этой квалификации.

3. Если посмотреть на определение коэффициента $K(q, t)$ адекватности, то можно увидеть, что оно дает $K(q, t) = 1$ любому кандидату, у которого уровень квалификации не меньше того необходимого уровня $\mu$ по видам деятельности.

4. НМ $T$ показывает уровень специализации, который требуется для каждого из 6 видов деятельности. Тогда можно утверждать, что рабочее место $t$ предполагает более высокие требования к квалификации, чем место $s$, если только $T \supset S$.

### *Упражнения*

***Упражнение 1.*** Дано универсальное множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{12}\}$ и два его подмножества $A = \{x_1, x_3, x_5, x_6, x_8, x_{10}, x_{12}\}$ и $B = \{x_3, x_6, x_9, x_{12}\}$.

Требуется:

• представить элементы подмножеств $A$ и $B$ через все элементы множества $X$, сопроводив каждый из них соответствующим значением функции принадлежности;

• найти расстояние $d(A, B)$ Хемминга между подмножествами $A$ и $B$;

• найти относительное расстояние $\delta(A, B)$ Хемминга между подмножествами $A$ и $B$.

***Упражнение 2.*** Для НМ $A = \{(а, 0{,}2), (в, 0{,}3), (д, 0{,}5), (ж, 0{,}7), (и, 0{,}9)\}$ и $B = \{(а, 0{,}6), (б, 0{,}5), (в, 0{,}8), (г, 1), (д, 0{,}2), (ж, 0{,}1), (и, 0{,}3), (к, 0{,}4)\}$ универсального множества $X = \{а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к\}$ необходимо:

• найти обобщенное расстояние $d(A, B)$ Хемминга между НМ подмножествами $A$ и $B$;

• найти относительное обобщенное расстояние $\delta(A, B)$ Хемминга между НМ подмножествами $A$ и $B$.

***Упражнение 3.*** Допустим, что существуют 7 видов деятельности некоторой организации [8], образующих множество

$$Q = \{a, b, c, d, e, f, g\}.$$

На вакантном месте работы $t$ требуются различные уровни квалификации для каждого работника для каждого из видов деятельности $Q$. Эти уровни квалификации образуют НМ

$$T = \{(a, 0{,}5), (b, 1), (c, 0{,}8), (d, 1), (e, 1), (f, 0{,}4), (g, 0)\}.$$

Имеется 6 кандидатов $p_1, p_2, \ldots, p_6$ для занятия рабочего места $t$.

Оценка качества каждого кандидата по каждому из видов деятельности организации выражается НМ $P_i, i = \overline{1,6}$:

$$P_1 = \{(a, 0), (b, 0{,}8), (c, 1), (d, 1), (e, 0{,}4), (f, 0), (g, 0{,}3)\};$$
$$P_2 = \{(a, 0{,}2), (b, 0{,}9), (c, 0{,}6), (d, 0{,}4), (e, 1), (f, 1), (g, 0{,}5)\};$$
$$P_3 = \{(a, 0{,}3), (b, 0{,}9), (c, 0{,}7), (d, 1), (e, 1), (f, 0{,}2), (g, 0)\};$$
$$P_4 = \{(a, 0{,}5), (b, 1), (c, 1), (d, 0{,}4), (e, 0{,}8), (f, 0{,}6), (g, 1)\};$$
$$P_5 = \{(a, 0{,}3), (b, 0{,}2), (c, 1), (d, 1), (e, 0), (f, 0{,}4), (g, 0)\};$$
$$P_6 = \{(a, 0{,}7), (b, 0{,}8), (c, 1), (d, 1), (e, 0{,}9), (f, 0), (g, 0{,}8)\}.$$

По критерию с использованием коэффициента $K(q, t)$ необходимо определить кандидата $p_i$, наиболее подходящего для занятия вакантной должности $t$.

***Упражнение 4.*** Известен контур компетенций

$$K = \{(a, 0{,}7), (b, 1), (c, 0{,}4), (d, 0{,}9), (e, 1), (g, 0{,}8)\}$$

с исходным множеством $Q = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Из кандидатов $p_i$, $i = \overline{1{,}6}$ (см. упражнение 3) следует определить кандидата, наиболее «близкого» к контуру $K$ компетенций, другими словами, наиболее подходящего для занятия вакантного места.

## § 5. НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА, ИХ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ

### 5.1. Нечеткие числа, их виды и типы

Имеется возможность построения математических моделей систем с использованием лингвистических переменных и обычных арифметических операций. Привлекательность такого подхода связана с тем, что имеется возможность использовать традиционные методы теории управления для анализа нечетких систем. Алгебра нечетких чисел является математической основой для построения таких моделей.

Высокий уровень представления информации об экономическом явлении гарантирован с помощью знаний эксперта, которые можно представить только в форме, содержащей нечеткости. Наиболее развитыми в настоящее время являются нечеткие числа.

*Нечеткие числа* (НЧ) будем рассматривать как НМ специализированного вида, соответствующие высказываниям типа «значение переменной *примерно равно a*». С их введением появится возможность прогнозировать будущие значения параметров, которые ожидаемо меняются в установленном расчетном диапазоне. Будет введен набор операций над нечеткими числами, которые сводятся к алгебраическим операциям с обычными числами при задании определенного интервала достоверности (уровня принадлежности). Наиболее общим понятием в рассмотренном контексте является понятие *нечеткой величины*, т. е. НМ, универсальное множество которого есть множество $R$ всех действительных чисел, т. е. $\{(x, \mu_R(x))\}$.

Для нечеткого моделирования наибольший интерес может представлять конкретизация нечеткой величины в виде нечетких чисел и интервалов.

*Нечетким интервалом* в общем случае называется нечеткая величина с выпуклой характеристической функцией. Иногда нечеткий интервал называется *толерантным нечетким числом*.

Нечетким числом $A$ называется выпуклое унимодальное нечеткое подмножество числовой оси $R$, имеющее функцию принадлежности

$$\mu_A(x): R \to [0,1],$$

где $x \in R, R$ – множество всех действительных чисел.

Другими словами, нечетким числом называется выпуклая унимодальная нечеткая величина.

В качестве примеров нечетких чисел можно привести НМ с характеристическими функциями, которые изображены на рисунках 8, 10. В качестве НМ, которое не является не только НЧ, но и нечетким интервалом, можно привести НМ с характеристической функцией, изображенной на рисунке 9. Нечеткое множество, характеристическая функция которого изображена на рисунке 11, является нечетким интервалом, но не является НЧ.

В некоторых литературных источниках при определении НЧ не делается требования нормальности и выпуклости соответствующих НМ. Но НЧ, наиболее часто используемые для представления НМ в нечетком моделировании, являются нормальными и выпуклыми.

Представляют интерес следующие виды нечетких чисел.

*Нечетким нулем* называется НМ, у которого мода равна 0.

Нечеткое число называется *положительным* (*отрицательным*), если его носитель состоит лишь из положительных (отрицательных) чисел.

Существенным недостатком данных определений НЧ и нечеткого интервала является то, что они являются слишком общими, что затрудняет их практическое использование. Представляется удобным с вычислительной точки зрения использование более конкретных НЧ в форме аналитической апроксимации при помощи ($L$-$R$)-*функций*. Получаемые в результате такого подхода НЧ позволяют охватить довольно широкий класс конкретных характеристических функций.

***Определение 5.1.*** *Функцией L-типа* (*а также R-типа*) называется произвольная функция $L$: $\boldsymbol{R} \to [0,\ 1]$ ($R$ : $\boldsymbol{R} \to [0,\ 1]$), заданная на множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел, невозрастающая на подмножестве $R_+$ неотрицательных действительных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

$$L(-x) = L(x),\ R(-x) = R(x)\ (\textit{условие четности}); \tag{5.1}$$

$$L(0) = R(0) = 1\ (\textit{условие нормирования}). \tag{5.2}$$

В литературе иногда встречается еще одно условие, которому должны, по мнению некоторых специалистов, удовлетворять функции ($L$-$R$)-типа:

$$L(1) = R(1) = 0. \tag{5.3}$$

Как можно заметить, рассмотренные в § 2 треугольная функция (см. рисунок 10) принадлежности при $b = 0$, $a = -c$ и трапециевидная функция принадлежности (см. рисунок 11) при $a = -d$, $c = -b$ являются примерами функций ($L$-$R$)-типа, так как удовлетворяют условиям (5.1) и (5.2).

В качестве примеров $L$-функций и, соответственно, $R$-функций можно привести функции следующего вида:

$$f(x) = e^{-|x|^p}; \tag{5.4}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \tag{5.5}$$

где $p$ – некоторый параметр, удовлетворяющий условию $p \geq 0$.

***Определение 5.2.*** *Нечетким числом (L-R)-типа* называется нечеткая величина $B = \{(x, \mu_B(x)\}$, характеристическая функция которой представляется в виде композиции некоторой $L$-функции и некоторой $R$-функции в следующем виде:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), a-\alpha \le x \le a, \\ 1, x = a, \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), a \le x \le a+\beta, \\ 0, \textit{иначе}, \end{cases} \tag{5.6}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Параметр $a$ при этом называется *модой*, а параметры $\alpha$, $\beta$ – соответственно *левым* и *правым коэффициентами нечеткости* НЧ $B$.

Функция принадлежности (5.6) удовлетворяет также и условию (5.3).

Как можно заметить из данного определения, при задании НЧ ($L$-$R$)-типа могут быть использованы, вообще говоря, две различные функции указанного вида. Данное обстоятельство значительно расширяет диапазон возможных представлений НЧ.

Вербально данное НЧ может означать следующее: наиболее возможным значением моделируемого параметра является $a$, а предположительные отклонения от него составляют $\alpha$ и $\beta$ влево и вправо соответственно.

Графическое изображение НЧ ($L$-$R$)-типа с функцией принадлежности (5.6) представлено на рисунке 32.

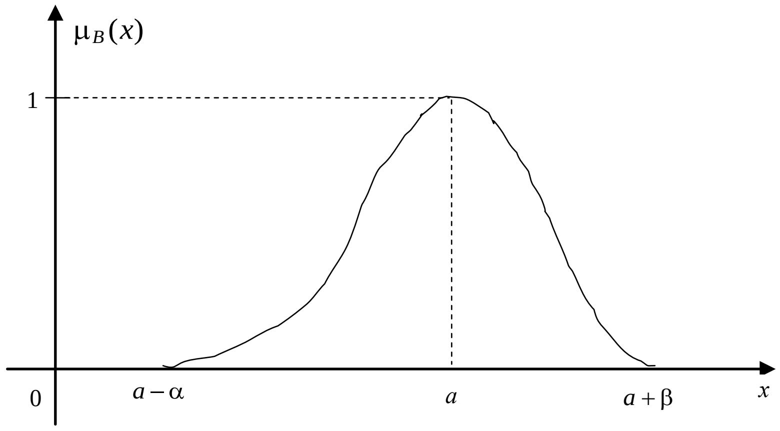

Рисунок 32

Из определения 5.2 вытекает, что НЧ ($L$-$R$)-типа с функцией принадлежности (5.5) при фиксированных функциях $L$, $R$ вполне определяется тройкой $<a, \alpha, \beta>$ своих параметров $a$, $\alpha$, $\beta$. Это обстоятельство является весьма удобным при работе с НЧ. Поэтому для обозначения того, что НЧ $B$ является НЧ ($L$-$R$)-типа, употребляют следующий символ:

$$B_{LR} = <a, \alpha, \beta>_{LR}.$$

Понятие нечеткого интервала ($L$-$R$)-типа является расширением понятия НЧ *($L$-$R$)*-типа.

***Определение 5.3.*** *Нечетким интервалом* ($L$-$R$)-*типа* называется нечеткая величина $B = \{(x, \mu_B(x))\}$, характеристическая функция которой может быть представлена в форме композиции некоторой $L$-функции и некоторой $R$-функции в следующем виде:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), a-\alpha < x \le a, \\ 1, a < x < b, \\ R\left(\dfrac{x-b}{\beta}\right), b \le x \le b+\beta, \\ 0, \textit{иначе}, \end{cases} \tag{5.7}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Параметры $a$ и $b$ при этом определяют ядро нечеткого интервала и называются *нижним* и *верхним модальными значениями* нечеткого интервала, сам интервал $[a, b]$ называется модой нечеткого интервала, а параметры $\alpha$ и $\beta$ как и ранее соответственно – *левым* и *правым коэффициентами нечеткости*. По аналогии с нечеткими интервалом нечеткий интервал ($L$-$R$)-типа называют часто *толерантным* нечетким числом ($L$-$R$)-типа. Функция (5.7) удовлетворяет также условию (5.3). Характеристическая функция $\mu_B(x)$ нечеткого интервала ($L$-$R$)-типа при фиксированных $L$- и $R$-функциях полностью определяется четверкой $<a, b, \alpha, \beta>$ своих параметров $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$. Это обстоятельство доставляет большое удобство при выполнении операций с подобными интервалами. Поэтому для того чтобы отметить тот факт, что нечеткий интервал $B$ является нечетким интервалом ($L$-$R$)-типа, употребляют следующую запись:

$$B_{LR} = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle_{LR}.$$

Из определения (5.3) можно увидеть, что при задании нечеткого интервала ($L$-$R$)-типа могут, вообще говоря, использоваться две различные функции указанного вида. Заметим, что в случае равенства $a = b$ параметров нечеткий интервал ($L$-$R$)-типа превращается в нечеткое число ($L$-$R$)-типа.

Графическое изображение нечеткого интервала (5.7) ($L$-$R$)-типа представлено на рисунке 33.

Предположения относительно линейности приводят к необходимости треугольной формы характеристической функции для НЧ (рисунок 34) и трапециевидной форме характеристической функции для нечеткого интервала (рисунок 35).

Для НЧ $B$ ($L$-$R$)-типа, заданного функцией принадлежности (5.5), число $\alpha + \beta$ называется его *размахом*, которое можно интерпретировать как меру неопределенности НЧ.

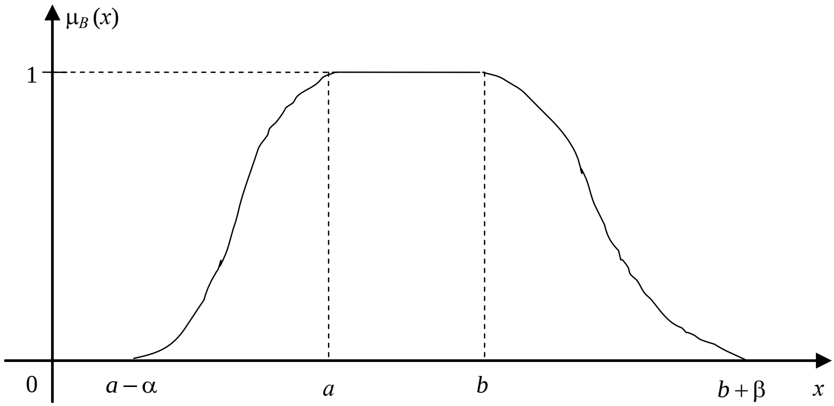


Рисунок 33

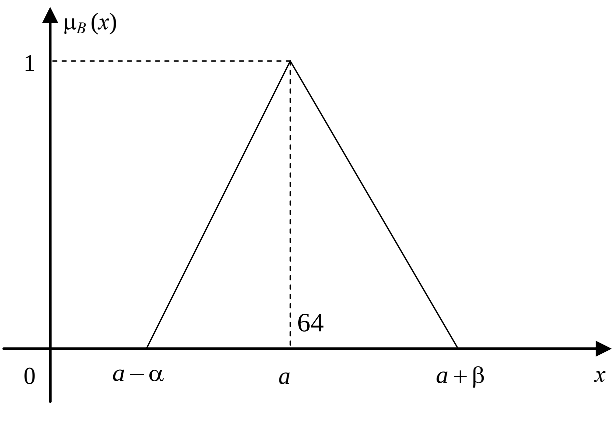

Рисунок 34

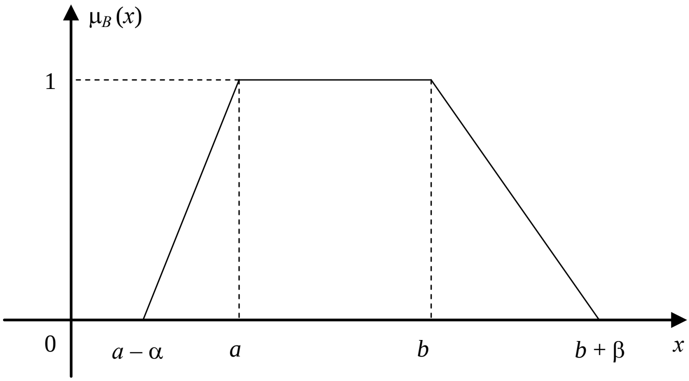


Рисунок 35

## 5.2. Операции над нечеткими числами

Для нечетких чисел и интервалов определяются различные операции, которые являются аналогами обычных арифметических операций над действительными числами. Арифметические операции над НЧ во многом напоминают соответствующие операции над доверительными интервалами случайных величин. Пусть $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ – два доверительных интервала, $C = [c_1, c_2]$ – результат арифметической операции над этими доверительными интервалами. Результаты конкретных арифметических операций помещены в таблице 4 [2].

Таблица 4

| Операция | $c_1$ | $c_2$ |
|---|---|---|
| $-A$ | $-a_2$ | $-a_1$ |
| $\frac{1}{A}$ | $\frac{1}{a_2}$ | $\frac{1}{a_1}$ |
| $A + B$ | $a_1 + b_1$ | $a_2 + b_2$ |
| $A \cdot B;\ A, B > 0$ | $a_1 \cdot b_1$ | $a_2 \cdot b_2$ |
| $\frac{A}{B};\ A, B > 0$ | $\frac{a_1}{b_2}$ | $\frac{a_2}{b_1}$ |

Пусть $A$, $B$ и $C$ – произвольные НЧ (нечеткие интервалы) с характеристическими функциями $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$ и $\mu_C(z)$ соответственно.

В основе рассматриваемых арифметических операций над НЧ и нечеткими интервалами лежит *принцип расширения* [6], одна из основных идей из ТНМ. Принцип расширения, основанный на операции нахождения минимума, получил название «принцип расширения Заде». Обозначим при помощи символа $(*)$ одну из арифметических операций над НЧ (нечеткими интервалами) $A$ и $B$. Пусть $C$ = А * $B$, тогда

$$\mu_C(z) = \underbrace{\sup}_{z=x*y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}.$$

***Определение 5.4.*** *Суммой* НЧ (нечетких интервалов) $A$ и $B$ называется НЧ (нечеткий интервал) $A + B = C = \{(z, \mu_C(z))\}$, где характеристическая функция $\mu_C(z)$ результата $C$ определяется по формуле

$$\mu_C(z) = \underbrace{\sup}_{z=x+y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \quad (5.8)$$

***Определение 5.5.*** *Разностью* НЧ (нечетких интервалов) $A$ и $B$ называется НЧ (нечеткий интервал) $A - B = C = \{(z, \mu_C(z))\}$, где характеристическая функция $\mu_C(z)$ результата $C$ определяется по формуле

$$\mu_C(z) = \underbrace{\sup}_{z=x-y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \quad (5.9)$$

***Определение 5.6.*** *Произведением* НЧ (нечетких интервалов) $A$ и $B$ называется НЧ (нечеткий интервал) $A \cdot B = C = \{(z, \mu_C(z))\}$, где характеристическая функция $\mu_C(z)$ результата $C$ определяется по формуле

$$\mu_C(z) = \underbrace{\sup}_{z=x \cdot y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \quad (5.10)$$

***Определение 5.7.*** *Частным* НЧ (нечетких интервалов) $A$ и $B$ называется НЧ (нечеткий интервал) $A \div B = C = \{(z, \mu_C(z))\}$, где характеристическая функция $\mu_C(z)$ результата $C$ определяется по формуле

$$\mu_C(z) = \underbrace{\sup}_{z=x \div y} \{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \quad (5.11)$$

В формулах (5.8)–(5.11) в правых частях равенств супремум берется по каждому из совокупности значений элементов универсального множества, которые являются результатом соответствующей обычной операции над численными значениями элементов универсальных множеств исходных НЧ (нечетких интервалов).

***Пример 5.1.*** Пусть НЧ $B$ = «Нечеткая двойка» = {(1, 0,1), (2, 1,0), (3, 0,1)}. Рассмотрим выполнение нечеткой операции сложения: «нечеткая двойка» + «нечеткая двойка», т. е. найдем сумму $B + B$ с использованием формулы (5.8). Будем иметь: $B + B$ = {(1, 0,1), (2, 1,0), (3, 0,1)} + {(1, 0,1), (2, 1,0), (3, 0,1)} = {(2, min {0,1, 0,1}), (3, max{min{0,1, 1,0}, min {1,0, 0,1}}), (4, max{min{0,1, 0,1}, min {1,0, 1,0}, min{0,1, 0,1}}), (5, max{min{1,0, 0,1}, min{0,1, 1,0}}), (6, min{0,1, 0,1})} = {(2, 0,1), (3, 0,1), (4, 1,0), (5, 0,1), (6, 0,1)}.

Нечеткое число, полученное в результате, можно назвать «нечеткой четверкой».

При определении операций над НЧ и интервалами ($L$-$R$)-типа будем исходить из следующих соображений. Результат $C$ арифметических операций сложения, вычитания, деления и умножения НЧ (нечетких интервалов) $A$ и $B$ ($L$-$R$)-типа должен быть точно или приблизительно равен некоторому НЧ (нечеткому интервалу) ($L$-$R$)-типа, а параметры $\alpha$, $\beta$ результата $C$ должны определенным образом зависеть от соответствующих параметров указанных НЧ (нечетких интервалов) $A$ и $B$.

Арифметические операции для НЧ ($L$-$R$)-типа ( $A = (a, \alpha_a, \beta_a)$, $B = (b, \alpha_b, \beta_b), C = (c, \alpha_c, \beta_c)$ ) даны в таблице 5 [2].

Таблица 5

| Операция | $c$ | $\alpha_c$ | $\beta_c$ |
|---|---|---|---|
| $-A$ | $-a$ | $\beta_a$ | $\alpha_a$ |
| $\frac{1}{A}$ | $\frac{1}{a}$ | $\frac{1}{\beta_a}$ | $\frac{1}{\alpha_a}$ |
| $A + B$ | $a + b$ | $\alpha_a + \alpha_b$ | $\beta_a + \beta_b$ |
| $A - B$ | $a - b$ | $\alpha_a + \beta_b$ | $\beta_a + \alpha_b$ |
| $A \cdot B, A, B > 0$ | $a \cdot b$ | $a \cdot \alpha_b + b \cdot \alpha_a$ | $a \cdot \beta_b + b \cdot \beta_a$ |
| $\frac{A}{B}$, $A, B > 0$ | $\frac{a}{b}$ | $\frac{a \cdot \beta_b + b \cdot \alpha_a}{b^2}$ | $\frac{a \cdot \alpha_b + b \cdot \beta_a}{b^2}$ |

Выражения результатов арифметических операций над НЧ, содержащиеся в таблице 5, можно принимать только в случаях малых значений коэффициентов $\alpha_a$, $\beta_a$, $\alpha_b$, $\beta_b$ нечеткости.

***Пример 5.2.*** Пусть $A = (4, 1, 2)$, $B = (5, 2, 2)$, тогда $C_{LR} = (4 + 5,1 + + 2,2 + 2) = (9, 3, 4)$. Функции принадлежности данных НЧ изображены на рисунке 36.

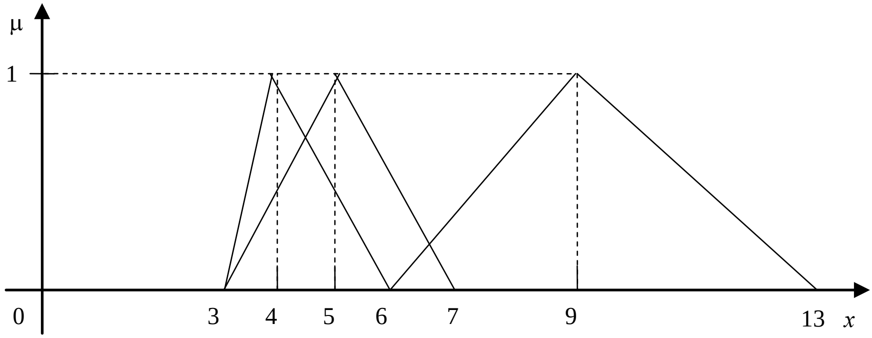


Рисунок 36

Аналогичным образом можно определить операции над нечеткими интервалами ($L$-$R$)-типа, но так как подобные операции характеризуются повышенной сложностью соответствующих численных расчетов. Они не нашли своего широкого применения в практике нечеткого моделирования и рассматриваться в данном пособии не будут.

Важную роль в экономике играют треугольные НЧ. Они могут быть заданы также упорядоченными тройками $(a_1, a_2, a_3)$ действительных чисел $a_1$, $a_2$, $a_3$. Первое число $a_1$ задает величину, меньше которой не может быть, число $a_3$ задает величину, больше которой не может быть. Наконец, действительное число $a_2$ задает величину, определяющую максимальное значение функции $\mu_A(x)$ принадлежности (рисунок 10). Арифметические операции над нечеткими числами $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$, заданных в виде упорядоченных троек действительных чисел, представлены в таблице 6 [2]. Здесь НЧ $C = (c_1, c_2, c_3)$ – результат арифметической операции.

Таблица 6

| Операция | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|
| $-A$ | $-a_3$ | $-a_2$ | $-a_1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{A}$ | $\frac{1}{a_3}$ | $\frac{1}{a_2}$ | $\frac{1}{a_1}$ |
| $A + B$ | $a_1 + b_1$ | $a_2 + b_2$ | $a_3 + b_3$ |
| $A \cdot B, A, B > 0$ | $a_1 \cdot b_1$ | $a_2 \cdot b_2$ | $a_3 \cdot b_3$ |
| $\frac{A}{B},\ A, B > 0$ | $\frac{a_1}{b_3}$ | $\frac{a_2}{b_2}$ | $\frac{a_3}{b_1}$ |

Несколько иначе определил Р. Ягер операции над НЧ ($L$-$R$)-типа. Результирующее НЧ по Ягеру имеет меньшие коэффициенты нечеткости, чем при выполнении тех же действий, но при использовании правил вычислений по Заде. Поэтому в задачах, требующих большого объема вычислений, предпочтительнее использование арифметических операций, основанных на определении Р. Ягера.

Арифметические операции для НЧ ( $A = (a, \alpha_a, \beta_a)$, $B = (b, \alpha_b, \beta_b)$ ) ($L$-$R$)-типа по Р. Ягеру приведены в таблице 7 [2]. Здесь, как и ранее, НЧ $C = (c, \alpha_c, \beta_c)$ – результат арифметической операции.

Таблица 7

| Операция | $c$ | $\alpha_c$ | $b_c$ |
|---|---|---|---|
| $-A$ | $-a$ | $\beta_a$ | $\alpha_a$ |
| $\frac{1}{A}$ | $\frac{1}{a}$ | $\frac{1}{\beta_a}$ | $\frac{1}{\alpha_a}$ |
| $A + B$ | $a + b$ | $\max\{\alpha_a; \alpha_b\}$ | $\max\{\beta_a; \beta_b\}$ |
| $A - B$ | $a - b$ | $\max\{\alpha_a; b\alpha_a\}$ | $\max\{\beta_a; \alpha_b\}$ |
| $A \cdot B, A, B > 0$ | $a \cdot b$ | $\max\{a\alpha_b; b\alpha_a\}$ | $\max\{a\beta_b; b\beta_a\}$ |
| $\frac{A}{B},\ A, B > 0$ | $\frac{a}{b}$ | $\max\{\frac{a\beta_b}{b^2}; \frac{\alpha_a}{b}\}$ | $\max\{\frac{a\alpha_b}{b^2}; \frac{\beta_a}{b}\}$ |

***Пример 5.3.*** Пусть $A$ и $B$ – НЧ ($L$-$R$)-типа из примера 5.2. Определим результаты других арифметических операций над этими НЧ по формулам из таблицы 4. Будем иметь:

$$-A = (-4; 2; 1);$$

$$\frac{1}{A}=\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};1\right);$$

$$A-B = (4-5;\ 1+2;\ 2+2) = (-1;\ 3;\ 4);$$

$$A\cdot B=(4\cdot 5;\ 4\cdot 2+5\cdot 1;\ 4\cdot 2+5\cdot 2)=(20;13;18);$$

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{4}{5};\frac{4\cdot 2+5\cdot 1}{25};\frac{4\cdot 2+5\cdot 2}{25}\right)=\left(\frac{4}{5};\frac{13}{25};\frac{18}{25}\right).$$

Определим теперь результаты арифметических операций над этими НЧ *A* и *B* по определениям, предложенным Р. Ягером (таблица 6). Имеем:

$$-A = (-4;\ 2;\ 1);$$

$$\frac{1}{A}=(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1);$$

$$A+B = (4+5;\ \max\{1;\ 2\};\ \max\{2;\ 2\}) = (9;\ 2;\ 2);$$

$$A-B = (4-5;\ \max\{1;\ 5\cdot 1\};\ \max\{2;\ 2\}) = (-1;\ 5;\ 2);$$

$$A\cdot B=(4\cdot 5;\ \max\{4\cdot 2;5\cdot 1\};\ \max\{4\cdot 2;5\cdot 2\})=(20;8;10);$$

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{4}{5};\ \max\left\{\frac{4\cdot 2}{25};\frac{1}{5}\right\};\ \max\left\{\frac{4\cdot 2}{25};\frac{2}{5}\right\}\right)=\left(\frac{4}{5};\frac{8}{25};\frac{8}{25}\right).$$

Как можно увидеть, в подтверждение сказанного ранее индексы нечеткости результатов арифметических операций над НЧ *A* и *B*, вычисленных на основании определений Р. Ягера, не превосходят соответствующих индексов в результатах операций, вычисленных на основании определений Л. Заде.

Операции над НЧ, как частный случай операций над НМ, имеют все те же присущие им свойства (см. § 3).

Кроме того, существуют еще дополнительные свойства этих операций:

$$A+(-A)\neq 0;$$

$$A\cdot\left(\frac{1}{A}\right)\neq 1.$$

Укажем еще одно важное свойство, относящееся к симметричным треугольным НЧ $(\alpha, c)$, $c \geq 0$ с центром $\alpha$ и индексом нечеткости $c$, т. е.

$$(a,c) = \left(\alpha - \frac{1}{2}c, \alpha, \alpha + \frac{1}{2}c\right).$$

Функция $\mu_A(x)$ принадлежности симметричного треугольного НЧ числа $A = (\alpha, c)$, $c \geq 0$ представлена на рисунке 37.

Аналитически эта функция принадлежности может быть представлена в виде формулы

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x \leq \alpha - \dfrac{c}{2}, \\ \dfrac{2x - 2\alpha + c}{c}, \alpha - \dfrac{c}{2} \leq x \leq \alpha, \\ \dfrac{2\alpha + c - 2x}{c}, \alpha \leq x \leq \alpha + \dfrac{c}{2}, \\ 0, x \geq \alpha + \dfrac{c}{2}. \end{cases} \tag{5.12}$$

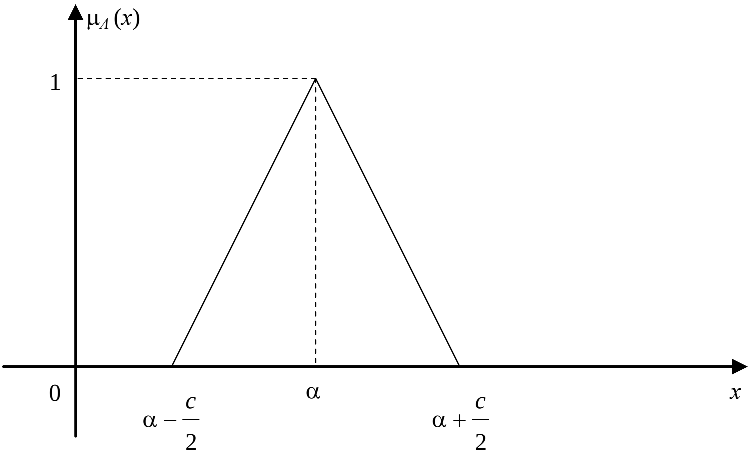


Рисунок 37

Для симметричных треугольных НЧ является справедливым равенство

$$(\alpha, c)\, x = (\alpha x, c\,|\,x\,|),\; x \in R. \tag{5.13}$$

### 5.3. Применение нечетких чисел для построения нечетких регрессионных моделей экономических показателей

Среди новых методов прогнозирования и планирования на предприятии выделяют методы теории нечетких множеств и, в частности, методы построения нечетких регрессионных моделей.

Одной из основных особенностей нынешних экономических процессов и явлений является их неопределенность и изменчивость. Это связано с проведением различного рода реформ. Окружающая среда организаций приобретает все более рыночный характер, что вносит в нее дополнительные элементы неточности и случайности. Экономическая, социальная и технологическая обстановка в организациях в настоящее время является значительно менее предсказуемой и находится в более нестабильной ситуации, чем в недалеком прошлом. Поэтому теперь в нашей стране ведутся на разных уровнях поиски новых подходов для изучения ситуаций, которые переживают экономические системы и организации.

Классическая задача построения линейной регрессионной модели может быть сформулирована следующим образом: по результатам $n$ измерений (наблюдений)

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}, y_i, i = \overline{1,n}, \tag{5.14}$$

переменных $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y$ построить такую линейную функцию

$$f = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_m X_m, A_i \in R, i = \overline{1,m}, \tag{5.15}$$

которая бы наилучшим образом восстанавливала значения переменной $Y$ по значениям переменных $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Решение указанной задачи традиционным методом наименьших квадратов имеет существенные недостатки, среди которых можно отметить следующие:

- его неустойчивость относительно допустимых колебаний предпосылок и исходных данных;

• априорная ложность проверяемой гипотезы об адекватности модели объекту; так реальная система всегда сложнее, чем любая ее модель.

В работах [11, 12] рассмотрена задача по результатам $n$ измерений входных $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}, i = \overline{1, n}$ и выходных $y_i, i = \overline{1, n}$ четких данных построения нечеткой регрессионной модели

$$\tilde{Y} = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \ldots + \tilde{a}_m X_m, \text{ где } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}. \qquad (5.16)$$

В ней $\tilde{a}_j = (\alpha_j, c_j)$, $j = \overline{1, m}$, $c_j \geq 0$, являются симметричными треугольными НЧ с центрами $\alpha_j$ и индексами нечеткости $c_j$, т. е.

$$\tilde{a}_j = (\alpha_j - \frac{1}{2} c_j, \alpha_j, \alpha_j + \frac{1}{2} c_j).$$

Свойства симметричных треугольных НЧ позволяют нам интервальный выход $Y$ для формулы

$$Y = \tilde{a}_1 X_1 + \tilde{a}_2 X_2 + \ldots + \tilde{a}_m X_m \qquad (5.17)$$

вычислить следующим образом:

$$Y = \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_j x_{ij} = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_{ij}, \sum_{j=1}^{m} c_j \mid x_{ij} \mid).$$

Оценочная линейная интервальная модель (5.17) строится на основе следующих требований:

1. Заданные наблюдаемые значения $y_i$ включаются в оценочный интервал $\tilde{y}_i$, т. е. для всех $i = \overline{1, n}$ $y_i \in \tilde{y}_i$.

2. Ширину $i$-го оценочного интервала будем определять как $\sum_{j=1}^{m} c_j \mid x_{ij} \mid$. Желательно, чтобы эта ширина была минимальной. Следо-

вательно, будем минимизировать сумму значений ширины оценочного интервала, другими словами, будем определять интервальные коэффициенты $\tilde{a}_j = (\alpha_j, c_j)$ таким образом, чтобы они минимизировали сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \, | x_{ij} |, \; c_j \geq 0, \; j = \overline{1,m}. \tag{5.18}$$

Указанные выше требования [12] сводятся к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \, | x_{ij} | \to \min, \\ y_i \geq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, | x_{ij} | - \sum_{j=1}^{m} c_j \, | x_{ij} |, \\ y_i \leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, | x_{ij} | + \sum_{j=1}^{m} c_j \, | x_{ij} |, \\ c_j \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{5.19}$$

***Пример 5.4.*** Рассмотренный метод построения нечеткой линейной регрессионной модели применим для исследования зависимости годовой величины $y$ доходов открытого акционерного общества торговли (ОАОТ) «Зубр» г. Гомеля от влияющих на него факторов.

Источники образования доходов в рыночной экономике взаимосвязаны, поэтому достаточно сложно выделить их чистое содержание. В большинстве случаев получаемый доход зависит от объема розничного товарооборота. Одними из важнейших источников образования прибыли как конечного финансового результата торговых организаций являются доходы от реализации товаров, внереализационной и операционной деятельности. Прямое воздействие на объем дохода торговой организации оказывают объем товарооборота, состав и ассортиментная структура товарооборота. В частности, непродовольственные товары имеют несколько большие наценки, чем продовольственные, увеличение первых в объеме товарооборота приводит в большей степени к увеличению дохода организации.

В соответствии с теорией нечеткой регрессии пусть $y$ – величина дохода ОАОТ «Зубр» за год и влияющие на него факторы: $x$ – объем розничного товарооборота, $t$ – количество процентов, которые составляет объем товарооборота непродовольственных товаров в общем годовом объеме товарооборота, $z$ – сальдо внереализационных доходов и расходов, $v$ – сальдо операционных доходов и расходов. В таблице 8 приведены соответствующие показатели работы ОАОТ «Зубр» за 2003–2009 гг.

Таблица 8

| Годы | $y$ | $x$ | $t$ | $z$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2003 | 4 371 | 27 769 | 17,2 | 43 | –2 |
| 2004 | 5 585 | 35 342 | 17,1 | –80 | –94 |
| 2005 | 6 083 | 38 096 | 18,9 | –67 | –67 |
| 2006 | 6 919 | 39 999 | 16,4 | –113 | 355 |
| 2007 | 8 204 | 49 433 | 19,0 | –145 | 443 |
| 2008 | 10 696 | 64 104 | 21,5 | –280 | 6 75 |
| 2009 | 11 534 | 66 557 | 18 | –323 | 1 146 |

Примечание – Источник: собственная разработка авторов на основе данных ОАОТ «Зубр».

Нечеткая линейная регрессионная модель в соответствии с формулой (5.17) будет иметь такой вид:

$$\tilde{u} = \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 t + \tilde{a}_3 z + \tilde{a}_4 v. \tag{5.20}$$

Задача линейного программирования в соответствии с формулами (5.18) и (5.19) при указанных конкретных данных таблицы будет такой:

$$f = 321300c_1 + 128{,}1c_2 + 1051c_3 + 2\,782c_4 \to \min$$

$$
\begin{cases}
27\,769\alpha_1 + 17{,}2\alpha_2 + 43\alpha_3 - 2\alpha_4 - 27\,769c_1 - 17{,}2c_2 - 43c_3 - 2c_4 \le 4\,371, \\
27\,769\alpha_1 + 17{,}2\alpha_2 + 43\alpha_3 - 2\alpha_4 + 27\,769c_1 + 17{,}2c_2 + 43c_3 + 2c_4 \ge 4\,371, \\
35\,342\alpha_1 + 17{,}1\alpha_2 - 80\alpha_3 - 94\alpha_4 - 35\,342c_1 - 17{,}1c_2 - 80c_3 - 94c_4 \le \\
\le 5\,585, \\
35\,342\alpha_1 + 17{,}1\alpha_2 - 80\alpha_3 - 94\alpha_4 + 35\,342c_1 + 17{,}1c_2 + 80c_3 + 94c_4 \ge \\
\ge 5\,585, \\
38\,096\alpha_1 + 18{,}9\alpha_2 - 67\alpha_3 - 67\alpha_4 - 38\,096c_1 - 18{,}9c_2 - 67c_3 - 67c_4 \le \\
\le 6\,083, \\
38\,096\alpha_1 + 18{,}9\alpha_2 - 67\alpha_3 - 67\alpha_4 + 38\,096c_1 + 18{,}9c_2 + 67c_3 + 67c_4 \ge \\
\ge 6\,083, \\
39\,999\alpha_1 + 16{,}4\alpha_2 - 113\alpha_3 + 355\alpha_4 - 39\,999c_1 - 16{,}4c_2 - 113c_3 - \\
- 355c_4 \le 6\,919, \\
39\,999\alpha_1 + 16{,}4\alpha_2 - 113\alpha_3 + 355\alpha_4 + 39\,999c_1 + 16{,}4c_2 + 113c_3 + \\
+ 355c_4 \ge 6\,919, \\
49\,433\alpha_1 + 19\alpha_2 - 145\alpha_3 + 443\alpha_4 - 49\,433c_1 - 19c_2 - 145c_3 - 443c_4 \le \\
\le 8\,204, \\
49\,433\alpha_1 + 19\alpha_2 - 145\alpha_3 + 443\alpha_4 + 49\,433c_1 + 19c_2 + 145c_3 + 443c_4 \ge \\
\ge 8\,204, \\
64\,104\alpha_1 + 21{,}5\alpha_2 - 280\alpha_3 + 675\alpha_4 - 64\,104c_1 - 21{,}5c_2 - 280c_3 - \\
- 675c_4 \le 10\,696, \\
64\,104\alpha_1 + 21{,}5\alpha_2 - 280\alpha_3 + 675\alpha_4 + 64\,104c_1 + 21{,}5c_2 + 280c_3 + \\
+ 675c_4 \ge 10\,696, \\
66\,557\alpha_1 + 18\alpha_2 - 323\alpha_3 + 1\,146\alpha_4 - 66\,557c_1 - 18c_2 - 323c_3 - \\
- 1146c_4 \le 11634, \\
66\,557\alpha_1 + 18\alpha_2 - 323\alpha_3 + 1146\alpha_4 + 66\,557c_1 + 18c_2 + 323c_3 + \\
+ 1146c_4 \ge 11634, \\
c_1 \ge 0, c_2 \ge 0, c_3 \ge 0.
\end{cases}
$$

Решение указанной задачи линейного программирования на персональном компьютере дало следующие оптимальные значения переменных $\alpha_j, c_j$:

$$\alpha_1 = 0{,}187\,572;\ \alpha_2 = -50{,}991;\ \alpha_3 = 1{,}540\,506;\ \alpha_4 = 0{,}738\,411;\ c_1 = 0;$$
$$c_2 = 1{,}431\,282;\ c_3 = 0;\ c_4 = 0{,}397\,238.$$

Нечеткая линейная регрессия в соответствии с формулой (5.20) будет иметь следующий вид:

$$\tilde{u} = (0{,}187\,572;\ 0)x + (-50{,}991;\ 1{,}431\,282)t + (1{,}540\,506;\ 0)z + (0{,}738\,411;\ 0{,}397\,238)v.$$

Продемонстрируем работу модели. Пусть $x$ = 70 000 млн р., $t$ = 20%, $z$ = –350 млн р., $v$ = 1 200 млн р., тогда по правилам действия над НЧ (см. таблицу 4 и формулу (5.13)) $\tilde{u}$ = (12 457,136; 505,311 24) =

= (12 204,481; 12 457,136; 12 709,791).

Как известно, по целому ряду причин параметры, от которых зависит величина того или иного экономического показателя, невозможно совместить в одной четкой модели, которая была бы наиболее близка к действительности. Реальная система всегда сложнее, чем любая ее модель, поэтому логичнее, когда выходной экономический показатель будет представлен в виде НЧ. При этом если ширина $c_j$ $j$-го интервала для всех $j$ будет равна 0, то симметричные треугольные нечеткие числа превращаются в обычные действительные числа, а нечеткая регрессионная модель превращается в обычную традиционную.

## *Упражнения*

***Упражнение 1.*** Пусть $I$ – НЧ «Нечеткая единица» = {(0, 0, 2), (1, 1, 0), (2, 0, 2)}. Следует найти сумму $I + I$ НЧ.

***Упражнение* 2.** Необходимо найти результаты всех арифметических операций над треугольными НЧ $A$ = (5, 2, 3) и $B$ = (6, 1, 1) ($L$-$R$)-типа на основании определений Л. Заде. Надо построить графики функций принадлежности НЧ $A$, $B$, $A + B$. Следует найти размах нечеткости этих НЧ.

***Упражнение 3.*** Требуется найти результаты всех арифметических операций над треугольными НЧ из упражнения 2 на основании определений Р. Ягера. Необходимо сравнить результаты арифметических операций над указанными НЧ, вычисленные на основании определений Л. Заде и Р. Ягера.

***Упражнение 4.*** Пусть $x$ – расходы некоторой финансовой структуры на обслуживание системы автоматизации банковских операций за единицу времени, $y$ – доход финансовой структуры от обслуживания валютных счетов клиентов за единицу времени, $z$ – доход от обслуживания рублевых счетов клиентов за единицу времени, $u$ – балансовая прибыль финансовой структуры за единицу времени [11]. Данные представлены в таблице 9.

Таблица 9

| *x* | *y* | *z* | *u* |
|---|---|---|---|
| 1,84 | 2,91 | 5,01 | 17,47 |
| 1,99 | 3,04 | 5,28 | 17,2 |
| 2,14 | 3 | 5,65 | 16,76 |
| 1,95 | 2,92 | 5,94 | 18,67 |
| 1,9 | 2,93 | 6,17 | 20,05 |
| 1,95 | 3,58 | 6,47 | 21,02 |
| 1,97 | 3,3 | 6,87 | 23,25 |
| 1,75 | 3,32 | 6,68 | 25 |
| 1,91 | 3,42 | 6,95 | 24,47 |
| 1,9 | 3,21 | 7,12 | 24,55 |
| 1,7 | 3,11 | 6,59 | 25,7 |
| 1,62 | 3,09 | 7,28 | 26,64 |
| 1,5 | 3,12 | 7,47 | 26,92 |
| 1,39 | 2,99 | 7,45 | 27,62 |
| 1,41 | 2,95 | 7,45 | 28,25 |
| 1,4 | 2,9 | 7,69 | 26,93 |
| 1,4 | 2,82 | 7,8 | 27 |
| 1,36 | 2,82 | 7,88 | 26,64 |
| 1,3 | 2,83 | 8,02 | 25,45 |
| 1,25 | 2,85 | 7,99 | 25,62 |

Необходимо построить нечеткую линейную регрессионную модель

$$\tilde{u} = \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 y + \tilde{a}_3 z.$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Zadeh, L. A.** Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

2. **Алехина, А. Э.** Модели и методы принятия решений в экономике с использованием ТНМ : дис. … канд. экон. наук : 08.00.13 / А. Э. Алехина. – Минск, 2002. – 184 л.

3. **Борисов, А. Н.** Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования : моногр. / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.

4. **Введение** в математическое моделирование : учеб. пособие для вузов / В. Н. Ашихман [и др.] ; под общ. ред. П. В. Трусова. – М. : Логос, 2007. – 440 с.

5. **Вятченин, Д. А.** Нечеткие методы автоматической классификации : моногр. / Д. А. Вятченин. – Минск : Технопринт, 2004. – 219 с.

6. **Заде, Л. А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М. : Мир, 1976. – 162 с.

7. **Кофман, А.** Введение в теорию нечетких множеств : [пер. с фр.] / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

8. **Кофман, А.** Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями : [пер. с фр.] / А. Кофман, Х. Хил Алуха. – Минск : Выш. шк., 1992. – 224 с.

9. **Леоненков, А. В.** Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.

10. **Обработка** нечеткой информации в системах принятия решений : моногр. / А. Н. Борисов [и др.]. – М. : Радио и связь, 1989. – 304 с.

11. **Полещук, О. М.** Линейная нечеткая регрессионная модель при условии четких входных и выходных данных / О. М. Полещук // Лесной вестн. – 2000. – № 4. – С. 138–142.

12. **Прикладные** нечеткие системы : моногр. / К. Асаи [и др.] ; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. – М. : Мир, 1993. – 368 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ, НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

**Пособие**
**для студентов экономических специальностей, аспирантов и соискателей**

**В трех частях**

**Часть 1**

**Нечеткие множества**

Авторы-составители:
**Романенко** Николай Денисович
**Тютин** Виталий Иванович

Редактор  И. А. Михайлова
Технический редактор  Т. В. Гавриленко
Компьютерная верстка  Н. Н. Короедова

Подписано в печать 19.10.12. Бумага типографская № 1.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,90. Тираж 100 экз.
Заказ №

Учреждение образования
«Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.
ЛИ № 02330/0494302 от 04.03.2009 г.

Отпечатано в учреждении образования
«Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации».
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

1

БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра высшей математики

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ, НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

**Пособие**
**для студентов экономических специальностей,**
**аспирантов и соискателей**

**В трех частях**

**Часть 1**

**Нечеткие множества**

Гомель 2012